Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Mathematica
Volumen 21, 1996, 101–109

ZUR QUASIKONFORMEN SPIEGELUNG

Reiner Kühnau

Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, FB Mathematik und Informatik
Institut für Analysis, D-06099 Halle an der Saale, Deutschland

Abstract. We define the "reflection center" of a quasicircle as the points of the interior, which occur as the image of ∞ at an extremal quasiconformal reflection $w(z)$. We get estimates for this center. In some cases this center contains more than one point (example: square).

In this connection it is useful to study extremal quasiconformal reflections with the side condition $w(\infty) =$ fixed.

1. Einleitung

Es sei $\mathfrak{C}$ eine geschlossene Jordankurve in der komplexen w-Ebene. Die "Mitte" von $\mathfrak{C}$ läßt sich bekanntlich in mannigfacher Weise auffassen bzw. definieren. Hier soll eine "Spiegelungsmitte" von $\mathfrak{C}$ definiert werden, falls $\mathfrak{C}$ speziell ein Quasikreis ist, wobei auch die Lage der Tangente (falls vorhanden), sozusagen die Rauhigkeit von $\mathfrak{C}$, einen Einfluß hat.

Sei nämlich $w^*(w)$ eine möglichst konforme (= extremal quasikonforme) Spiegelung an $\mathfrak{C}$, d.h. eine orientierungsumkehrende, alle Punkte von $\mathfrak{C}$ festhaltende, quasikonforme Abbildung der Vollkugel auf sich mit kleinstmöglicher Maximaldilatation. Dann wird man $w^*(\infty)$ als eine mögliche "Spiegelungsmitte" von $\mathfrak{C}$ auffassen können, weil im Falle eines Kreises $\mathfrak{C}$ tatsächlich der Mittelpunkt von $\mathfrak{C}$ entsteht. Für hinreichend glatte $\mathfrak{C}$ ist die möglichst konforme Spiegelung an $\mathfrak{C}$ nach K. Strebel [5] eindeutig bestimmt, und damit auch die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$. Das ist aber nicht immer so—man vgl. schon das einfache Beispiel einer Quadratlinie in [2], [3]. Also wird man im allgemeinen Falle als Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ die Gesamtheit der bei allen möglichst konformen Spiegelungen $w^*(w)$ anfallenden Punkte $w^*(\infty)$ definieren. In dieser Mitteilung sollen einige Aussagen über die Lage und Ausdehnung dieser Spiegelungsmitte in Bezug auf $\mathfrak{C}$ gewonnen werden.

Es erweist sich als zweckmäßig, in diesem Zusammenhange mit zu betrachten die Frage nach den möglichst konformen Spiegelungen $w^*(w)$ an $\mathfrak{C}$ unter der Nebenbedingung $w^*(\infty) = w_0$, wobei w_0 ein innerhalb $\mathfrak{C}$ fest vorgegebener Punkt ist. Sei

$$Q(w_0) \geq 1 \qquad \text{bzw.} \qquad q(w_0) = \frac{Q(w_0) - 1}{Q(w_0) + 1}$$

1991 Mathematics Subject Classification: Primary 30C75.

die zugehörige Maximaldilatation. Für die so definierte Ortsfunktion $Q(w_0)$ werden wir Abschätzungen gewinnen. Es wird sich z.B. mit expliziter Abschätzung $Q(w_0) \to \infty$ ergeben, falls w_0 gegen $\mathfrak{C}$ strebt. Das gibt dann Anlaß zu einer a priori-Einschrankung für die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$. Diese besteht aus denjenigen Punkten, in denen $Q(w_0)$ das globale Minimum annimmt.

2. Äquivalente Formen der Fragestellung

Durch die Substitution $W = \sqrt{w - w_0}$ entsteht aus $\mathfrak{C}$ eine zu $W = 0$ zentrisch symmetrische geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}'$. Aus den Q-quasikonformen Spiegelungen an $\mathfrak{C}$ mit $\infty \to w_0$ entstehen zu 0 zentrisch symmetrische Q-quasikonforme Spiegelungen an $\mathfrak{C}'$ mit $\infty \to 0$, und umgekehrt.

Ferner ergibt sich unmittelbar in Analogie zu Sektion 3 in [3] ein einfacher Zusammenhang zwischen den Q-quasikonformen Spiegelungen an $\mathfrak{C}$ mit $\infty \to w_0$ und

(a) den Q-quasikonformen Fortsetzungen einer schlichten konformen Abbildung $w(z)$ von $|z| > 1$ auf's Äußere von $\mathfrak{C}$, wobei $z = \infty$ in $w = \infty$ übergeht und von den Fortsetzungen der Übergang von $z = 0$ in $w = w_0$ gefordert wird;

(b) den Q-quasikonformen Abbildungen des Äußeren des Einheitskreises auf's Innere desselben bei fest gegebener Randabbildung und der Nebenbedingung $\infty \to 0$;

(c) den $\sqrt{Q}$-quasikonformen Abbildungen der Vollebene auf sich, wobei $\mathfrak{C}$ in die Einheitskreislinie übergeht, bei der Nebenbedingung $\infty \to \infty$, $w_0 \to 0$.

Durch (b) ergibt sich insbesondere also ein Zusammenhang mit den grundlegenden Untersuchungen von K. Strebel, E. Reich u.a. Insbesondere ist danach für z.B. analytische $\mathfrak{C}$ die möglichst konforme Spiegelung mit $\infty \to w_0$ eindeutig bestimmt und in bekannter Weise durch quadratische Differentiale beschreibbar. Speziell für z.B. zentrisch symmetrische analytische $\mathfrak{C}$ besteht die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ also aus einem einzigen Punkt, nämlich dem Symmetriepunkt.

3. Abschätzung von $Q(w_0)$ nach unten in Randnähe

Satz 1. *Existiert an $\mathfrak{C}$ eine Q-quasikonforme Spiegelung mit $\infty \to w_0$, dann gilt für den größten bzw. kleinsten Abstand M bzw. m zwischen w_0 und $\mathfrak{C}$ mit der Eulerschen ψ-Funktion die (unscharfe) Abschätzung*

$$(1) \qquad \frac{M}{m} \leq \Phi(Q) \qquad \textit{mit}$$

$$\Phi(Q) = \exp\left\{2\psi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\arccos q\right) - 2\psi\left(\frac{1}{2\pi}\arccos q\right) - \pi\left(\sqrt{Q} - \frac{1}{\sqrt{Q}}\right)\right\}$$
$$< \exp\left\{3\pi + \frac{\pi^2}{6} + \pi\sqrt{Q}\right\} \quad \textit{bei } q = \frac{Q-1}{Q+1}.$$

Ist weiter D noch der Durchmesser von $\mathfrak{C}$, dann gilt für die durch $M/m \geq \exp\{3\pi + (\pi^2/6)\} = 64197,01\ldots$ beschriebene Randzone innerhalb $\mathfrak{C}$

$$Q(w_0) \geq \Big(\frac{1}{\pi}\log\frac{M}{m} - 3 - \frac{\pi}{6}\Big)^2, \tag{2}$$

außerdem noch für $D/m \geq 2\exp\{3\pi + (\pi^2/6)\} = 128394,03\ldots$

$$Q(w_0) \geq \Big(\frac{1}{\pi}\log\frac{D}{m} - \frac{1}{\pi}\log 2 - 3 - \frac{\pi}{6}\Big)^2. \tag{3}$$

Beweis. Es ergibt sich (1) sofort aus [1, Satz 1], nach der Bemerkung a. in Sektion 2. Der zweite Teil der Ungleichung (1) folgt dabei noch aus der für $0 < y \leq x \leq \frac{1}{2}$ gültigen Ungleichung

$$\begin{aligned}\psi(x) - \psi(y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x-y}{(x+k)(y+k)} < x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(x+k)(y+k)}\\ &= x\Big[\frac{1}{xy} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)(y+k)}\Big]\\ &\leq \frac{1}{y} + x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{y} + x\frac{\pi^2}{6} \leq \frac{1}{y} + \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

mit

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\arccos q, \qquad y = \frac{1}{2\pi}\arccos q \geq \frac{1}{2\pi}\sqrt{1-q^2}.$$

Dann entsteht noch (2) aus (1) durch Umstellung nach Q und hieraus (3) bei zusätzlicher Benutzung von $2M \geq D$.

4. Abschätzung von $Q(w)$ nach oben

Mit den Bezeichnungen m und D von Sektion 3 und $Q_{\mathfrak{C}}$ für den Spiegelungskoeffizienten von $\mathfrak{C}$ (= kleinstmögliche Maximaldilatation bei den quasikonformen Spiegelungen an $\mathfrak{C}$ = Minimum von $Q(w)$) gilt der

Satz 2. *Für jedes w_0 innerhalb $\mathfrak{C}$ ist*

$$Q(w_0) \leq Q_{\mathfrak{C}} \cdot \mathfrak{Cotg}^{\,2}\big(\tfrac{1}{4}\pi K'(t)/K(t)\big) \qquad \text{mit } t = 1 - 2\big(m/(64D)\big)^{Q_{\mathfrak{C}}}. \tag{4}$$

Mit K wird hierbei noch—wie üblich—das elliptische Integral erster Gattung bezeichnet.

Beweis. Bekanntlich (vgl. z.B. [3]) gibt es eine $Q_{\mathfrak{C}}$-quasikonforme Abbildung der w-Ebene auf die z-Ebene mit $\infty \to \infty$, die außerhalb $\mathfrak{C}$ konform ist, wobei $\mathfrak{C}$ in $|z| = 1$ übergeht. Sei dabei $z_0 = z(w_0)$. Wir schließen eine nach O. Teichmüller [6] existierende

$$\mathfrak{Cotg}^{\,2}\big(\tfrac{1}{4}\pi K'(|z_0|)/K(|z_0|)\big)\text{-quasikonforme Abbildung } Z(z)$$

des Einheitskreises auf sich an, mit festen Randwerten, wobei z_0 in $Z = 0$ übergeht.

Eine quasikonforme Spiegelung an $\mathfrak{C}$ mit $w_0 \to \infty$ und der der rechten Seite von (4) entsprechenden Dilatationsschranke konstruieren wir jetzt so. Das Innere von $\mathfrak{C}$ wird zuerst $Q_{\mathfrak{C}}$-quasikonform durch $z(w)$ auf $|z| < 1$ aufgebildet. Dann folgt die eben erwähnte Abbildung auf $|Z| < 1$. Sodann Spiegelung am Einheitskreis, letztlich konformer Übergang von $|Z| > 1$ auf's Äußere von $\mathfrak{C}$ durch Umkehrung von $z(w)$. Insgesamt bleiben alle Punkte von $\mathfrak{C}$ fest, und es transformiert tatsächlich $w_0 \to \infty$. Wir erhalten die genannte Dilatationsschranke durch Multiplikation von $Q_{\mathfrak{C}}$ mit der Dilatationsschranke der Teichmüllerschen Abbildung, wenn wir in dem hierfür angegebenen Ausdrucke noch $|z_0|$ abschätzen.

Dazu betrachten wir die Kreislinie k des Radius' 2 mit Mittelpunkt $z_0/|z_0|$. Diese hat ein Bild in der w-Ebene, das innerhalb eines Kreises mit Radius $4 \cdot \frac{1}{2}D = 2D$ liegt, da $w(z)$ außerhalb k schlicht konform ist mit Ableitung $\leq \frac{1}{2}D$ in ∞. Also liegt $w(k)$ innerhalb einer zu $w(z_0/|z_0|)$ konzentrischen Kreisscheibe des Radius' $4D$. Auf die $Q_{\mathfrak{C}}$-quasikonforme Abbildung $w(z)$ des Inneren von k wenden wir nebst dem Schwarzschen Lemma den bekannten Morischen Verzerrungssatz [4] an (nach Ähnlichkeitstransformation):

$$\frac{m}{4D} \leq \frac{1}{4D}\left|w(z_0) - w\Big(\frac{z_0}{|z_0|}\Big)\right| \leq 16\left|\frac{1}{2}\Big(z_0 - \frac{z_0}{|z_0|}\Big)\right|^{1/Q_{\mathfrak{C}}},$$

$$|z_0| \leq 1 - 2\Big(\frac{m}{64D}\Big)^{Q_{\mathfrak{C}}}.$$

Das ist die zum Beweis von (4) noch ausstehende Ungleichung.

Bemerkung. Die somit durch (3) und (4) gewonnenen unteren und oberen Schranken für $Q(w_0)$ sind für kleine Werte m, also in Randnähe, asymptotisch (für festes $\mathfrak{C}$)

$$\frac{1}{\pi^2}\Big(\log\frac{1}{m}\Big)^2 \qquad \text{bzw.} \quad \frac{16}{\pi^4}Q_{\mathfrak{C}}^3\Big(\log\frac{1}{m}\Big)^2. \tag{5}$$

Also ist jedenfalls für $m \to 0$

$$Q(w_0)\Big/\Big(\log\frac{1}{m}\Big)^2 \qquad \text{beschränkt durch } \frac{1}{\pi^2} \text{ bzw. } \frac{16}{\pi^4}Q_{\mathfrak{C}}^3 \tag{6}$$

nach unten bzw. oben. Es ist die Frage, ob für diesen Quotienten in (6) ein Grenzwert existiert (von der Geometrie von $\mathfrak{C}$ abhängig).

5. Spiegelungsmitte bei kreisnahen $\mathfrak{C}$

Wir wollen nun sehen, daß für $\mathfrak{C}$, die einer Kreislinie in einem geeigneten Sinne nahe sind, die Spiegelungsmitte nahe dem Mittelpunkt dieses Kreises ist.

Es sei $\mathfrak{C}$ bezüglich $w = 0$ sternförmig und in dem Sinne kreisnahe, daß $\mathfrak{C}$ liegt in

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < |w| < 1+\varepsilon, \tag{7}$$

ferner stückweis glatt (d.h. endlich viele Ausnahmepunkte), wobei der Winkel $\alpha(\varphi)$ zwischen dem Strahl $\arg w = \varphi = \text{const}$ und der (in den Ausnahmepunkten einseitigen) Tangente an $\mathfrak{C}$ im betreffenden Schnittpunkte stets erfüllt

$$|\cos\alpha(\varphi)| < \delta \tag{8}$$

mit kleinem ε und δ. Ist $r\ (= |w|) = r(\varphi)$ Darstellung von $\mathfrak{C}$ in Polarkoordinaten, dann liefert nach einer bekannten Ahlforsschen Konstruktion $w^*(w) = r^2(\varphi)/\overline{w}$ eine quasikonforme Spiegelung an $\mathfrak{C}$ mit $w^*(\infty) = 0$ und einer Maximaldilatation $\leq (1+\delta)/(1-\delta)$. Dadurch ist $q(0) \leq \delta$, also erst recht für einen Punkt w_0 der Spiegelungsmitte

$$q(w_0) \leq \delta. \tag{9}$$

Nun gilt weiter nach (1)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon} + |w_0| &\leq (1+\varepsilon-|w_0|)\Phi\big(Q(w_0)\big), \\ |w_0| &\leq \frac{\Phi-1}{\Phi+1} + \varepsilon\Big(1 - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)(\Phi+1)}\Big) < \tfrac{1}{2}(\Phi-1)+\varepsilon. \end{aligned} \tag{10}$$

Damit haben wir den

Satz 3. *Ist $\mathfrak{C}$ nahe zum Einheitskreis $|w| = 1$ im Sinne von (7) und (8), dann liegen sämtliche Punkte w_0 der Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ in der durch*

$$|w_0| \leq \frac{1}{2}\Big(\Phi\Big(\frac{1+\delta}{1-\delta}\Big) - 1\Big) + \varepsilon \tag{11}$$

beschriebenen Umgebung von 0. Diese Umgebung von 0 ergibt sich für kleine ε und δ zu

$$|w_0| \leq \frac{8}{\pi}G\delta + \varepsilon + O(\delta^2) \tag{12}$$

mit $G = 0,915\ldots$ (Catalansche Konstante).

Diese Nähe der Spiegelungsmitte zu 0 folgt nicht, wenn (8) (mit kleinem δ) weggelassen wird, wie unten das Beispiel einer linear transformierter Ellipse zeigt.

6. Beispiele

(a) $\mathfrak{C}$ = *Kreislinie.* Wir können $\mathfrak{C}$ als $|w| = 1$ annehmen. Eine Spiegelung an $\mathfrak{C}$ mit $\infty \to w_0$ induziert sofort eine quasikonforme Abbildung der Einheitskreisscheibe auf sich mit $0 \to w_0$ bei festen Randwerten. Die zugehörige möglichst konforme Abbildung wurde von O. Teichmüller [6] (dort berühmter Fehler: auf S. 343 ist unterhalb der Mitte K durch $\sqrt{K}$ zu ersetzen), so daß wir erhalten (vgl. [4] zum Modul des "Teichmüllerschen Extremalgebietes")

$$Q(w) = \mathfrak{Cotg}^{\,2}\big(\tfrac{1}{4}\pi K'(|w|)/K(|w|)\big) \qquad \text{für } |w| < 1. \tag{13}$$

Dies ist das einzige Beispiel $\mathfrak{C}$, bei dem $Q(w)$ für alle Punkte w innerhalb $\mathfrak{C}$ bekannt ist.

Es gilt in Randnähe für $|w| \to 1$

$$Q(w) \sim \frac{16}{\pi^4}\big(\log(1-|w|)\big)^2 \tag{14}$$

(der Quotient beider Seiten strebt gegen 1).

Natürlich ist der einzelne Punkt $w = 0$ die Spiegelungsmitte dieses $\mathfrak{C}$.

(b) $\mathfrak{C}$ = *Ellipse.* Ist diese $a^{-2}u^2 + b^{-2}v^2 = 1$ $(a > b > 0)$ bei $w = u + iv$, dann gilt

$$Q(0) = a/b. \tag{15}$$

Denn nach einer Ähnlichkeitstransformation kann man annehmen, daß diese Ellipse durch

$$w = z + \frac{\kappa}{z}, \qquad 0 < \kappa < 1, \tag{16a}$$

aus $|z| = 1$ entsteht. Und diese Abbildung von $|z| \geq 1$ ist durch die Affinität

$$w^* = z + \kappa\bar{z}, \qquad \text{Umkehrung } z = \frac{w^* - \kappa\overline{w^*}}{1-\kappa^2}, \tag{16b}$$

bekanntlich nach $|z| \leq 1$ möglichst konform fortsetzbar (vgl. z.B. [3]), mit der konstanten Dilatation $Q = a/b$. Das gibt Anlaß zur (eindeutig bestimmten) möglichst konformen Spiegelung an $\mathfrak{C}$ mit dieser Dilatation:

$$w = \frac{1-\kappa^2}{\overline{w^*} - \kappa w^*} + \kappa\frac{\overline{w^*} - \kappa w^*}{1-\kappa^2} \tag{17}$$

(Abbildung des Inneren der Ellipse $\mathfrak{C}$ auf's Äußere). Insbesondere ist diese möglichst konforme Spiegelung eine elementare Funktion (in [3, Mitte von S. 102] Irrtum).

Ferner ist z.B. nach dem Anfang von Sektion 2

$$(18) \qquad Q\left(\pm\sqrt{a^2-b^2}\,\right) = \frac{a}{b} + \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} \qquad \text{in den Brennpunkten.}$$

Denn durch $W = \sqrt{w - w_0}$ mit $w_0 = -\sqrt{a^2-b^2}$ entsteht aus unserer Ellipse wieder eine Ellipse mit $W = 0$ als Mittelpunkt, jetzt mit den Halbachsen $\sqrt{a \mp w_0}$.

Weitere Werte von $Q(w_0)$ sind noch nicht bekannt.

Die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ ist natürlich der einzelne Symmetriepunkt $w = 0$.

(c) $\mathfrak{C}$ = *linear transformierte Ellipse.* Und zwar entstehe $\mathfrak{C}$ aus der Ellipse mit Scheiteln in $\pm(1+\kappa)$, $\pm(1-\kappa)$ bei $0 < \kappa < 1$ (vgl. oben (b)) durch die lineare Transformation, bei der übergeht

$$\pm(1+\kappa) \to \pm 1, \qquad w_1 \to \infty \qquad (w_1 > 1+\kappa).$$

$\mathfrak{C}$ hängt also von dem Parameter w_1 ab. Diesen lassen wir nun gegen $1+\kappa$ streben. $\mathfrak{C}$ liegt immer innerhalb des Einheitskreises, diesen in ± 1 berührend, und für w_1 nahe $1+\kappa$ schmiegt sich $\mathfrak{C}$ dem Einheitskreis immer mehr an (man verfolge nämlich bei dieser linearen Transformation einen die Ellipse in $1+\kappa$ von innen berührenden Kreis). Man errechnet, daß der linear transformierte Spiegelungspunkt von w_1 bei (17) (also die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$) gegen $-\kappa$ konvergiert, wenn w_1 gegen $1+\kappa+0$ strebt. Dieser Punkt $-\kappa$ ist nun noch beliebig nahe bei -1 einzurichten, wenn die Ausgangsellipse hinreichend flach gewählt wird (nämlich mit $\kappa \approx 1$).

Also: $\mathfrak{C}$ läßt sich so einrichten, daß sich $\mathfrak{C}$ in einem konzentrischen Kreisring befindet, dessen Radienverhältnis beliebig nahe bei 1 ist, wobei die Spiegelungsmitte beliebig exzentrisch, d.h. beliebig nahe bei diesem Kreisring liegt.

Man überlegt leicht, daß diese Annäherung von $\mathfrak{C}$ an eine Kreislinie aber nicht so erfolgt, daß auch eine Annäherung bei der Tangente erfolgt; wie es nach Satz 3 sein muß.

(d) $\mathfrak{C}$ = *Quadratlinie.* Wenn die Seitenlänge 1 ist und $\mathfrak{C}$ zu 0 konzentrisch liegt, gibt es nach [2], [3] eine möglichst konforme 3-quasikonforme Spiegelung an $\mathfrak{C}$, die in der durch $|w| < 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ charakterisierten Kreisscheibe $\mathfrak{K}$ konform ist. Nun gibt es nach [6] (vgl. auch oben unter (a)) eine 3-quasikonforme Abbildung von $\mathfrak{K}$ auf sich mit festen Randwerten, bei der 0 in $0,24249\ldots$ übergeht. Also besteht die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ mindestens aus den Punkten von $|w| \leq 0,24249\ldots$.

Andererseits ergibt sich für $Q = 3$ aus (1)

$$m \geq \frac{D}{2\Phi(Q)} = \frac{D}{32} = \frac{\sqrt{2}}{32},$$

so daß die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ vollständig in dem zu $\mathfrak{C}$ konzentrischen und homothetischen Quadrat liegen muß, das aus $\mathfrak{C}$ durch ähnliche Verkleinerung mit dem Faktor $1 - \frac{1}{16}\sqrt{2} = 0,9116\ldots$ entsteht.

Diese Aussagen lassen sich durch aufwendigere feinere Betrachtungen leicht verbessern; ähnlich beim nächsten Beispiel.

Dieses Beispiel des Quadrates $\mathfrak{C}$ zeigt insbesondere auch, daß die Funktion $Q(w)$ nicht immer reell-analytisch ist.

(e) $\mathfrak{C} =$ *gleichseitiges Dreieck.* Wenn die Seitenlänge 1 ist und $\mathfrak{C}$ zu 0 konzentrisch liegt, existiert nach [2], [3] eine 5-quasikonforme Spiegelung an $\mathfrak{C}$, und es ergibt sich analog wie in (d), daß die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ mindestens aus den Punkten w mit $|w| \leq 0,14753\ldots$ besteht. Andererseits ergibt sich für $Q = 5$ aus (1)

$$m \geq \frac{D}{2\Phi(Q)} = D \cdot 0,0060299\ldots = 0,0060299\ldots,$$

so daß die Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ vollständig in dem zu $\mathfrak{C}$ konzentrischen und homothetischen gleichseitigen Dreieck liegen muß, das aus $\mathfrak{C}$ durch ähnliche Verkleinerung mit dem Faktor $0,9791119\ldots$ entsteht.

(f) $\mathfrak{C} =$ *reguläres Kreisbogen-n-Eck.* Wenn die Ecken z.B. die n-ten Einheitswurzeln sind, und die Innen- oder Außenwinkel zwischen den in den Ecken zusammenstoßenden Kreisbögen $= \alpha\pi$ sind, existiert nach [2] eine quasikonforme Spiegelung mit der Dilatationsschranke

$$(1 + |1-\alpha|)/(1 - |1-\alpha|). \tag{19}$$

Die zugehörige Konstruktion dieser Spiegelung in [2] ist dabei konform in einer zu 0 konzentrischen Kreisscheibe $\mathfrak{K}$, deren Radius nach 1 strebt, wenn $n \to \infty$ bei festem α. Wenn nun noch α hinreichend nahe bei 1 liegt, liegt auch die Dilatationsschranke (19) nahe bei 1, so daß bei Festhaltung der Randpunkte von $\mathfrak{K}$ der Nullpunkt beliebig nahe zum Rand von $\mathfrak{K}$ geschoben werden kann unter Wahrung der Dilatationsschranke. Also: Wenn n hinreichend groß und α hinreichend nahe bei 1, dann macht in diesem Beispiel die Spiegelungsmitte fast das ganze Innere von $\mathfrak{C}$ aus, d.h. nicht zur Spiegelungsmitte gehören nur Punkte eines beliebig schmalen inneren Randstreifens von $\mathfrak{C}$.

7. Zusatzbemerkungen

(a) Aus Kompaktheitsgründen bilden die Punkte der Spiegelungsmitte von $\mathfrak{C}$ immer eine abgeschlossene Menge. Was läßt sich Genaueres sagen?

(b) Man kann die ganze Problematik so verallgemeinern. Sei $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Punktmenge der Ebene, an der quasikonform gespiegelt werden kann, d.h. für die eine orientierungsumkehrende quasikonforme Abbildung der Vollebene auf sich existiert, bei der $\mathfrak{M}$ punktweis festbleibt. (Eine vollständige Charakterisierung dieser Mengen existiert noch nicht; z.B. gehören alle endlichen Punktmengen dazu.) Wie steht es hier mit der (entsprechend zu definierenden) Spiegelungsmitte und der Funktion $Q(w)$? Wenn z.B. $\mathfrak{M}$ aus n Punkten besteht, gibt es sicher einen zu Satz 3 analogen Satz, falls diese Punkte annähernd auf einer Kreislinie liegen (und die Spiegelungen in entsprechender Homotopieklasse betrachtet werden). Die Spiegelungsmitte liegt übrigens nicht immer in der konvexen Hülle der n Punkte, kann sogar beliebig weit weg von diesen liegen. Triviales Beispiel ist $n = 3$. Dann ist die Spiegelungsmitte der Mittelpunkt des durch die drei Punkte verlaufenden Kreises.

Literatur

[1] Kühnau, R.: Eine Verschärfung des Koebeschen Viertelsatzes für quasikonform fortsetzbare Abbildungen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1, 1975, 77–83.

[2] Kühnau, R.: Zur Berechnung der Fredholmschen Eigenwerte ebener Kurven. - Z. Angew. Math. Mech. 66, 1986, 193–200.

[3] Kühnau, R.: Möglichst konforme Spiegelung an einer Jordankurve. - Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 90, 1988, 90–109.

[4] Lehto, O., und K.I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. - Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1965.

[5] Strebel, K.: On the existence of extremal Teichmueller mappings. - J. Analyse Math. 30, 1976, 464–480.

[6] Teichmüller, O.: Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung. - Deutsche Math. 7, 1944, 336–343 (vgl. auch die "Gesammelten Abhandlungen", Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1982).

Eingegangen am 29. Juni 1994