ARCHIVUM MATHEMATICUM (BRNO)
Tomus 44 (2008), 159–171

CHAMPS DE VECTEURS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES SUR UNE VARIÉTÉ DES POINTS PROCHES

Basile Guy Richard Bossoto et Eugène Okassa

Abstract. Let M be a smooth manifold, A a local algebra in sense of André Weil, M^A the manifold of near points on M of kind A and $\mathfrak{X}(M^A)$ the module of vector fields on M^A. We give a new definition of vector fields on M^A and we show that $\mathfrak{X}(M^A)$ is a Lie algebra over A. We study the cohomology of A-differential forms.

Résumé. On considère M une variété différentielle, A une algèbre locale au sens d'André Weil, M^A la variété des points proches de M d'espèce A et $\mathfrak{X}(M^A)$ le module des champs de vecteurs sur M^A. On donne une nouvelle définition des champs de vecteurs sur M^A et on montre que $\mathfrak{X}(M^A)$ est une algèbre de Lie sur A. On étudie la cohomologie des A-formes différentielles.

1. Introduction

On considère une variété lisse M, A une algèbre locale (au sens d'André Weil) et M^A la variété des points proches de M d'espèce A [6]. Lorsque la variété M est de dimension n, alors M^A est une variété lisse de dimension $n \cdot \dim(A)$.

On note $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur M, $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$-module des champs de vecteurs sur M.

Lorsque M et N sont deux variétés lisses et lorsque

$$h\colon M \to N$$

est une application différentiable de classe C^∞, alors l'application

$$h^A\colon M^A \to N^A\,, \quad \xi \mapsto h^A(\xi)\,,$$

telle que, pour tout $\varphi \in C^\infty(N)$,

$$\left[h^A(\xi)\right](\varphi) = \xi(\varphi \circ h)$$

est différentiable de classe C^∞. Lorsque h est un difféomorphisme, il en est de même de h^A.

L'ensemble, $C^\infty(M^A, A)$, des fonctions de classe C^∞ sur M^A à valeurs dans A, est une A-algèbre commutative unitaire.

Classification Mathématique (2000) : Primary: 13H99; Secondary: 58A05, 58A10.
Mots-clés : variété des points proches, algèbre locale, champs de vecteurs, A-formes différentielles.
Received February 18, 2008. Editor I. Kolář.

En identifiant $\mathbb{R}^A$ à A, pour $f \in C^\infty(M)$, l'application

$$f^A \colon M^A \to A\,, \quad \xi \mapsto \xi(f)\,,$$

est de classe C^∞. De plus l'application

$$C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A), f \mapsto f^A\,,$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres. Ainsi, on a :

$$(f+g)^A = f^A + g^A$$
$$(\lambda \cdot f)^A = \lambda \cdot f^A$$
$$(f \cdot g)^A = f^A \cdot g^A$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g appartenant à $C^\infty(M)$.

Lorsque $(a_\alpha)_{\alpha=1,2,\ldots,\dim(A)}$ est une base de A et lorsque $(a^*_\alpha)_{\alpha=1,2,\ldots,\dim(A)}$ est la base duale de la base $(a_\alpha)_{\alpha=1,2,\ldots,\dim(A)}$, l'application

$$\sigma \colon C^\infty(M^A, A) \to A \times C^\infty(M^A)\,, \quad \varphi \mapsto \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} a_\alpha \otimes (a^*_\alpha \circ \varphi)\,,$$

est un isomorphisme de A-algèbres. Cet isomorphisme ne dépend évidemment pas de la base choisie. L'application

$$\gamma \colon C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)\,, \quad f \mapsto \sigma(f^A)\,,$$

est un morphisme d'algèbres.

Dans toute la suite M est une variété lisse paracompacte de dimension n.

Lorsque (U, φ) est une carte locale de M de système de coordonnées locales $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, l'application

$$U^A \to A^n\,, \quad \xi \mapsto \big(\xi(x_1), \xi(x_2), \ldots, \xi(x_n)\big)\,,$$

est une bijection de U^A sur un ouvert de A^n. On vérifie que M^A est une A-variété de dimension n.

L'ensemble, $\mathfrak{X}(M^A)$, des champs de vecteurs sur M^A est à la fois un $C^\infty(M^A)$-module et un A- module. Ce qui signifie que $\mathfrak{X}(M^A)$ est un $C^\infty(M^A, A)$-module.

Dans ce travail, on étudie la structure de $C^\infty(M^A, A)$-module de $\mathfrak{X}(M^A)$. De cette nouvelle approche, on construit une structure de A-algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(M^A)$, on définit les A-formes différentielles et on en étudie la cohomologie.

2. Structure de A-algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(M^A)$

2.1. Vecteurs tangents sur M^A. Pour $\xi \in M^A$, on note $T_\xi M^A$ l'espace tangent en $\xi \in M^A$ et $\mathrm{Der}_\xi\,[C^\infty(M), A]$ l'ensemble des ξ-dérivations de $C^\infty(M)$ dans A c'est-à-dire l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires

$$v : C^\infty(M) \to A$$

telles que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$v(fg) = v(f) \cdot \xi(g) + \xi(f) \cdot v(g)$$

i.e.

$$v(fg) = v(f) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot v(g) .$$

Proposition 1 ([3], [4]). *L'application*

$$T_\xi M^A = \mathrm{Der}_\xi \left[C^\infty(M^A), \mathbb{R} \right] \to \mathrm{Der}_\xi \left[C^\infty(M), A \right] , \quad v \mapsto (\mathrm{id}_A \otimes v) \circ \gamma ,$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Cet isomorphisme permet de transporter sur $T_\xi M^A$ la structure de A-module du A-module $\mathrm{Der}_\xi\, [C^\infty(M), A]$.

Ainsi :

Corollaire 2. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *v est un vecteur tangent en $\xi \in M^A$;*
2) *v est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $C^\infty(M)$ dans A telle que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,*

$$v(fg) = v(f) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot v(g) .$$

Lorsque $\xi \in M^A$, l'application

$$\widetilde{\xi} \colon C^\infty(M^A, A) \to A , \quad \varphi \mapsto \varphi(\xi) ,$$

est un homomorphisme d'algèbres. On note $Der_{\widetilde{\xi}}\left[C^\infty(M^A, A), A\right]$ le A-module des $\widetilde{\xi}$-dérivations de $C^\infty(M^A, A)$ dans A c'est-à-dire l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires

$$w : C^\infty(M^A, A) \to A$$

telles que, pour φ et ψ appartenant à $C^\infty(M^A, A)$,

$$w(\varphi \cdot \psi) = w(\varphi) \cdot \widetilde{\xi}(\psi) + \widetilde{\xi}(\varphi) \cdot w(\psi) .$$

On déduit le théorème suivant :

Théorème 3. *Si*

$$v \colon C^\infty(M) \to A$$

est un vecteur tangent en $\xi \in M^A$, alors il existe une $\widetilde{\xi}$-dérivation et une seule

$$\widetilde{v} : C^\infty(M^A, A) \to A$$

telle que :

1) *$\widetilde{v}$ est A-linéaire ;*
2) *$\widetilde{v}\left[C^\infty(M^A)\right] \subset \mathbb{R}$;*
3) *$\widetilde{v}(f^A) = v(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.*

Démonstration. Soit

$$v \colon C^\infty(M) \to A$$

un vecteur tangent en $\xi \in M^A$ et soit

$$\overline{v} : C^\infty(M^A) \to \mathbb{R}$$

l'unique dérivation telle que

$$(\mathrm{id}_A \otimes \overline{v}) \circ \gamma = v\,.$$

L'application

$$\widetilde{v} = (\mathrm{id}_A \otimes \overline{v}) \circ \sigma \colon C^\infty(M^A, A) \to A$$

répond à la question. $\square$

2.2. **Champs de vecteurs sur M^A.** On note $\mathrm{Der}_\gamma\left[C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)\right]$ le $A \otimes C^\infty(M^A)$-module des γ-dérivations de $C^\infty(M)$ dans $A \otimes C^\infty(M^A)$ i.e. l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires

$$\varphi \colon C^\infty(M) \to A \otimes C^\infty(M^A)$$

telles que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$\varphi(fg) = \varphi(f) \cdot \gamma(g) + \gamma(f) \cdot \varphi(g)\,.$$

Une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ est une application $\mathbb{R}$- linéaire

$$Y \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A)$$

telle que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$Y(fg) = Y(f) \cdot g^A + f^A \cdot Y(g)\,.$$

Ainsi une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ est une dérivation par rapport à l'homomorphisme

$$C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A)\,, \quad f \mapsto f^A\,.$$

Il s'ensuit que l'ensemble, *Der* $\left[C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)\right]$, des dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ est un $C^\infty(M^A, A)$-module.

Proposition 4 ([3],[4])**.** *L'application*

$$\mathrm{Der}\left[C^\infty(M^A)\right] \to \mathrm{Der}_\gamma\left[C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)\right]\,, \quad X \mapsto (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma\,,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$-modules.

Il s'ensuit :

Corollaire 5. *L'application*

$$\mathrm{Der}\left[C^\infty(M^A)\right] \to \mathrm{Der}\left[C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)\right]\,, \quad X \mapsto \sigma^{-1} \circ (\mathrm{id}_A \otimes X) \circ \gamma\,,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$-modules.

Cet isomorphisme permet de transporter sur $\mathrm{Der}\left[C^\infty(M^A)\right]$ la structure de $C^\infty(M^A, A)$-module de $\mathrm{Der}\left[C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)\right]$.

Ainsi :

Corollaire 6. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Un champ de vecteurs sur M^A est une section différentiable du fibré tangent (TM^A, π_{M^A}, M^A) ;*
2) *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M^A)$;*

3) *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$.*

On déduit le théorème suivant :

Théorème 7. *Si X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors il existe une dérivation et une seule*

$$\widetilde{X} \colon C^\infty(M^A, A) \to C^\infty(M^A, A)$$

telle que

1) *$\widetilde{X}$ est A-linéaire ;*
2) *$\widetilde{X}\left[C^\infty(M^A)\right] \subset C^\infty(M^A)$;*
3) *$\widetilde{X}(f^A) = X(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.*

Démonstration. Si X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ et si

$$\overline{X} \colon C^\infty(M^A) \to C^\infty(M^A)$$

est l'unique dérivation telle que

$$\sigma^{-1} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \overline{X}) \circ \gamma = X\,,$$

alors l'application

$$\widetilde{X} = \sigma^{-1} \circ (\mathrm{id}_A \otimes \overline{X}) \circ \sigma : C^\infty(M^A, A) \to C^\infty(M^A, A)$$

répond à la question. □

Remarque 8. Si X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors $\widetilde{X}$ s'annule sur A.

Proposition 9. *Si $\mu \colon A \to A$ est un endomorphisme, $f \in C^\infty(M)$ et $X \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A)$ un champ de vecteurs sur M^A, alors*

$$\widetilde{X}(\mu \circ f^A) = \mu \circ X(f)\,.$$

Démonstration. De $\widetilde{X}(f^A) = X(f)$, on a

$$\widetilde{X}\Big[\sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ f^A) \cdot a_\alpha\Big] = \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ X(f) \cdot a_\alpha\,.$$

Ce qui donne

$$\sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} \widetilde{X}(a_\alpha^* \circ f^A) \cdot a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ X(f) \cdot a_\alpha\,.$$

Ainsi $\widetilde{X}(a_\alpha^* \circ f^A) = (a_\alpha^* \circ X(f)$ pour tout $(a_\alpha^*)_{i=1,2,\ldots,\dim(A)}$. Comme

$$\mu \circ f^A = \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ f^A) \cdot \mu(a_\alpha)\,,$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}(\mu \circ f^A) &= \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} \widetilde{X}(a_\alpha^* \circ f^A) \cdot \mu(a_\alpha) \\
&= \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ X(f) \cdot \mu(a_\alpha) = \mu \circ X(f)\,.
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. □

Théorème 10. *Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors le crochet*

$$[X, Y] = \widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A)$$

est un champ de vecteurs sur M^A.

Démonstration. L'application est manifestement $\mathbb{R}$-linéaire. Pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= \widetilde{X}[Y(fg)] - \widetilde{Y}\big[X(fg)\big] \\
&= \widetilde{X}\big[Y(f) \cdot g^A + f^A \cdot Y(g))\big] - \widetilde{Y}\big[X(f) \cdot g^A + f^A \cdot X(g)\big] \\
&= \widetilde{X}\big[Y(f)\big] \cdot g^A + Y(f) \cdot \widetilde{X}(g^A) + \widetilde{X}(f^A) \cdot Y(g) + f^A \cdot \widetilde{X}\big[Y(g)\big] \\
&\quad - \widetilde{Y}\big[X(f)\big] \cdot g^A - X(f) \cdot \widetilde{Y}(g^A) - \widetilde{Y}(f^A) \cdot X(g) - f^A \cdot \widetilde{Y}\big[X(g)\big] \\
&= \widetilde{X}\big[Y(f)\big] \cdot g^A + Y(f) \cdot X(g) + X(f) \cdot Y(g) + f^A \cdot \widetilde{X}\big[Y(g)\big] \\
&\quad - \widetilde{Y}\big[X(f)\big] \cdot g^A - X(f) \cdot Y(g) - Y(f) \cdot X(g) - f^A \cdot \widetilde{Y}\big[X(g)\big] \\
&= \big(\widetilde{X}\,[Y(f)] - \widetilde{Y}\,[X(f)]\,\big) \cdot g^A + f^A \cdot \big(\widetilde{X}\,[Y(g)] - \widetilde{Y}\,[X(g)]\,\big) \\
&= (\widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X)(f) \cdot g^A + f^A \cdot (\widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X)(g) \\
&= [X, Y]\,(f) \cdot g^A + f^A \cdot [X, Y]\,(g)\,.
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. □

Proposition 11. *Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ et si $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, alors*

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$$

et

$$\widetilde{\varphi \cdot X} = \varphi \cdot \widetilde{X}\,.$$

Démonstration. Pour $f \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
\big[\widetilde{X}, \widetilde{Y}\big](f^A) &= \widetilde{X}\big[\widetilde{Y}(f^A)\big] - \widetilde{Y}\big[\widetilde{X}(f^A)\big] = \widetilde{X}\big[Y(f)\big] - \widetilde{Y}\big[X(f)\big] \\
&= (\widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X)(f) = [X, Y]\,(f)\,.
\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{[X,Y]}$ est l'unique dérivation de $C^\infty(M^A, A)$ telle que $\widetilde{[X,Y]}(f^A) = [X,Y]\,(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$, on déduit que

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \widetilde{[X,Y]}\,.$$

De même

$$(\varphi \cdot \widetilde{X})(f^A) = \varphi \cdot (\widetilde{X})(f^A) = \varphi \cdot X(f) = (\varphi \cdot X)(f)\,.$$

Comme $\widetilde{\varphi \cdot X}$ est l'unique dérivation de $C^\infty(M^A, A)$ telle que $(\widetilde{\varphi \cdot X})(f^A) = (\varphi \cdot X)(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$, on déduit que

$$\widetilde{\varphi \cdot X} = \varphi \cdot \widetilde{X}\,.$$

D'où les deux assertions. □

Proposition 12. *Si $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors*

$$[X, \varphi \cdot Y] = \widetilde{X}(\varphi) \cdot Y + \varphi \cdot [X,Y]\ .$$

La démonstration ne présente aucune difficulté.

Théorème 13. *L'application*

$$\mathfrak{X}(M^A) \times \mathfrak{X}(M^A) \to \mathfrak{X}(M^A)\,, \quad (X,Y) \mapsto [X,Y]\ ,$$

est A-bilinéaire alternée et définit une structure de A-algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(M^A)$.

Démonstration. Lorsque X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ et lorsque $a \in A$, on a

$$[X, a \cdot Y] = \widetilde{X}(a) \cdot Y + a \cdot [X,Y]\ .$$

Comme $\widetilde{X}$ s'annule sur A, il s'ensuit que l'application

$$\mathfrak{X}(M^A) \times \mathfrak{X}(M^A) \to \mathfrak{X}(M^A), (X,Y) \mapsto [X,Y]$$

est A-bilinéaire alternée.

Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\big[X,[Y,Z]\big] + \big[Y,[Z,X]\big] + \big[Z,[X,Y]\big] &= \widetilde{X}\circ[Y,Z] - \widetilde{[Y,Z]}\circ X \\
&\quad + \widetilde{Y}\circ[Z,X] - \widetilde{[Z,X]}\circ Y + \widetilde{Z}\circ[X,Y] - \widetilde{[X,Y]}\circ Z \\
&= \widetilde{X}\circ(\widetilde{Y}\circ Z - \widetilde{Z}\circ Y) - [\widetilde{Y},\widetilde{Z}]\circ X \\
&\quad + \widetilde{Y}\circ(\widetilde{Z}\circ X - \widetilde{X}\circ Z) - \big[\widetilde{Z},\widetilde{X}\big]\circ Y \\
&\quad + \widetilde{Z}\circ(\widetilde{X}\circ Y - \widetilde{Y}\circ X) - \big[\widetilde{X},\widetilde{Y}\big]\circ Z \\
&= \widetilde{X}\circ\widetilde{Y}\circ Z - \widetilde{X}\circ\widetilde{Z}\circ Y - \widetilde{Y}\circ\widetilde{Z}\circ X + \widetilde{Z}\circ\widetilde{Y}\circ X \\
&\quad + \widetilde{Y}\circ\widetilde{Z}\circ X - \widetilde{Y}\circ\widetilde{X}\circ Z - \widetilde{Z}\circ\widetilde{X}\circ Y + \widetilde{X}\circ\widetilde{Z}\circ Y \\
&\quad + \widetilde{Z}\circ\widetilde{X}\circ Y - \widetilde{Z}\circ\widetilde{Y}\circ X - \widetilde{X}\circ\widetilde{Y}\circ Z + \widetilde{Y}\circ\widetilde{X}\circ Z \\
&= 0\,.
\end{aligned}
$$

D'où l'assertion. □

Remarque 14. En considérant $\mathfrak{X}(M^A)$ uniquement comme module sur $C^\infty(M^A)$, $\mathfrak{X}(M^A)$ ne peut être une algèbre de Lie sur A.

Corollaire 15. *L'application*

$$\mathfrak{X}(M^A) \to \mathrm{Der}\left[C^\infty(M^A,A)\right]\,, \quad X \mapsto \widetilde{X}\,,$$

est à la fois un morphisme de $C^\infty(M^A,A)$-modules et un morphisme de A-algèbres de Lie.

2.2.1. **Prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M.**

Proposition 16. *Si*

$$\theta\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

est un champ de vecteurs sur M, alors l'application

$$\theta^A\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M^A,A)\,, \quad f \mapsto [\theta(f)]^A\,,$$

est un champ de vecteurs sur M^A.

Démonstration. L'application θ^A est manifestement $\mathbb{R}$-linéaire. Pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$, on a :

$$
\begin{aligned}
\theta^A(fg) &= \big[\theta(fg)\big]^A = \big[\theta(f)\cdot g + f\cdot\theta(g)\big]^A \\
&= \big[\theta(f)\big]^A\cdot g^A + f^A\cdot\big[\theta(g)\big]^A = \theta^A(f)\cdot g^A + f^A\cdot\theta^A(g)\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi θ^A est un champ de vecteurs sur M^A. □

On dit que le champ de vecteurs θ^A est le prolongement à M^A du champ de vecteurs θ sur M.

Proposition 17. *Si θ, θ_1 et θ_2 sont des champs de vecteurs sur M et si $f \in C^\infty(M)$, alors*

$$(\theta_1 + \theta_2)^A = \theta_1^A + \theta_2^A;$$
$$(f \cdot \theta)^A = f^A \cdot \theta^A;$$
$$\widetilde{(f \cdot \theta)^A} = f^A \cdot \widetilde{\theta^A};$$
$$\left[\theta_1^A, \theta_2^A\right] = [\theta_1, \theta_2]^A .$$

et l'application

$$\mathfrak{X}(M) \to \operatorname{Der}\left[C^\infty(M^A, A)\right] \qquad \theta \mapsto \widetilde{\theta^A} ,$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie réelles.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

2.2.2. **Champs de vecteurs sur M^A provenant des dérivations de A.**

Proposition 18. *Si d est une dérivation de A, alors l'application*

$$d^*\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M^A, A) , \quad f \mapsto (-d) \circ f^A ,$$

est un champ de vecteurs sur M^A.

Démonstration. On vérifie que l'application d^* est $\mathbb{R}$-linéaire. Pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$ et pour $\xi \in M^A$, on a :

$$\begin{aligned}
d^*(fg)(\xi) &= (-d) \circ (fg)^A(\xi) = (-d) \circ (f^A \cdot g^A)(\xi) = (-d)\left[f^A(\xi) \cdot g^A(\xi)\right] \\
&= (-d)\left[f^A(\xi)\right] \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot (-d)\left[g^A(\xi)\right] \\
&= \left[(-d) \circ f^A\right](\xi) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot \left[(-d) \circ f^A\right](\xi) \\
&= (\left[(-d) \circ f^A\right] \cdot g^A + f^A \cdot \left[(-d) \circ f^A\right])(\xi) \\
&= \left[d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g)\right](\xi) .
\end{aligned}$$

Comme ξ est quelconque, on déduit que

$$d^*(fg) = d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g) .$$

Ainsi, d^* est un champ de vecteurs sur M^A. □

On dit que le champ de vecteurs d^* est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation d de A.

On a les résultats suivants :

Proposition 19. *Si d_1, d_2, d sont trois dérivations de A, a un élément de A et $\theta\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ un champ de vecteurs sur M, alors*

$$[d_1^*, d_2^*] = [d_1, d_2]^* ;$$
$$(a \cdot d)^* = a \cdot d^*;$$
$$\left[d^*, \theta^A\right] = 0 .$$

Démonstration. La démonstration des deux premières assertions ne présente aucune difficulté.

Pour la dernière assertion, lorsque $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\begin{aligned}[d^*, \theta^A](f) &= (\widetilde{d^*} \circ \theta^A - \widetilde{\theta^A} \circ d^*)(f) = (\widetilde{d^*} \circ \theta^A)(f) - (\widetilde{\theta^A} \circ d^*)(f) \\ &= (\widetilde{d^*})[\theta^A(f)] - (\widetilde{\theta^A})[d^*(f)] = (\widetilde{d^*})\big([\theta(f)]^A\big) - (\widetilde{\theta^A})[d^*(f)] \\ &= d^*[\theta(f)] + (\widetilde{\theta^A})[d \circ f^A] = (-d) \circ [\theta(f)]^A + (\widetilde{\theta^A})[d \circ f^A]\,.\end{aligned}$$

Compte tenu de la Proposition 9, on a

$$(\widetilde{\theta^A})[d \circ f^A] = d \circ \theta^A(f).$$

Ainsi

$$[d^*, \theta^A](f) = (-d) \circ [\theta(f)]^A + (\widetilde{\theta^A})[d \circ f^A] = (-d) \circ \theta^A(f) + d \circ \theta^A(f) = 0\,.$$

Comme f est quelconque, on déduit que $[d^*, \theta^A] = 0$.

3. A-formes différentielles

Un A-covecteur en $\xi \in M^A$ est une forme linéaire sur le A-module $T_\xi M^A$. L'ensemble, $T^*_\xi M^A$, des A-covecteurs en $\xi \in M^A$ est un A-module libre de dimension n et

$$T^* M^A = \bigcup_{\xi \in M^A} T^*_\xi M^A$$

est une A-variété de dimension $2n$. L'ensemble, $\Lambda^1(M^A, A)$, des sections différentiables de T^*M^A est un $C^\infty(M^A, A)$-module et on dit que $\Lambda^1(M^A, A)$ est le $C^\infty(M^A, A)$-module des A-formes différentielles de degré 1.

Pour $p \in \mathbb{N}$ et pour $\xi \in M^A$, on note $\mathcal{L}^p_{\mathrm{alt}}(T_\xi M^A, A)$ le A-module des formes multilinéaires alternées de degré p sur le A-module $T_\xi M^A$. On a évidemment

$$\mathcal{L}^0_{\mathrm{alt}}(T_\xi M^A, A) = A\,.$$

Comme dans le cas réel, pour deux entiers p et q, on définit le produit extérieur

$$\Lambda : \mathcal{L}^p_{\mathrm{alt}}(T_\xi M^A, A) \times \mathcal{L}^q_{\mathrm{alt}}(T_\xi M^A, A) \to \mathcal{L}^{p+q}_{\mathrm{alt}}(T_\xi M^A, A), (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \Lambda \beta\,.$$

L'ensemble

$$A^p(T^*M^A, A) = \bigcup_{\xi \in M^A} \mathcal{L}^p_{\mathrm{alt}}(T_\xi M^A, A)$$

est une A-variété de dimension $n + C^p_n$. L'ensemble, $\Lambda^p(M^A, A)$, des sections différentiables de $A^p(T^*M^A, A)$ est un $C^\infty(M^A, A)$-module. On dit que $\Lambda^p(M^A, A)$ est le $C^\infty(M^A, A)$-module des A-formes différentielles de degré p sur M^A et que

$$\Lambda(M^A, A) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(M^A, A)$$

est l'algèbre des A-formes différentielles sur M^A. L'algèbre $\Lambda(M^A, A)$ des A-formes différentielles sur M^A est canoniquement isomorphe à $A \otimes \Lambda(M^A)$. On a

$$\Lambda^0(M^A, A) = C^\infty(M^A, A)\,.$$

Théorème 20 ([2],[5]). *Si η est une forme différentielle de degré p sur M, alors il existe une A-forme différentielle de degré p et une seule*

$$\eta^A\colon \mathfrak{X}(M^A) \times \mathfrak{X}(M^A) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M^A) \to C^\infty(M^A, A)$$

telle que, pour p champs de vecteurs $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ sur M et pour p fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ sur M,

$$\eta^A(f_1^A \cdot \theta_1^A, f_2^A \cdot \theta_2^A, \ldots, f_p^A \cdot \theta_p^A) = f_1^A \cdot f_2^A \cdot \ldots \cdot f_p^A \cdot \left[\eta(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p)\right]^A .$$

Lorsque η est une forme différentielle sur M, la A-forme différentielle η^A est le prolongement à M^A de la forme différentielle η.

3.1. **La d^A- cohomologie.** L'application

$$\Lambda(M) \to \Lambda(M^A, A), \quad \omega \mapsto \omega^A ,$$

est un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres graduées.

Si

$$d\colon \Lambda(M) \to \Lambda(M)$$

est l'opérateur de différentiation extérieure, on note

$$d^A\colon \Lambda(M^A, A) \to \Lambda(M^A, A)$$

l'opérateur de cohomologie associé à la représentation

$$\mathfrak{X}(M^A) \to \mathrm{Der}\left[C^\infty(M^A, A)\right] , \quad X \mapsto \widetilde{X} .$$

Proposition 21. *L'application*

$$d^A\colon \Lambda(M^A, A) \to \Lambda(M^A, A)$$

est A-linéaire et

$$d^A(\omega^A) = (d\omega)^A$$

pour tout $\omega \in \Lambda(M)$.

Démonstration. On vérifie que d^A est A-linéaire. Si $\omega \in \Lambda^p(M)$, pour $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+1}$ champs de vecteurs sur M, on a

$$\begin{aligned}
[d^A(\omega^A)](\theta_1^A, \theta_2^A, \ldots, \theta_{p+1}^A) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \widetilde{\theta_i^A}\left[\omega^A(\theta_1^A, \theta_2^A, \ldots, \widehat{\theta_i^A}, ..., \theta_{p+1}^A)\right] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j}\ \omega^A\big([\theta_i^A, \theta_j^A], \theta_1^A, \ldots, \widehat{\theta_i^A} \ldots, \widehat{\theta_j^A}, \ldots, \theta_{p+1}^A\big) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \widetilde{\theta_i^A}\left[(\omega(\theta_1, \theta_2, \ldots, \widehat{\theta}_i, \ldots, \theta_{p+1}))^A\right] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \big(\omega([\theta_i, \theta_j], \theta_1, \ldots, \widehat{\theta}_i \ldots, \widehat{\theta}_j, \ldots, \theta_{p+1})\big)^A \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \theta_i^A \left[\omega(\theta_1, \theta_2, \ldots, \widehat{\theta}_i, \ldots, \theta_{p+1})\right] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \big(\omega([\theta_i, \theta_j], \theta_1, \ldots, \widehat{\theta}_i \ldots, \widehat{\theta}_j, \ldots, \theta_{p+1})\big)^A \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \big(\theta_i[\omega(\theta_1, \theta_2, \ldots, \widehat{\theta}_i, \ldots, \theta_{p+1})]\big)^A \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \big(\omega([\theta_i, \theta_j], \theta_1, \ldots, \widehat{\theta}_i \ldots, \widehat{\theta}_j, \ldots, \theta_{p+1})\big)^A \\
&= (d\omega)^A(\theta_1^A, \theta_2^A, \ldots, \theta_{p+1}^A) = \big[(d\omega)(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p+1})\big]^A .
\end{aligned}$$

Compte tenu du théorème 20, on déduit que $d^A(\omega^A) = (d\omega)^A$.

L'application

$$A \times \Lambda(M) \to \Lambda(M^A, A)\,, \quad (a, \omega) \mapsto a \cdot \omega^A$$

est $\mathbb{R}$-bilinéaire et induit un morphisme du complexe différentiel $\big(A \otimes \Lambda(M), \mathrm{id}_A \otimes d\big)$ dans le complexe différentiel $\big(\Lambda(M^A, A), d^A\big)$.

On note $H_{dR}(M)$ la cohomologie de de Rham de la variété différentielle M et $H(M^A, A)$ la cohomologie du complexe différentiel $\big(\Lambda(M^A, A), d^A\big)$.

On dit que $H(M^A, A)$ est la d^A-cohomologie sur la variété des points proches M^A. Les espaces $A \otimes H^p_{dR}(M^A)$ et $H^p(M^A, A)$ sont canoniquement isomorphes.

En particulier si la variété M^A est connexe, alors l'espace $H^0(M^A, A)$ s'identifie canoniquement à A.

Références

[1] Kolář, I., *Handbook of Global Analysis*, ch. Weil bundles as generalized jet spaces, pp. 625–664, Elsevier, 2008.

[2] Morimoto, A., *Prolongation of connections to bundles of infinitely near points*, J. Differential Geom. **11** (1976), 479–498.

[3] Okassa, E., *Prolongements des champs de vecteurs à des variétés des points proches*, C. R. Acad. Sci. Paris **300** (6) (1985), 173–176.

[4] Okassa, E., *Prolongements des champs de vecteurs à des variétés des points proches*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **VIII** (3) (1986-1987), 349–366.

[5] Okassa, E., *Relèvements des structures symplectiques et pseudo-riemanniennes à des variétés des points proches*, Nagoya Math. J. **115** (1989), 63–71.

[6] Weil, A., *Théorie des points proches sur les variétés différentiables*, Colloque Géom. Differ. (1953), 111–117.

[7] Yano, K., Ishihara, S., *Tangent and Cotangent Bundles. Differential Geometry*, Marcel Dekker, New-York, 1973.

[8] Yano, K., Patterson, E. M., *Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 91–113.

Université Marien Ngouabi, Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
B.P. 69 - Brazzaville, Congo
E-mail: bossotob@yahoo.fr eugeneokassa@yahoo.fr