ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 41 (2005), 253 – 263

SUR L'EXISTENCE DES CORPS BIQUADRATIQUES K DONT LE GROUPE DE GALOIS DU DEUXIÈME 2-CORPS DE CLASSES DE HILBERT PAR RAPPORT À K EST SEMI-DIÉDRAL

ABDELMALEK AZIZI ET ALI MOUHIB

Abstract. Let K be a biquadratic field, $K_2^{(1)}$ be the Hilbert 2-class field of K and $K_2^{(2)}$ be the Hilbert 2-class field of $K_2^{(1)}$. Our goal is to prove that there exists a biquadratic field K such that $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(1)}/K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ and the group $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ is semi-dihedral.

Résumé. Soient K un corps biquadratique, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$. Notre but est de prouver qu'il existe des corps biquadratiques réels K tels que le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(1)}/K)$ est de type $(2,2)$ et le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est semi-diédral.

1. Introduction

Soient G un 2-groupe, G' le groupe des commutateurs de G, K un corps de nombres, $K^{(*)}$ le corps de genres de K, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$. On suppose que G/G' est de type $(2,2)$; alors d'après [Ki-76], le groupe G a l'une des quatres formes suivantes: abélien, quaternionique, diédral ou semi-diédral. A. Derhem, dans [De-92] et E. Benjamin, C. Snyder dans [Be-Sn-95] ont donné des exemples de corps quadratiques réels K dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$ et le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est abélien, quaternionique, diédral ou semi-diédral. Le problème qu'on veut aborder dans cet article est le suivant : Pour une forme donnée du groupe G, existe-t-il un corps biquadratique K (particulièrement réel) dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$ et le deuxième goupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ vérifie la forme donnée du groupe G? Soit K un corps biquadratique. On suppose que le 2-groupe de classes de K est de type $(2,2)$, c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(1)}/K)$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11R27, 11R37.
Key words and phrases: corps biquadratiques, groupe de classes, corps de classes de Hilbert, capitulation, groupe des unit.
Received June 25, 2003, revised June 2005.

est de type $(2,2)$. On a que $K^{(*)}$ est différent de K; car sinon $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(1)}/K)$ serait cyclique, donc $[K^{(*)}:K]=2$ ou $K^{(*)}=K_2^{(1)}$. Dans [Az-Mo-2], nous avons démontré que dans le cas où $[K^{(*)}:K]=2$, le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ ne peut jamais être semi-diédral. D'autre part, dans [Az-Mo-3], nous avons donné des exemples de corps biquadratiques réels K dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$ et le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est abélien, quaternionique ou diédral. Ainsi, ce qui reste de notre problème est :
$(*)$ "Existe t-il un corps biquadratique réel K tel que son 2-groupe de classes est de type $(2,2)$, $K^{(*)}=K_2^{(1)}$ et le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est semi-diédral?"

Pour aborder ce problème, nous allons rappeler quelques résultats concernant le problème de la capitulation dans un corps de nombres dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$.

2. Cas où le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$

Proposition 1. *Soient K un corps de nombres dont le 2-groupe de classes est de type $(2,2)$, K_1, K_2 et K_3 les trois extensions quadratiques non ramifiées de K. Alors on a l'une des propriétés suivantes :*

(1) *Les 2-groupes de classes des corps K_1, K_2 et K_3 sont cycliques.*
(2) *Le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique et les 2-groupes de classes de K_2 et de K_3 sont de type $(2,2)$.*

Preuve. Voir [Ki-76]. □

On garde les hypothèses de la proposition précédente. Pour $i\in\{1,2,3\}$, on dit que K_i est de type (A) s'il existe une 2-classe non triviale de K qui capitule dans K_i et cette classe est norme d'une classe de K_i. Sinon, on dit que K_i est de type (B). On garde les notations de la proposition précédente

Proposition 2. *Soient $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$. On suppose que le 2-groupe de classes de K est de type $(2,2)$. Alors on a :*

(1) *Si les 2-groupes de classes des corps K_1, K_2 et K_3 sont cycliques, alors le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est abélien ou quaternionique d'ordre 8.*
(2) *Si le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique et les 2-groupes de classes de K_2 et de K_3 sont de type $(2,2)$, alors une seule 2-classe non triviale de K capitule dans K_2 (resp. K_3) et le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est diédral, quaternionique ou semi-diédral. Plus précisément, on a :*
   (i) $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ *est diédral si et seulement si toutes les 2-classes de K capitulent dans K_1.*
   (ii) $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ *est quaternionique si et seulement si une seule 2-classe non triviale de K capitule dans K_1 et K_1 est de type (A)*
   (iii) $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ *est semi-diédral si et seulement si une seule 2-classe non triviale de K capitule dans K_1 et K_1 est de type (B).*

Preuve. Voir [Ki-76]. □

3. Capitulation des 2-classes d'idéaux dans un cas spécial

Dans toute la suite, K désigne un corps biquadratique, Q_K est l'indice des unités de K, $h(m)$ la 2-partie du nombre de classes de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$ et ε_m l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{m})$. Pour un corps quelconque F, O_F désigne l'anneau des entiers de F et $h(F)$ la 2-partie du nombre de classes de F. On suppose dans tout ce qui suit que p, p' et q sont des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, $(\frac{2}{p}) = (\frac{2}{p'}) = (\frac{q}{p'}) = (\frac{2}{q}) = -1, (\frac{p}{p'}) = (\frac{q}{p}) = 1$ et $\mathcal{N}_{Q(\sqrt{pp'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. Pour satisfaire les conditions du problème $(*)$ précité, on choisit $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$.

Dans la suite, pour étudier le problème de capitulation des 2-classes d'idéaux de K, on va suivre les étapes suivantes :

(1) On démontre que la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K ne s'arrête pas en $K_2^{(1)}$.
(2) On détermine les structures des 2-groupes de classes des trois sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$.
(3) On détermine le nombre des 2-classes de K qui capitulent dans la sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$ dont le 2-groupe de classes est cyclique.
(4) On détermine les classes engendrant le 2-groupe de classes de K.
(5) On détermine les 2-classes de K qui capitulent dans la sous-extension propre de $K_2^{(1)}/K$ dont le 2-groupe de classes est cyclique et on en déduit la stucture du groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$.

On commence par montrer que le 2-groupe de classes de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$ est de type $(2,2)$.

Proposition 3. *Soient p, p' et q des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $\mathcal{N}_{Q(\sqrt{pp'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. Alors le 2-groupe de classes de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$ est de type $(2,2)$ et $K_2^{(1)} = K^{(*)} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{q}, \sqrt{p})$.*

Preuve. D'après [Ka-73] et [Ka-76], on a $h(2p') \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ et $h(qp) \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$, et d'après [Be-Sn-95], on a $h(2pp'q) \equiv 4\ (\mathrm{mod}\ 8)$. Montrons que l'indice des unités Q_K de K est égal à 1. On a $(\frac{2}{p'}) = -1$; alors d'après [Ka-73], $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{2p'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{2p'}) = -1$. Il s'ensuit que $\varepsilon_{2p'}$ n'est pas un carré dans K.

Soit $\varepsilon_{pq} = x + y\sqrt{pq}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{pq})$ où x et y sont deux entiers non nuls. Comme $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{pq})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pq}) = 1$, alors $x^2 - pqy^2 = 1$, et par suite $(x-1)(x+1) = pqy^2$. Or $(\frac{q}{p}) = -(\frac{2}{p}) = 1$; donc il existe deux entiers y_1 et y_2 tels que

$$\begin{cases} x - 1 = 2qy_1^2 & \text{où } \ 2y_1y_2 = y\,, \\ x + 1 = 2py_2^2\,. \end{cases}$$

Si on pose $Z = y_1\sqrt{2q} + y_2\sqrt{2p}$, alors $Z^2 = 2\varepsilon_{pq}$ et par suite

$$\sqrt{\varepsilon_{pq}} = y_1\sqrt{q} + y_2\sqrt{p}\,. \tag{1}$$

Soit $\varepsilon_{2pp'q} = z + t\sqrt{2pp'q}$ l'unité fondamentale de $\mathbf{Q}(\sqrt{2pp'q})$ où z et t sont deux entiers non nuls. Comme $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{2p'pq})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{2p'pq}) = 1$, alors on a $(z-1)(z+1) =$

$2pp'qt^2$ et comme $(\frac{p'}{p}) = (\frac{q}{p}) = -(\frac{q}{p'}) = -(\frac{2}{p}) = -(\frac{2}{p'}) = 1$, alors il existe deux entiers t_1 et t_2 tels que:

$$\begin{cases} z-1 = 2p't_1^2 \quad \text{où} \quad t_1t_2 = t\,, \\ z+1 = pqt_2^2\,. \end{cases}$$

Si on pose $W = t_1\sqrt{2p'} + t_2\sqrt{pq}$, alors $W^2 = 2\varepsilon_{2pp'q}$ et par suite

$$\sqrt{\varepsilon_{2pp'q}} = t_1\sqrt{p'} + \frac{t_2}{2}\sqrt{2pq}\,. \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire que les unités ε_{qp}, $\varepsilon_{2pp'q}$ et $\varepsilon_{qp}\varepsilon_{2pp'q}$ ne sont pas des carrés dans K. Par suite, l'indice des unités de K est égal à 1. D'autre part, d'après [Wa-66], on a $h(K) = \frac{Q_K}{4}h(2p')h(pq)h(2pp'q)$; par suite $h(K) \equiv 4 \pmod 8$. Or l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{q}, \sqrt{p})/K$ est abélienne non ramifiée de type $(2,2)$. Donc le 2-groupe de classes de K est de type $(2,2)$ et le 2-corps de classes de Hilbert de K est $K_2^{(1)} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{q}, \sqrt{p})$, qui n'est rien autre que le corps de genres de K. □

Dans ce qui suit, nous démontrons que la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K ne s'arrête pas en $K_2^{(1)}$, c'est-à-dire le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ n'est pas abélien.

3.1. **Tour des 2-corps de classes de Hilbert de K.** On sait d'après la théorie des groupes (voir [Ta-37]) que la tour des 2-corps de classes de Hilbert de K ne dépasse pas $K_2^{(2)}$. Pour démontrer que $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$, on aura besoin d'un résultat de la théorie des corps de classes.

Proposition 4. *Soient F/S une extension finie de corps de nombres et $S^{(1)}$ le corps de classes de Hilbert de S. On suppose que $F \cap S^{(1)} = S$. Alors le nombre de classes de S divise celui de F.*

Preuve. Voir [Ja-73], page 194. □

Corollaire 1. *Soit F/S une extension finie de corps de nombres. On suppose qu'il existe un premier de S qui se ramifie totalement dans F. Alors le nombre de classes de S divise celui de F.*

Preuve. Soit $S^{(1)}$ le corps de classes de Hilbert de S. On a $F \cap S^{(1)} = S$, car sinon $F \cap S^{(1)}$ contient strictement S et comme il existe un premier de S qui se ramifie totalement dans F, alors il se ramifie totalement dans $F \cap S^{(1)}$. Ce qui est contraire au fait que $F \cap S^{(1)}/S$ est non ramifiée. □

Proposition 5. *Soient p, p' et q des premiers différents tels que $p \equiv p' \equiv -q \equiv 1 \pmod 4$, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$, $K_2^{(1)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de K et $K_2^{(2)}$ le 2-corps de classes de Hilbert de $K_2^{(1)}$. On suppose que $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p'}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = 1$ et $\mathcal{N}_{Q(\sqrt{pp'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. Alors le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ n'est jamais abélien.*

Preuve. Soit $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pp'}, \sqrt{pq})$. On a que K_1/K est une sous-extension abélienne non ramifiée de $K_2^{(1)}/K$. D'autre part, on a que 2 se ramifie totalement dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$ et ne se ramifie pas dans $\mathbf{Q}(\sqrt{pp'})$. Il s'ensuit qu'il existe un premier de $\mathbf{Q}(\sqrt{pp'})$ qui se ramifie totalement dans K_1. Ainsi, d'après le corollaire 1, $h(pp')$ divise le nombre de classes de K_1. Comme $(\frac{p}{p'}) = 1$ et $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{pp'})}(\varepsilon_{pp'}) = -1$, alors d'après [Kuč-95], on a que 4 divise $h(pp')$. Par conséquent, 4 divise le nombre de classes de K_1 et donc $K_2^{(1)} \neq K_2^{(2)}$. $\square$

3.2. **Cas des sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$.** Dans ce paragraphe, nous déterminons les structures des 2-groupes de classes des trois extensions intermédiaires de $K_2^{(1)}/K$. Ces trois extensions sont $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq}, \sqrt{pp'})$, $K_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{q}, \sqrt{p})$ et $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{pq})$.

Lemme 1. *On suppose que* $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = 1$. *Alors le nombre de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'})$ $\big($*resp.* $\mathbf{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p})\big)$ *est impair et* $\left\{\varepsilon_2, \varepsilon_{p'}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_{p'}\varepsilon_{2p'}}\right\}$ $\big($*resp.* $\{\varepsilon_q, \varepsilon_p, \sqrt{\varepsilon_{pq}}\}\big)$ *est un système fondamental d'unités de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'})$ $\big($*resp.* $\mathbf{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p})\big)$.

Preuve. Comme $(\frac{2}{p'}) = -1$, alors d'après [Kuč-95], $h(2p') \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$ et le nombre de classes de $L = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'})$ est impair. On a $h(2) = h(p) = 1$. Alors d'après [Wa-66], on a $h(L) = \frac{Q_L}{2}$ où Q_L est l'indice des unités de L. Puisque $h(L)$ est impair, alors $Q_L = 2$. Comme ε_2 et $\varepsilon_{p'}$ ne sont pas des carrés dans L (car $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{2})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_2) = \mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{p'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{p'}) = -1$) et $Q_L = 2$, alors, d'après [Kub-56], $\varepsilon_2\varepsilon_{p'}\varepsilon_{2p'}$ est un carré dans L et donc $\{\varepsilon_2, \varepsilon_{p'}, \sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_{p'}\varepsilon_{2p'}}\}$ est un système fondamental d'unités de L.

D'autre part, comme $\left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = 1$, alors d'après [Az-Mo-1], le nombre de classes de $M = \mathbf{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p})$ est impair. On vérifie facilement qu'il existe deux nombres rationnels a et b tels que $\sqrt{\varepsilon_q} = a\sqrt{2} + b\sqrt{2q}$ et par suite ε_q n'est pas un carré dans M. Comme $(\frac{q}{p}) = -(\frac{2}{p'}) = 1$, alors il existe deux nombres rationels c et d tels que $\sqrt{\varepsilon_{pq}} = c\sqrt{p} + d\sqrt{q}$; par suite $\sqrt{\varepsilon_{pq}} \in M$. Or on sait que ε_p n'est pas un carré dans M; donc $\{\varepsilon_q, \varepsilon_p, \sqrt{\varepsilon_{pq}}\}$ est un système fondamental d'unités de M. $\square$

Dans ce qui suit, on aura besoin de certains résultats sur le symbole du reste normique; pour plus de détails sur ce symbole, voir par exemple [Ha-30].

Théorème 1. *On garde les notations précédentes. Alors le* 2*-groupe de classes de* $K_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{q}, \sqrt{p})$ *(resp.* $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{qp})$*) n'est pas cyclique.*

Preuve. (1) Montrons que le 2-groupe de classes de K_2 n'est pas cyclique. On a $K_2 = M(\sqrt{2p'})$ où $M = \mathbf{Q}(\sqrt{q}, \sqrt{p})$. D'après le lemme 1, le nombre de classes de M est impair et $\{\varepsilon_q, \varepsilon_p, \sqrt{\varepsilon_{pq}}\}$ est un système fondamental d'unités de M. D'après [Gr-73], le rang du 2-groupe de classes C_{2,K_2} de K_2 est donné par la formule

$$\mathrm{rang}(C_{2,K_2}) = r - 1 - e\,,$$

où r est le nombre des premiers de M ramifiés dans K_2 et e l'entier naturel défini par $2^e = [E_M : E_M \cap \mathcal{N}_{K_2/M}(K_2^*)]$, E_M étant le groupe des unités de M et $\mathcal{N}_{K_2/M}$ étant la norme relative à l'extension K_2/M. On vérifie facilement que $r = 3$ et par suite $\mathrm{rang}(C_{2,K_2}) = 2 - e$. Dans la suite nous démontrons que $e = 0$. Ce qui revient à montrer que $-1, \varepsilon_p, \varepsilon_q$ et $\sqrt{\varepsilon_{pq}}$ sont des normes dans l'extension K_2/M.

Comme $\left(\frac{p}{p'}\right)=1$, alors on a $p'O_{\mathbf{Q}(\sqrt{p})}=\mathcal{P}'_1\mathcal{P}'_2$ où $\mathcal{P}'_1$ et $\mathcal{P}'_2$ sont deux idéaux premiers différents de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$. Comme $\left(\frac{q}{p'}\right)=-1$, alors pour $i\in\{1,2\}$, on a $\mathcal{P}'_iO_M=\mathcal{P}_i$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers différents de M. Comme $\left(\frac{2}{p}\right)=-1$, alors on a $2O_{\mathbf{Q}(\sqrt{p})}=\mathcal{Q}'^2$ où $\mathcal{Q}'$ est un idéal premier de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ et $\mathcal{Q}'O_M=\mathcal{Q}^2$ où $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de M. Ainsi les idéaux premiers de M qui se ramifient dans K_2 sont $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{Q}$. Or une unité u de M est norme dans l'extension K_2/M si et seulement si la valeur du symbole du reste normique $\left(\frac{u,\,2p'}{\mathcal{P}}\right)=1$ pour tout premier $\mathcal{P}$ de M ramifié dans K_2. Montrons que -1 est norme dans l'extension K_2/M. Pour $i\in\{1,2\}$, on a $\left(\frac{-1,\,2p'}{\mathcal{P}_i}\right)=\left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbf{Q}(\sqrt{p})}(-1),\,2p'}{\mathcal{P}'_i}\right)$, par suite on a $\left(\frac{-1,\,2p'}{\mathcal{P}_i}\right)=\left(\frac{1,\,2p'}{\mathcal{P}'_i}\right)=1$. On a $\left(\frac{-1,\,2p'}{\mathcal{Q}}\right)=\left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbf{Q}(\sqrt{p})}(-1),\,2p'}{\mathcal{Q}'}\right)=\left(\frac{-1,\,2p'}{\mathcal{Q}'}\right)=1$; donc -1 est norme dans l'extension K_2/M. Montrons que ε_p est norme dans K_2/M. On a

$$\left(\frac{\varepsilon_p,\ 2p'}{\mathcal{P}_i}\right)=\left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbf{Q}(\sqrt{p})}(\varepsilon_p),\ 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right)=\left(\frac{\varepsilon_p^2,\ 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right)=1$$

et on a

$$\left(\frac{\varepsilon_p,\ 2p'}{\mathcal{Q}}\right)=\left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbf{Q}(\sqrt{p})}(\varepsilon_p),\ 2p'}{\mathcal{Q}'}\right)=\left(\frac{\varepsilon_p^2,\ 2p'}{\mathcal{Q}'}\right)=1\,.$$

Donc ε_p est norme dans l'extension K_2/M. Il reste à montrer que $\sqrt{\varepsilon_{pq}}$ est norme dans K_2/M. On a

$$\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{pq}},\ 2p'}{\mathcal{P}_i}\right)=\left(\frac{\mathcal{N}_{M/\mathbf{Q}(\sqrt{p})}(\sqrt{\varepsilon_{pq}}),\ 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right)=\left(\frac{\pm1,\ 2p'}{\mathcal{P}'_i}\right)=1\,.$$

De plus $\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{pq}},\,2p'}{\mathcal{Q}}\right)=\left(\frac{\pm1,\,2p'}{\mathcal{Q}'}\right)=1$. Ainsi toutes les unités de M sont normes dans l'extension K_2/M et par suite $e=0$ et donc C_{2,K_2} n'est pas cyclique.

(2) Montrons que le 2-groupe de classes de K_3 n'est pas cyclique. On a $K_3=L(\sqrt{pq})$ où $L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{p'})$. D'après le Lemme 1, le nombre de classes de L est impair et $\{\varepsilon_2,\varepsilon_{p'},\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_{p'}\varepsilon_{2p'}}\}$ est un système fondamental d'unités de L. On note par C_{2,K_3}, le 2-groupe de classes de K_3; alors $\mathrm{rang}(C_{2,K_3})=r-1-e$ où r et e sont les entiers naturels définis précédemment (ici dans l'extension K_3/L). On vérifie facilement qu'il existe deux premiers de L au-dessus de p qui se ramifient dans K_3, deux premiers de L au-dessus de q qui se ramifient dans K_3 et un premier de L au-dessus de 2 qui se ramifie dans K_3; donc $r=5$ et par suite $\mathrm{rang}(C_{2,K_3})=4-e$. L'entier naturel e est compris entre 0 et 4 et la détermination de l'entier e revient à chercher si les unités $\pm\varepsilon_2^{i_1}\varepsilon_{p'}^{i_2}\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_{p'}\varepsilon_{2p'}}^{i_3}$ où $i_1,\,i_2,\,i_3\in\{1,2\}$ sont des normes ou non dans l'extension K_3/L. Comme dans (1), on démontre que -1 est norme dans l'extension K_3/L et par suite $e<4$. De plus, soit $\mathcal{P}$ un idéal premier de L qui se ramifie dans K_3. Si $\mathcal{P}$ est au-dessus de p, alors on trouve que $\left(\frac{\varepsilon_2,\,pq}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{\varepsilon_{p'},\,pq}{\mathcal{P}}\right)=1$; si $\mathcal{P}$ est au-dessus de q, alors on a $\left(\frac{\varepsilon_2,\,pq}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{\varepsilon_{p'},\,pq}{\mathcal{P}}\right)=-1$ et si $\mathcal{P}$ est au-dessus de 2, alors on a $\left(\frac{\varepsilon_2,\,pq}{\mathcal{P}}\right)=\left(\frac{\varepsilon_{p'},\,pq}{\mathcal{P}}\right)=1$. On tire ainsi que pour tout premier $\mathcal{P}$ de L qui se ramifie dans K_3, on a $\left(\frac{\varepsilon_2\varepsilon_{p'},\,pq}{\mathcal{P}}\right)=1$. Par suite

$\varepsilon_2\varepsilon_{p'}$ est norme dans l'extension K_3/L et donc, $e < 3$ et le 2-groupe de classes de K_3 n'est pas cyclique. □

Corollaire 2. *On garde les notations du théorème précédent. Alors on a :*

(1) *Le 2-groupe de classes de* $K_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{q}, \sqrt{p})$ $\big($*resp.* $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{qp})\big)$ *est de type* $(2,2)$ *et le* 2*-groupe de classes de* $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pp'}, \sqrt{qp})$ *est cyclique.*

(2) *Une seule* 2*-classe non triviale de* K *capitule dans* K_2 *(resp.* K_3*).*

Preuve. (1) On a que K a un 2-groupe de classes de type $(2,2)$ et que K_1, K_2 et K_3 sont les trois sous-extensions propres de $K_2^{(1)}/K$. D'après le théorème 1, les 2-groupes de classes de K_2 et K_3 ne sont pas cycliques, par suite, d'après la proposition 1, on a le résultat.
(2) Le résultat découle de la Proposition 2. □

3.3. **Nombre des classes de K qui capitulent dans K_1.** On garde les mêmes notations du paragraphe précédent. On veut déterminer le nombre de classes de K qui capitulent dans K_1. D'après [H-S-82], le nombre de classes de K qui capitulent dans K_1 est égal à $[K_1 : K][E_K : \mathcal{N}_{K_1/K}(E_{K_1})]$ où E_K (resp. E_{K_1}) est le groupe des unités de K (resp. K_1). On sait que $\{\varepsilon_{2p'}, \varepsilon_{qp}, \varepsilon_{2qpp'}\}$ est un système fondamental d'unités de K; alors il faut chercher quand ces unités sont normes d'unités de K_1.

Théorème 2. *Soient* $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{qp})$ *où* p, p' *et* q *sont des premiers différents tels que* $\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = -\left(\frac{2}{q}\right) = 1$. *On suppose que* $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{pp'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. *Alors le nombre des classes de* K *qui capitulent dans* K_1 *est égal à* 2.

Preuve. On a que -1 est norme d'une unité de K_1, car $\mathcal{N}_{K_1/K}(\varepsilon_{pp'}) = \mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{pp'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. On a que ε_{qp} est norme d'une unité de K_1. En effet, comme dans la preuve de la Proposition 3, il existe deux nombres rationnels v_1 et v_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_{qp}} = v_1\sqrt{q} + v_2\sqrt{p}\,. \tag{1}$$

D'autre part, on vérifie facilement qu'il existe deux nombres rationnels x_1 et x_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_{2q}} = x_1\sqrt{2} + x_2\sqrt{q}\,. \tag{2}$$

De (1) et (2), on tire que $\sqrt{\varepsilon_{2q}\varepsilon_{qp}} \in K_1$ et on a

$$\mathcal{N}_{K_1/K}(\sqrt{\varepsilon_{2q}\varepsilon_{qp}})^2 = \mathcal{N}_{K_1/K}(\varepsilon_{2q})\mathcal{N}_{K_1/K}(\varepsilon_{pq}) = \varepsilon_{pq}^2\,.$$

Ainsi, ε_{pq} est norme d'une unité de K_1. On a $\varepsilon_{2pp'q}$ est norme d'une unité de K_1. En effet, on sait d'après la preuve de la Proposition 3, qu'il existe deux nombres rationnels t_1 et t_2 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_{2pp'q}} = t_1\sqrt{p'} + t_2\sqrt{2pq}\,. \tag{3}$$

De (2) et (3), on a $\sqrt{\varepsilon_{2q}\varepsilon_{2pp'q}} \in K_1$ et

$$\mathcal{N}_{K_1/K}(\sqrt{\varepsilon_{2q}\varepsilon_{2pp'q}})^2 = \mathcal{N}_{K_1/K}(\varepsilon_{2q})\mathcal{N}_{K_1/K}(\varepsilon_{2pp'q}) = \varepsilon_{2pp'q}^2\,.$$

Ainsi $\varepsilon_{2pp'q}$ est norme d'une unité de K_1. Il reste à montrer que $\varepsilon_{2p'}$ est norme d'une unité de K_1. Si $\varepsilon_{2p'}\varepsilon_{pp'}\varepsilon_{2p}$ est un carré dans $F = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{2p})$, alors on a $\mathcal{N}_{K_1/K}(\sqrt{\varepsilon_{2p'}\varepsilon_{2p}\varepsilon_{pp'}})^2 = \varepsilon_{2p'}^2$ et par suite $\varepsilon_{2p'}$ est norme d'une unité de K_1. Si $\varepsilon_{2p'}\varepsilon_{pp'}\varepsilon_{2p}$ n'est pas un carré dans $F = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{2p})$, alors d'après [Wa-66], on a $\sqrt{2}\sqrt{\varepsilon_{2p'}\varepsilon_{2p}\varepsilon_{pp'}} \in F$ et par suite il existe quatre nombres rationnels y_1, y_2, y_3 et y_4 tels que

$$\sqrt{\varepsilon_{2p'}\varepsilon_{2p}\varepsilon_{pp'}} = y_1\sqrt{2} + y_2\sqrt{p'} + y_3\sqrt{p} + y_4\sqrt{2pp'}\,. \tag{4}$$

De (2) et (4), on tire $\sqrt{\varepsilon_{2q}}\sqrt{\varepsilon_{2p'}\varepsilon_{2p}\varepsilon_{pp'}} \in K_1$ et par suite on a

$$\mathcal{N}_{K_1/K}(\sqrt{\varepsilon_{2q}}\sqrt{\varepsilon_{2p'}\varepsilon_{2p}\varepsilon_{pp'}})^2 = \varepsilon_{2p'}^2$$

et donc $\varepsilon_{2p'}$ est norme d'une unité de K_1. Ainsi toutes les unités de K sont normes d'unités dans K_1; par conséquent $[E_K : \mathcal{N}_{K_1/K}(E_{K_1})] = 1$ et le nombre des classes de K qui capitulent dans K_1 est égal à 2. □

Corollaire 3. *On garde les notations et hypothèses du Théorème 2. Alors le groupe* $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ *est quaternionique ou semi-diédral.*

Preuve. D'après le Théorème 1, le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique et d'après le Théorème 2, le nombre des classes de K qui capitulent dans K_1 est égal à 2. Par suite, d'après la Proposition 2, le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est quaternionique ou semi-diédral, suivant que K_1 est de type (A) ou de type (B). □

3.4. **Classes engendrant le 2-groupe de classes de K.** Soient $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{qp})$ où p, p' et q sont des premiers différents tels que $\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = -\left(\frac{2}{q}\right) = 1$. On suppose $\mathcal{N}_{\mathbf{Q}(\sqrt{pp'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. Alors dans ce paragraphe, on détermine les classes engendrant le 2-groupe de classes de K. On a 2 se ramifie totalement dans K, donc $2O_K = \mathcal{P}^4$ où $\mathcal{P}$ est un idéal premier de K. Comme $\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{p'}{q}\right) = -1$, alors $qO_K = \mathcal{P}_1^2\mathcal{P}_2^2$ où $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux idéaux premiers différents de K.

Théorème 3. *On garde les notations et hypothèses précédentes et soit m la partie impaire du nombre de classes de K. Alors le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes des idéaux $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1^m$.*

Preuve. Montrons que la classe de l'idéal $\mathcal{P}$ est une 2-classe non triviale de K. On a $2O_K = \mathcal{P}^4$; alors la classe de $\mathcal{P}$ est une 2-classe. Comme $(\frac{2}{p'}) = -1$, alors $\mathcal{P}$ reste inerte dans $K_3 = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{p'}, \sqrt{qp})$. Comme K_3/K est une extension abélienne non ramifiée, alors d'après la loi de réciprocité d'Artin (notée dans ce qui suit par LRA) appliquée à l'extension K_3/K, l'idéal premier $\mathcal{P}$ n'est pas principal.

L'idéal premier $\mathcal{P}_1$ n'est pas principal. En effet, comme $\left(\frac{pp'}{q}\right) = -1$, alors l'idéal premier $\mathcal{P}_1$ reste inerte dans $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pp'}, \sqrt{qp})$. Or l'extension K_1/K est une extension abélienne non ramifiée. Alors d'après LRA appliquée à l'extension K_1/K, l'idéal $\mathcal{P}_1$ n'est pas principal. Si m désigne la partie impaire du nombre de classes de K, alors la classe de l'idéal $\mathcal{P}_1^m$ est une 2-classe non triviale de K. Il reste à montrer que la classe de l'idéal $\mathcal{P}\mathcal{P}_1^m$ est une 2-classe non triviale.

On a que l'extension K_1/K est une extension abélienne et non ramifiée. Comme $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = -1$, alors l'idéal premier $\mathcal{P}$ se décompose dans K_1. On sait que $\mathcal{P}_1$ reste inerte dans K_1. Alors d'après LRA appliquée à l'extension K_1/K, on a que $\mathcal{P}\mathcal{P}_1$ n'est pas principal. Par conséquent, le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes des idéaux $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1^m$. □

3.5. **Classes de K capitulent dans K_1.** On sait d'après le Corollaire 2 que le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique. D'après le Théorème 2, une seule 2-classe non triviale de K capitule dans K_1. Dans ce paragraphe, on détermine la classe non triviale de K qui capitule dans l'extension K_1/K. On garde les notations du paragraphe 3.4.

Théorème 4. *Soient $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{qp})$ où p, p' et q sont des premiers différents tels que $\left(\frac{p}{p'}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p}\right) = -\left(\frac{2}{p'}\right) = -\left(\frac{q}{p'}\right) = -\left(\frac{2}{q}\right) = 1$ et $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq}, \sqrt{pp'})$. Alors on a :*
(1) *La classe de l'idéal $\mathcal{P}\mathcal{P}_1^m$ capitule dans K_1.*
(2) *Le groupe* $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ *est semi-diédral.*

Preuve. (1) D'après le Théorème 3, le 2-groupe de classes de K est engendré par les classes des idéaux premiers $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_1^m$ où m est la partie impaire du nombre de classes de K, $\mathcal{P}$ est au-dessus de 2 et $\mathcal{P}_1$ est au-dessus de q. Montrons que $\mathcal{P}\mathcal{P}_1^m$ capitule dans K_1.

Soit $L = \mathbf{Q}(\sqrt{2q}, \sqrt{2p'})$. Comme 2 se ramifie totalement dans L, alors $2O_L = \mathcal{H}^4$ où $\mathcal{H}$ est un idéal premier de L. Comme $\left(\frac{2}{q}\right) = \left(\frac{p'}{q}\right) = -1$, alors $qO_L = \mathcal{H}_1^2\mathcal{H}_2^2$ où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont deux idéaux premiers différents de L. D'autre part, le 2-nombre de classes de L est égal à 2 et $L_2^{(1)} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{p'})$ est le 2-corps de classes de Hilbert de L. Pour le voir, on constate que $\left(\frac{2}{p'}\right) = -1$ et que $\varepsilon_{2p'}$ est de norme égale à -1. De plus, on vérifie facilement que ε_{2q} n'est pas un carré dans L et par suite, d'après [Kub-56], l'indice Q_L des unités de L est égal à 1 ou à 2. On a $h(2p') \equiv h(p'q) \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$ et $h(2q) = 1$. Donc $h(L) = Q_L$. Or $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{p'})/L$ est une extension non ramifiée. D'où $Q_L = 2$, $h(L) = 2$ et $L_2^{(1)} = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{q}, \sqrt{p'})$ est le 2-corps de classes de Hilbert de L.

On a que l'idéal $\mathcal{H}$ reste inerte dans $L_2^{(1)}$. D'après la théorie des corps de classes de Hilbert (le noyau de l'application d'Artin de l'extension $L_2^{(1)}/L$ est réduit au groupe des idéaux fractionnaires principaux), l'idéal premier $\mathcal{H}$ n'est pas principal et donc la classe de $\mathcal{H}$ est une 2-classe non triviale de L. De plus, l'idéal $\mathcal{H}_1$ est inerte dans $L_2^{(1)}$; donc l'idéal premier $\mathcal{H}_1$ n'est pas principal et la classe de l'idéal $\mathcal{H}_1^m$ est une 2-classe non triviale de L. Comme la 2-partie du nombre de classes de L est égale à 2, alors $\mathcal{H}\mathcal{H}_1^m$ est principal. Comme $L \subset K_1$ et $\mathcal{P}\mathcal{P}_1^m O_{K_1} = \mathcal{H}\mathcal{H}_1^m O_{K_1}$ est principal, alors $\mathcal{P}\mathcal{P}_1^m$ capitule dans K_1.

(2) La classe de l'idéal $\mathcal{P}\mathcal{P}_1^m$ est la seule classe de K qui capitule dans $K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq}, \sqrt{pp'})$. On sait que $\mathcal{P}$ se décompose complètement dans K_1 et $\mathcal{P}_1$ reste inerte dans K_1. Alors la classe de l'idéal $\mathcal{P}\mathcal{P}_1^m$ ne peut pas être norme d'une classe de K_1; ainsi K_1 est de type (B). Or le 2-groupe de classes de K_1 est cyclique. Donc d'après la Proposition 2, le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est semi-diédral. □

Exemple numérique. Soient $p = 101$, $p' = 13$ et $q = 19$. On a $\left(\frac{2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p'}\right) = \left(\frac{2}{q}\right) = -1$, $\left(\frac{p'}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) = 1$ et $\mathcal{N}_{Q(\sqrt{pp'})/\mathbf{Q}}(\varepsilon_{pp'}) = -1$. Alors on a bien que le 2-groupe de classes de $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2p'}, \sqrt{pq})$ est de type $(2,2)$ et le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_2^{(2)}/K)$ est semi-diédral.

Références

[Az-93] Azizi, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$, Thèse de doctorat, Univ. Laval. Québec (1993).

[Az-97] Azizi, A., *Sur la capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{d}, i)$, C. R. Acad. Sci. Paris **325**, série I, (1997), 127–130.

[Az-00] Azizi, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2pq}, i)$, Acta arithmetica **XCIV.4** (2000), 383–399.

[Az-Mo-1] Azizi, A. et Mouhib, A., *Sur le rang du 2-groupe de classes de* $\mathbf{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{d})$ *où* $m = 2$ *ou un premier* $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4)$, Trans. Amer. Math. Soc. **353**, No. 7, (2001), 2741–2752.

[Az-Mo-2] Azizi, A. et Mouhib, A., *Sur le 2-groupe de classes du corps de genres de certains corps biquadratiques*, Ann. Sci. Math. Québec **27** (2003), No. 2, 123–134.

[Az-Mo-3] Azizi, A. et Mouhib, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de* $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$ *où* d *est un entier naturel sans facteurs carrés*, Acta Arithmetica **109.1** (2003).

[Az-Mo-4] Azizi, A. et Mouhib, A., *Capitulation des 2-classes d'idéaux de certains corps biquadratiques dont le corps de genres diffère du 2-corps de classes de Hilbert*, Université Mohamed I. Oujda, à paraître.

[Az-Mo-5] Azizi, A. et Mouhib, A., 2-*Rang du groupe de classes de certains corps biquadratiques et applications*, Université Mohamed I. Oujda, Int. J. Math. **15** (2004), No. 2, 169–182.

[Be-Le-Sn-98] Benjamin, E., Lemmermeyer, F. and Snyder, C., *Real quadratic fields with abelian 2-class field tower*, J. Number Theory **73**, No. 2, (1998), 182–194.

[Be-Sn-95] Benjamin, E. and Snyder, C., *Real quadratic number fields with 2-class group of type* $(2,2)$, Math. Scand. **76** (1995), 161–178.

[De-92] Derhem, A., *Un problème de capitulation*, C. R. Acad. Sci. Paris, sér. I Math. **314**, No. 11, (1992), 785–788.

[Gr-73] Gras, G., *Sur les* ℓ*-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier* ℓ, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **23**, fasc. 3 (1973).

[H-S-82] Heider, F. P., Schmithals, B., *Zur Kapitulation der Idealklassen in unverzweigten primzyklischen Erweiterungen*, J. Reine Angew. Math. **336** (1982), 1–25.

[Ha-30] Hasse, H., *Neue Begründung der theorie der Normenrest symbols*, J. Reine Angew. Math. **162** (1930).

[Ja-73] Janusz, G. J., *Algebraic number fields*, Academic Press, New York-London (1973).

[Ka-73] Kaplan, P., *Divisibilité par* 8 *du nombre de classes des corps quadratiques dont le* 2*-groupe des classes est cyclique et réciprocité biquadratique*, J. Math. Soc. Japan. **25**, No. 4, (1973), 596–608.

[Ka-76] Kaplan, P., *Sur le* 2*-groupe des classes d'idéaux des corps quadratiques*, J. Reine Angew. Math. **283/284** (1976), 313–363.

[Ki-76] Kisilevesky, H., *Number fields with class number congruent to* 4 *modulo* 8 *and Hilbert's theorem* 94, J. Number Theory **8** (1976), 271–279.

[Kub-56] Kubota, T., *Über den bizyklischen biquadratischen Zahlkörper*, Nagoya Math. J. **10** (1956), 65–85.

[Kuč-95] Kučera, R., *On the parity of the class number of a biquadratic field*, J. Number Theory **52** (1995), 43–52.

[Mo-01] Mouhib, A., *Sur le* 2*-groupe de classes de certains corps biquadratiques réels et Capitulation des* 2*-classes d'idéaux*, Thèse de doctorat, Université Mohamed I. Oujda, (2001).

[Ta-37] Taussky, O., *A remark on the class field tower*, J. London Math. Soc. **12** (1937), 82–85.

[Wa-66] Wada, H., *On the class number and the unit group of certain algebraic number fields*, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **13** (1966), 201–209.

Département de Mathématiques, Faculté des Sciences
Université Mohammed 1, Oujda, Maroc
E-mail: abdelmalekazizi@yahoo.fr