Sur une classe d'algèbres topologiques

M. Akkar A. Beddaa M. Oudadess

Abstract

We introduce a class of topological algebras which is between the class of Q-algebras and that of advertibly complete ones. We give some properties of this class and characterize it in the normed and the multiplicative cases. Some questions, in particular the boundedness of multiplicative functionals, are discussed.

1 Introduction

Dans ce travail, nous introduisons une classe d'algèbres topologiques que nous appelons $\mathcal{A}$. Cette classe contient la classe $\mathcal{Q}$ des Q-algèbres topologiques (i.e celles dont l'ensemble des éléments inversibles est ouvert). Elle est contenue dans la classe $\mathcal{D}$ des algèbres "advertibly complete" au sens de S. Warner ([13]) et A. Mallios ([8]). Ces inclusions sont, en général, strictes. Nous montrons que dans le cas normé, la classe $\mathcal{A}$ coïncide avec $\mathcal{Q}$. Nous montrons aussi que les algèbres localement multiplicativement convexes (a.l.m.c.) qui appartiennent à $\mathcal{A}$ sont exactement celles qui sont pleines dans leurs complétées. Nous en déduisons que dans ce cas $\mathcal{A}$ et $\mathcal{D}$ coïncident. La multiplicativité locale est nécessaire pour ce dernier résultat. En fait, nous donnons un exemple d'une a.l.c. complète qui n'appartient pas à $\mathcal{A}$.

La classe $\mathcal{A}$ est stable par produit quelconque et par limite projective; et les sous-algèbres pleines d'éléments de $\mathcal{A}$ sont dans $\mathcal{A}$. Nous montrons que dans la classe $\mathcal{A}$, la convergence des séries géométriques est équivalente à celle des suites puissances (proposition 3.7). Ceci montre que les éléments réguliers dans les algèbres de cette classe sont de spectre borné.

Received by the editors February 1995
Communicated by J. Schmets
AMS Mathematics Subject Classification : 46H20, 46H05, 46H99.
Keywords : Algèbre topologique, Q-algèbre, advertiblement convergente, advertiblement complète, complétée, caractère, spectre, élément régulier.

Dans la partie 4, en caractérisant les a.l.m.c.(non nécessairement complètes) qui sont dans $\mathcal{A}$, nous montrons que plusieurs propriétés d'a.l.m.c. complètes restent vraies pour celles-ci. Ainsi, nous retrouvons facilement, comme conséquences, des résultats obtenus par A. Mallios dans ([8]).

Dans les algèbres normées advertiblement complètes (i.e qui sont des Q-algèbres), tout caractère est continu. Le problème de savoir si tout caractère dans une a.l.m.c. commutative complète est borné (problème de Michael) est toujours ouvert. En utilisant un travail de W. Zelazko, nous montrons que la réponse à ce problème est négative dans la classe des a.l.m.c. advertiblement complètes.

Il est démontré dans ([1]) et dans ([11]) que dans une a.l.m.c. commutative complète dont tout élément est régulier, l'ensemble des caractères non nuls est équiborné. Nous étendons ce résultat aux a.l.A-convexes introduites dans ([7]). Nous montrons aussi que ceci ne reste pas vrai dans le cas advertiblement complet.

Jusqu'à présent, on ne sait pas si une a.l.m.c. commutative complète dont tout élément est régulier est une "pseudo-Banach algebra" au sens de([5]) (i.e tout borné est régulier). Nous donnons un exemple d'une a.l.m.c. advertiblement complète commutative dont tout élément est régulier et admettant des bornés non réguliers. Enfin, nous caractérisons les a.l.m.c. advertiblement complètes dont tout élément est régulier et nous donnons un théorème de structure de ces algèbres.

2 Préliminaires

Dans tout ce qui suit, les algèbres considérées seront complexes, associatives et unitaires; l'unité est notée e.

Soient A une algèbre et B une sous-algèbre de A. On dit que B est pleine dans A si tout élément de B inversible dans A est inversible dans B (i.e G(A) $\cap$ B=G(B)), où G(A) désigne l'ensemble des éléments inversibles de A. On appelle Spectre d'un élément $x \in$ A l'ensemble Spx =$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \notin$ G(A)$\}$. Le rayon spectral de x est le nombre $\rho(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in Spx\}$.

Une algèbre topologique est une algèbre munie d'une topologie vectorielle telle que le produit soit séparement continu. Elle est dite A-normée si sa topologie est définie par une seule norme d'espace vectoriel. Une algèbre topologique A est dite une Q-algèbre si G(A) est ouvert. Elle est dite localement convexe (a.l.c.) si sa topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Si $(p_\lambda)_\lambda$ vérifie

$$p_\lambda(xy) \leq p_\lambda(x)p_\lambda(y) \text{ , pour tous } x, y \in A \text{ et tout } \lambda \in \Lambda$$

on dit que A est localement multiplicativement convexe (a.l.m.c.).

On dit qu'une a.l.c. est localement A-convexe (a.l.A-convexe) si sa topologie est définie par une famille de semi-normes $(p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ vérifiant :

$\forall\lambda \in \Lambda$, $\forall\ x \in$ A, $\exists\ M(\lambda, x) > 0$, $\exists\ N(\lambda, x) > 0$ tels que :
$p_\lambda(xy) \leq M(\lambda, x)p_\lambda(y)$ et $p_\lambda(yx) \leq N(\lambda, x)p_\lambda(y)$, pour tout $y \in$ A.

Soient A une algèbre topologique et $x \in$ A. On appelle rayon de régularité de x le nombre :

$$\beta(x) = \inf\{\alpha > 0 \mid \text{la suite } (\tfrac{x^n}{\alpha^n})_n \text{ soit bornée}\}.$$

On dit que x est régulier si $\beta(x)$ est fini. Un borné de A est dit régulier s'il est absorbé par un disque borné idempotent. L'algèbre A est dite β−régulière si β transforme tout borné de A en un borné de $\mathbb{R}^+$. Une a.l.c. est dite m−tonnelée si tout tonneau (i.e disque fermé et absorbant) idempotent est un voisinage de zéro.

3 Classe $\mathcal{A}$

Définition 3.1 : Soient A une algèbre topologique et $(x_\lambda)_\lambda$ une suite généralisée dans A. On dit que $(x_\lambda)_\lambda$ est advertiblement convergente s'il existe un élément $x \in$A tel que les suites $(xx_\lambda)_\lambda$et $(x_\lambda x)_\lambda$ convergent vers l'élément unité e.

Remarques 3.1 :

(1) Si $(x_\lambda)_\lambda$ est convergente vers un élément inversible, alors elle est advertiblement convergente.

(2) Il existe des algèbres topologiques admettant des suites advertiblement convergentes non convergentes (cf exemple 4.1).

Définition 3.2 : On dit qu'une algèbre topologique a la propriété (T) si toute suite généralisée advertiblement convergente est convergente. On note par $\mathcal{A}$ la classe des algèbres ayant la propriété (T).

Commençons par donner la proposition suivante qui sera utile par la suite.

Proposition 3.1 : Soit A une algèbre topologique et $(x_\lambda)_\lambda$ une suite advertiblement convergente.

(1) Soit $x \in$A tel que $(xx_\lambda)_\lambda$ et $(x_\lambda x)_\lambda$ soient convergentes vers e. Alors $(x_\lambda)_\lambda$ est convergente si et seulement si x est inversible (dans ce cas $\lim\limits_\lambda x_\lambda = x^{-1}$).

(2) Si A est séparée, alors il existe un et un seul x dans A tel que $(xx_\lambda)_\lambda$ et $(x_\lambda x)_\lambda$ soient convergentes vers e.

Preuve : Il suffit d'utiliser la continuité séparée du produit et l'unicité de la limite dans le cas séparé.

EXEMPLES :

(1) Toute algèbre de Banach (A, $\| \ \|$) appartient à $\mathcal{A}$. En effet, si $x \in$ A et $(x_n)_n$ est une suite dans A telle que $(xx_n)_n$ et $(x_n x)_n$ convergent vers e, alors, pour n assez grand, on aura $\|xx_n - e\| < 1$ et $\|x_n x - e\| < 1$. D'où x est inversible et $(x_n)_n$ est convergente.

(2) Soit $\mathcal{M}$[0,1]l'algèbre des fonctions mesurables sur [0,1]et à valeurs complexes. Considérons l'algèbre quotient A=$\mathcal{M}[0,1]/\mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est l'idéal des fonctions nulles presque partout. L'algèbre A munie de la topologie de la convergence en mesure est une algèbre topologique métrisable complète([12]). Elle appartient à la classe $\mathcal{A}$. En effet, si $f \in$ A et $(f_n)_n$ une suite dans A telle que $(ff_n)_n$ converge vers la fonction constante 1, alors il existe une sous−suite telle que $(ff_{n_k})_k$ converge

presque partout vers 1. D'où $\{x \mid f(x) = 0\}$ est de mesure nulle. Par suite f est inversible dans A et $(f_n)_n$ converge vers f^{-1}.

(3) Soit C($\mathbb{R}$) l'algèbre des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$, munie de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes. Si $f \in$ C($\mathbb{R}$) et $(f_n)_n$ une suite telle que $(ff_n)_n$ converge vers la fonction constante 1, alors f ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$. D'où f est inversible et par suite $(f_n)_n$ est convergente. Ainsi C($\mathbb{R}$) est dans la classe $\mathcal{A}$. Nous verrons plus loin qu'en fait toute a.l.m.c. complète est dans $\mathcal{A}$.

Remarque 3.2 : Comme dans l'exemple 1, on montre que toute Q−algèbre topologique appartient à la classe $\mathcal{A}$. On désigne par $\mathcal{Q}$ la classe des Q−algèbres topologiques. On a donc $\mathcal{Q} \subset \mathcal{A}$. Cette inclusion est, en général, stricte (Exemple 3 ci−dessus). Cependant on a la :

Proposition 3.2 : Soit A une algèbre normée. Alors : A est une Q−algèbre si et seulement si A $\in \mathcal{A}$.

Preuve : Supposons que A $\in \mathcal{A}$, on va montrer que A est pleine dans sa complétée Ã. Soient $x \in$ A $\cap$ G(Ã) et $y \in$ Ã tel que $xy = yx = e$. Il existe donc une suite $(x_n)_n$ de Cauchy dans A qui converge vers y dans Ã. D'où $(x_n)_n$ est advertiblement convergente donc convergente dans A. Par suite $x \in$ G(A). Ainsi G(A) est ouvert car G(Ã) l'est.

Remarque 3.3 : La proposition précédente n'est pas vraie dans une algèbre A−normée quelconque (La multiplication du produit est nécessaire). En effet, considérons l'algèbre A des fonctions f, mesurables sur [0,1], à valeurs complexes et qui sont de la forme $f = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_{\mathrm{i}}\chi_{A_{\mathrm{i}}}$; avec n $\in \mathbb{N}$ et $(A_{\mathrm{i}})_{1\leq \mathrm{i}\leq \mathrm{n}}$ une partition de [0,1]telle que mes$(A_{\mathrm{i}}) >$ 0, pour tout i=1,2,3,....,n. Munie de la norme définie par : $\|f\|_1 = \int_{[0,1]} |f(t)|dt$, l'algèbre A est A−normée. Elle vérifie (T) car si $f \in$ A et $(f_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}}$ est une suite dans A telle que $(ff_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}}$ converge vers 1 dans A, alors il existe une sous−suite $(ff_{\mathrm{n_k}})_{\mathrm{k}}$ qui converge presque partout vers 1. D'où $f(x) \neq 0$ pour presque tout x. Donc, $\lambda_{\mathrm{i}} \neq 0$, pour tout i $\in$ {1,2,...,n}. Par conséquent, f est inversible dans A. Mais A n'est pas une Q−algèbre, car sinon, il existerait $\alpha > 0$ tel que $1+f$ soit inversible dans A, pour tout f vérifiant $\|f\| < \alpha$. Mais si on considère la fonction définie sur [0,1]par :

$$f(x)=1 \text{ si } x \in [0,\frac{\alpha}{2}] \text{ et } f(x) = 0, \text{ si } x \in]\frac{\alpha}{2},\ 1],$$

on aura : $\|f\|_1 = \dfrac{\alpha}{2} < \alpha$, alors que, $1+f$ n'est pas inversible dans A car $1+f = 0$ sur $[0, \dfrac{\alpha}{2}]$ qui est de mesure strictement positive.

Nous donnons maintenant quelques propriétés de stabilité de la classe $\mathcal{A}$.

Proposition 3.3 :

(1) Le produit d'une famille d'algèbres de la classe $\mathcal{A}$ (muni de la topologie produit) est dans $\mathcal{A}$.

(2) Toute sous−algèbre fermée B d'une algèbre A appartenant à $\mathcal{A}$, appartient à $\mathcal{A}$.

(3) Toute sous−algèbre pleine d'une algèbre appartenant à $\mathcal{A}$, appartient à $\mathcal{A}$.

Preuve : (1) Soit $(\mathrm{A}_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{A}$. Considérons l'algèbre produit $\mathrm{A} = \prod_{i\in I} A_i$ munie de la topologie produit. Soit $(x_\lambda)_\lambda$ une suite advertiblement convergente dans A. Si p_i désigne la projection de A sur $\mathrm{A_i}$, la suite $(\mathrm{p}_i(x_\lambda))_\lambda$ est advertiblement convergente dans A_i donc convergente. Notons y_i sa limite. On vérifie que la suite $(x_\lambda)_\lambda$ est convergente vers $(y_i)_{i\in I}$.

(2) Soit $(x_\lambda)_\lambda$ une suite advertiblement convergente dans B. Elle est advertiblement convergente dans A donc convergente (dans A). Comme B est fermé dans A, $(x_\lambda)_\lambda$ est convergente dans B.

(3) Soit A$\in \mathcal{A}$ et B une sous-algèbre pleine de A. Soient $x \in$ B et $(x_\lambda)_\lambda$ dans B telle que $(xx_\lambda)_\lambda$ et $(x_\lambda x)_\lambda$ convergent vers e dans B donc dans A. D'où x est inversible dans A. Mais B est pleine dans A, x est alors inversible dans B et $(x_\lambda)_\lambda$ est convergente vers x^{-1}.

Corollaire 3.1 : La classe $\mathcal{A}$ est stable par limite projective.

Preuve : La limite projective étant une sous-algèbre pleine du produit, le résultat se déduit de ce qui précède.

Corollaire 3.2 : Toute a.l.m.c. complète appartient à $\mathcal{A}$.

Preuve : Une telle algèbre s'écrit comme limite projective d'algèbres de Banach([9]).

Proposition 3.4 : Soit A une algèbre appartenant à $\mathcal{A}$ et I un idéal fermé dans A. Alors A/I munie de la topologie quotient appartient à $\mathcal{A}$.

Preuve : Soit s la surjection canonique de A sur A/I. Si $(\mathrm{s}(x_i))_i$ est une suite advertiblement convergente dans A/I, alors $(x_i)_i$ est advertiblement convergente, donc convergente dans A. Par suite $(\mathrm{s}(x_i))_i$ est convergente.

Remarque 3.4 : La réciproque de la proposition précédente est, en général, fausse. En effet, si on considère l'algèbre $\mathbb{C}$[X]des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$, munie de la norme $\|P(X)\| = \sup\{|P(z)| \mid |z| \leq 1\}$, alors $\mathbb{C}$[X]n'appartient pas à $\mathcal{A}$ (car ce n'est pas une Q-algèbre). Mais, si on considère l'idéal I $= \{P \mid P(0) = 0\}$, alors A/I est algèbriquement et topologiquement isomorphe à $\mathbb{C}$ qui appartient à $\mathcal{A}$.

Proposition 3.5 : Soient (A,T) une algèbre topologique appartenant à $\mathcal{A}$ et $\mathcal{T}$ une topologie d'algèbre plus fine que T. Alors (A,$\mathcal{T}$) appartient aussi à $\mathcal{A}$.

Corollaire 3.3 : L'algèbre A $= \mathbb{C} \times \mathcal{K}(\mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, constantes hors d'un compact, munie de la norme $\| \ \|_\infty$ est une Q-algèbre.

Preuve : La norme $\| \ \|_\infty$ est plus fine que la topologie T de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{R}$. L'algèbre (A, T) appartient à $\mathcal{A}$. On a donc le résultat par la proposition précédente et la proposition 3.2.

Proposition 3.6 : Soit A une algèbre topologique telle que l'ensemble des caractères continus non nuls M(A) soit non vide. Si la propriété :

$$(\mathcal{P}) : \text{Pour tout } x \text{ de A, } Spx = \{\chi(x) \mid \chi \in M(\mathrm{A})\}$$

est vérifiée, alors A $\in \mathcal{A}$.

Preuve : Soit $(x_\lambda)_\lambda$ une suite advertiblement convergente dans A. Soit $x \in$ A tel que $(xx_\lambda)_\lambda$ et $(x_\lambda x)_\lambda$ convergent vers l'élément unité e. Donc, pour tout $\chi \in M(\mathrm{A})$,

$(\chi(x)\chi(x_\lambda))_\lambda$ converge vers 1 dans $\mathbb{C}$. D'où $\chi(x)$ est non nul pour tout χ de $M(\mathrm{A})$. Par suite $0 \notin \mathrm{Sp}x$, ce qui veut dire que x est inversible et $(x_\lambda)_\lambda$ est convergente vers x^{-1}.

Remarque 3.5 : Nous verrons que si A est une a.l.m.c. commutative appartenant à $\mathcal{A}$, alors $(\mathcal{P})$ est vérifiée.

Il est bien connu que dans une Q−algèbre normée, la série géométrique $\sum x^n$ est convergente pour tout x appartenant à la boule unité ouverte. Dans ce qui suit, nous étendons ce résultat à la classe $\mathcal{A}$.

Proposition 3.7 : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Alors pour tout $x \in \mathrm{A}$, on a :

(1) la série $\sum x^n$ est convergente si et seulement si la suite $(x^n)_n$ converge vers 0.

(2) $\rho(x) \leq \beta(x)$; où ρ et β désignent respectivement le rayon spectral et le rayon de régularité.

(3) si, de plus, A est fortement séquentielle, alors A est une Q−algèbre.

Preuve : (1) Posons $S_n = e + x + x^2 + ... + x^n$. On a : $S_n(e-x) = (e-x)S_n = e - x^{n+1}$. Si $(x^n)_n$ converge vers 0, alors, par la propriété (T), $(e - x)$ est inversible et $(S_n)_n$ est convergente.

(2) Il suffit de montrer que $\beta(x) < 1$ entraîne $\rho(x) \leq 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$. Supposons que $\beta(x) < 1$. Donc $\beta(\frac{x}{\lambda}) < 1$. D'où$\left(\frac{x^n}{\lambda^n}\right)_n$ converge vers 0 dans A. Par (1), $(e - \frac{x}{\lambda})$ est inversible dans A. D'où $\lambda \notin \mathrm{Sp}x$. Par suite $\rho(x) \leq 1$.

(3) Si A est fortement séquentielle, il existe un voisinage V de 0 tel que $(x^n)_n$ converge vers 0, pour tout $x \in \mathrm{V}$. Par (1), $(e - x)$ est inversible pour tout $x \in \mathrm{V}$. D'où A est une Q−algèbre.

Corollaire 3.4 : Si $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ et si A est β−régulière, alors l'ensemble des caractères non nuls de A est équiborné. En particulier tout caractère est borné.

Corollaire 3.5 : Si $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ et si A est β−régulière bornologique, alors A est une Q−algèbre topologique. En particulier l'ensemble des caractères est équicontinu.

4 Algèbres l.m.convexes advertiblement complètes

Nous nous intéressons maintenant à la classe des a.l.m.c. qui vérifient la propriété (T). Dans [13] , S. Warner a défini les a.l.m.c. "advertibly complete". Dans [8] , A. Mallios a étendu cette définition aux algèbres topologiques quelconques et a donné la définition suivante :

Définition ([8]) **:** Une algèbre topologique A non unitaire est dite "advertibly complete" si toute suite généralisée $(x_\lambda)_\lambda$ de Cauchy est convergente dès qu'il existe $x \in \mathrm{A}$ tel que $(xox_\lambda)_\lambda$ et $(x_\lambda ox)_\lambda$ convergent vers 0; où $x_\lambda ox = xx_\lambda - x_\lambda - x$.

Dans le cas unitaire, nous donnons la définition analogue suivante :

Définition 4.1 : Une algèbre topologique est dite advertiblement complète si toute suite généralisée de Cauchy, advertiblement convergente, est convergente.

Remarque 4.1 : Soit A une algèbre topologique, non unitaire. Alors A est "advertibly complete" au sens de A. Mallios si et seulement si l'algèbre $A^{\#}$ obtenue par adjonction d'une unité est advertiblement complète.

Notons par $\mathcal{D}$ la classe des algèbres topologiques advertiblement complètes. Il est clair que $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Cette inclusion est, en général, stricte. En fait, il existe des algèbres topologiques advertiblement complètes (même complètes) qui n'appartiennent pas à $\mathcal{A}$(voir exemple 4.1). Cependant on a la :

Proposition 4.1 : Soit (A,$(p_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$) une a.l.m.c. Alors A est advertiblement complète si et seulement si A vérifie la propriété (T).

Preuve : Supposons que A est advertiblement complète. Soient $x \in$ A et $(x_\lambda)_\lambda$ une suite généralisée dans A telle que $(xx_\lambda)_\lambda$ converge vers e. Pour tout $\alpha \in \Gamma$, $(\pi_\alpha(x).\pi_\alpha(x_\lambda))_\lambda$ converge vers $\pi_\alpha(e)$ dans $\tilde{A}_\alpha$; où $\tilde{A}_\alpha$ désigne la complétée de l'algèbre normée $A_\alpha = A/\ker p_\alpha$, munie de la norme $\|\pi_\alpha(x)\|=p_\alpha(x)$ et π_α désigne la surjection canonique de A sur A_α. Puisque $\tilde{A}_\alpha$ est une algèbre de Banach, elle a la propriété (T). Donc $\pi_\alpha(x)$ est inversible dans $\tilde{A}_\alpha$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \Gamma$, donc x est inversible dans A ([8]).

Remarque 4.2 : La multiplicativité locale est nécessaire dans la proposition précédente, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 4.1 : Soient $C_b(\mathbb{R})$ l'algèbre des fonctions complexes continues et bornées sur $\mathbb{R}$ et $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues, strictement positives et tendant vers 0 à l'infini. Pour $\Phi \in C_0(\mathbb{R})$, considérons la semi-norme $p_\Phi(f) = \sup\{\Phi(x)|f(x)| \mid x \in \mathbb{R}\}$. L'algèbre $(C_b(\mathbb{R}), (p_\Phi)_\Phi)$ est une a.l.c. complète qui n'est pas multiplicativement convexe([7]). Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ si } x\geq 0 \text{ et } f(x) = 1 \text{ si } x \leq 0.$$

Considérons la suite$(f_n)_n$ dans $C_b(\mathbb{R})$ définie par :

$$f_n(x) = 1 + x^2 \text{ si } 0 \leq x \leq n \quad f_n(x) = 0 \text{ si } 1+ n \leq x$$
$$f_n(x) = 1 \text{ si } x \leq 0 \quad f_n \text{ est linéaire sur } [n, n+1].$$

On a pour tout $\Phi \in C_0(\mathbb{R})$:
$p_\Phi(ff_n-1) = \sup\{|f(x)f_n(x)-1|\Phi(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \sup\{|f(x)f_n(x)-1|\Phi(x) \mid x \geq n\}$. Puisque $-1\leq f(x)f_n(x) - 1 \leq 1$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_\Phi(ff_n - 1) \leq \sup\{\Phi(x) \mid x \geq n\}$. Comme Φ est nulle à l'infini, $p_\Phi(ff_n - 1)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi $(f_n)_n$ est advertiblement convergente non convergente dans $C_b(\mathbb{R})$ (car f n'est pas inversible).

Nous caractérisons maintenant les a.l.m.c. advertiblement complètes. Cette caractérisation nous permettra de retrouver facilement des résultats donnés par A. Mallios dans ([8]).

Proposition 4.2 : Soit A une a.l.m.c. séparée. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est advertiblement complète.

(ii) A est pleine dans sa complétée $\tilde{A}$.

Preuve : (i)$\Rightarrow$(ii) : Soit $x \in$ A inversible dans $\tilde{A}$. Donc il existe $y \in \tilde{A}$ tel que $xy = yx = e$. D'où il existe une suite généralisée $(x_i)_i$ de Cauchy telle que $(xx_i)_i$

et $(x_i x)_i$ convergent vers e. Comme A est advertiblement complète, x est inversible dans A. D'où (ii).

(ii)⇒(i) : Soit $(x_i)_i$ une suite généralisée de Cauchy, advertiblement convergente. Il existe donc $x \in$ A tel que $(xx_i)_i$ et $(x_i x)_i$ convergent vers e. Soit y la limite de (x_i) dans $\tilde{\mathrm{A}}$. On a donc $xy = yx = e$. Par (ii), $y \in$ A. D'où $(x_i)_i$ est convergente dans A.

Remarque 6.3 : En utilisant la proposition précédente et la proposition 3.3, on retrouve qu'une a.l.m.c. advertiblement complète appartient à la classe $\mathcal{A}$.

Nous obtenons comme conséquences les résultats de A. Mallios suivants :

Corollaire 4.1([8]) : Soit (A, $(p_\alpha)_\alpha$) une a.l.m.c. séparée. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est advertiblement complète.

(ii) Pour tout x de A, x est inversible dans A si et seulement si x_α est inversible dans $\tilde{\mathrm{A}}_\alpha$, où x_α désigne la classe de x modulo l'idéal $\mathrm{N}_\alpha = \{x / p_\alpha(x) = 0\}$ et A_α est l'algèbre quotient $\mathrm{A}/\mathrm{N}_\alpha$, munie de la norme $\| x_\alpha \| = p_\alpha(x)$.

Preuve : (i) ⇒ (ii) : Supposons que A est advertiblement complète et soit $x \in$ A. Par la proposition précédente, on a x est inversible dans A si et seulement si x est inversible dans $\tilde{\mathrm{A}}$. Mais $\tilde{\mathrm{A}}$ est une a.l.m.c. complète. Donc x est inversible dans $\tilde{\mathrm{A}}$ si et seulement si x_α est inversible dans $\tilde{\mathrm{A}}_\alpha$([9]). D'où (ii).

(ii) ⇒ (i) : Par le même raisonnement que précédemment, on montre que (ii) entraine que A est pleine dans sa complétée $\tilde{\mathrm{A}}$.

Corollaire 4.2([8],Theorem 6.1) : Soit (A,$(p_\alpha)_\alpha$) une a.l.m.c. advertiblement complète. Alors :

(i) le rayon spectral $\rho(x) = \sup\left\{ \lim_{\mathrm{n}\to+\infty} \left(p_\alpha(x^{\mathrm{n}})\right)^{\frac{1}{\mathrm{n}}} \mid \alpha \in \Gamma\right\}$, pour tout $x \in$ A.

(ii) $\mathrm{Sp}x = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{A}}_\alpha} x_\alpha$, pour tout $x \in$ A.

Preuve : (i) : Du fait que $\rho_{\mathrm{A}}(x) = \rho_{\tilde{\mathrm{A}}}(x)$, pour tout $x \in$ A et que la formule est vraie dans $\tilde{\mathrm{A}}$ qui est une a.l.m.c. complète ([9]).

(ii) : Car $\mathrm{Sp}_{\mathrm{A}} x = \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{A}}} x$, pour tout $x \in$ A et $\mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{A}}} x = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} \mathrm{Sp}_{\tilde{\mathrm{A}}_\alpha} x_\alpha$, pour tout x dans $\tilde{\mathrm{A}}$([9]).

On sait que dans une a.l.m.c. commutative et complète, la propriété $(\mathcal{P})$ est vérifiée ([9]). En utilisant ce résultat, nous obtenons le :

Corollaire 4.3([8]) : Soit A une a.l.m.c. commutative séparée. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est advertiblement complète.

(ii) Pour tout x de A, $\mathrm{Sp}x = \{\chi(x) \mid \chi \in M(\mathrm{A})\}$.

Continuité des caractères dans les a.l.m.c. advertiblement complètes

On a vu que les algèbres normées advertiblement complètes sont des Q−algèbres. Donc l'ensemble des caractères est équicontinu. En particulier tout caractère est continu. Dans la classe des a.l.m.c. commutatives complètes (qui est une sous−classe de celle des a.l.m.c. advertiblement complètes), le problème de savoir si tout caractère est borné (problème de Michael) est toujours ouvert. Nous montrons que la réponse à ce problème est négative dans la classe des a.l.m.c. advertiblement complètes. En fait, on a le résultat suivant :

Théorème 4.1 : Soit A une a.l.m.c commutative de Fréchet qui n'est pas une Q−algèbre. Alors, il existe une sous−algèbre de A, advertiblement complète et admettant un caractère discontinu.

Preuve : Puisque A n'est pas une Q−algèbre, elle contient un idéal maximal M de codimension infinie ([14]). Considérons B $=$ M $+ \mathbb{C}e$, munie de la topologie induite. L'algèbre B est une a.l.m.c. métrisable non complète (sa complétée est A). Elle est advertiblement complète. En effet, si $x =$ m $+ \lambda e \in$ B est inversible dans A, alors $\lambda \neq 0$. Soit $y \in$ A tel que (m $+ \lambda e)y{=}e$. Donc $y = -\frac{1}{\lambda}\mathrm{m}y + \frac{1}{\lambda}e$. Or -m$y$ $\in$ M. D'où $y \in$ B. Ainsi B est pleine dans sa complétée. Considérons le caractère χ de B défini par $\chi(\mathrm{m}+\lambda e)=\lambda$. Il est discontinu car ker$\chi=$ M n'est pas fermé dans B (puisque M est dense dans A).

Algèbres l.m.c à éléments réguliers

M. Akkar ([1]) et M. Oudadess ([11]) ont montré que dans une a.l.m.c. commutative complète dont tout élément est régulier, l'ensemble des caractères non nuls est équiborné. Ce résultat n'est pas vrai dans les a.l.m.c. advertiblement complètes (voir exemple 4.2). Cependant, on a la généralisation suivante d'un résultat de W. Zelazko([14]) :

Proposition 4.3 : Soit (A,$\mathcal{T}$) une a.l.m.c. commutative, advertiblement complète. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Le Spectre de tout élément est borné.
(2) Le Spectre de tout élément est compact.
(3) Tout élément est régulier.
(4) Il existe sur A une topologie $\mathcal{T}^*$ de Q−a.l.m.c. plus fine que $\mathcal{T}$.
(5) L'ensemble $M^{\#}$(A) des caractères non nuls est faiblement compact.

Preuve : (1) $\Rightarrow$ (2) : Puisque A est une a.l.m.c. commutative et advertiblement complète, on a, Sp$x = \{ \chi(x)/ \ \chi \ \in$M(A)$\}$, pour tout $x \in$ A et donc Rad A $= \bigcap\{$ kerχ, $\chi \ \in$ M(A)$\}$, où M(A) désigne l'ensemble des caractères non nuls continus de A. Considérons l'algèbre quotient

B $=$ A /Rad A munie de la norme $\|\mathrm{cl}x\| = \rho_{\mathrm{A}}(x) = \sup\{ |\chi(x)|, \chi \ \in \mathrm{M(A)}\}$. Mais $\mathrm{Sp_B cl}x = \mathrm{Sp_A}x$, donc $\|\mathrm{cl}x\| = \rho_{\mathrm{B}}(\mathrm{cl}x)$, pour tout x de A. D'où B est une Q−algèbre. On en déduit que tout $x \in$ A est à spectre compact.

(2) $\Rightarrow$ (3) : L'inverse étant continu dans A, on a Sp$x \subset \ \sigma(x) \subset \overline{\mathrm{Sp}\mathrm{x}}$, où la fermeture est prise dans $\mathbb{C}^\infty = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ (cf, [4]). Donc par l'assertion (2), $\sigma(x) =$ Spx est un compact de $\mathbb{C}$. Donc $+\infty \ \notin \ \sigma(x)$, pour tout $x \in$ A. D'où (3).

(3) $\Rightarrow$ (1) : Comme A est une a.l.m.c. advertiblement complète, elle appartient à $\mathcal{A}$. Par la proposition 3.7, on a, $\rho_{\mathrm{A}}(x) \leq \beta(x) < +\infty$.

(2) $\Rightarrow$ (4) : Considérons la topologie $\mathcal{T}^*$ définie par la famille de semi-normes $(\mathrm{q}_\alpha)_\alpha$ avec :

$$\mathrm{q}_\alpha(x) = \mathrm{Max}(\mathrm{p}_\alpha(x), \rho_{\mathrm{A}}(x)).$$

Le rayon spectral ρ_{A} est une semi-norme sous-multiplicative continue pour $\mathcal{T}^*$. D'où $(\mathrm{A},\mathcal{T}^*)$ est une Q-a.l.m.c. La topologie $\mathcal{T}^*$ est trivialement plus fine que $\mathcal{T}$.

(4) $\Rightarrow$ (5) : Puisque $(\mathrm{A},\mathcal{T}^*)$ est une Q-algèbre, $M^{\#}(\mathrm{A})=M(\mathrm{A})$ est un compact pour la topologie faible.

(5) $\Rightarrow$ (2) : Du fait que $\rho_{\mathrm{A}}(x)=\sup \{|\chi(x)| \mid \chi \in M^{\#}(\mathrm{A})\}$.

Proposition 4.4 : Soit $(\mathrm{A},\mathcal{T})$ une a.l.m.c. commutative, advertiblement complète. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) L'espace $\mathrm{M}^{\#}(\mathrm{A})$ des caractères non nuls de A est équiborné.

(2) Le rayon spectral ρ est borné i.e l'image de tout borné est bornée.

(3) Il existe sur A une topologie $\mathcal{T}^*$ de Q-a.l.m.c. plus fine que $\mathcal{T}$ et ayant les mêmes bornés que $\mathcal{T}$.

Preuve : De la même façon que dans ([1]).

Corollaire 4.4 : Soit $(\mathrm{A},\mathcal{T})$ une a.l.m.c. commutative, advertiblement complète et m-tonnelée. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) A est une Q-algèbre.

(2) Pour tout $x \in \mathrm{A}$, $\rho(x) < +\infty$.

(3) $M^{\#}(\mathrm{A})$ est équicontinu.

(4) M(A) est compact (pour la topologie faible).

Remarques 4.4

(1) Dans ([10]), M. Oudadess a défini dans toute a.l.A-convexe unitaire $(\mathrm{A},\mathcal{T})$ une topologie $\mathrm{M}(\mathcal{T})$ d'a.l.m.c. Si $\mathcal{T}$ est complète, alors $\mathrm{M}(\mathcal{T})$ l'est aussi et dans ce cas $\mathcal{T}$ et $\mathrm{M}(\mathcal{T})$ ont les mêmes bornés ([3]). Donc le théorème principal de [1] est vrai dans toute a.l.A-convexe complète.

(2) Si $(\mathrm{A},\mathcal{T})$ est une a.l.A-convexe, advertiblement complète, $(\mathrm{A}, \mathrm{M}(\mathcal{T}))$ est aussi advertiblement complète. Mais $\mathrm{M}(\mathcal{T})$ et $\mathcal{T}$ n'ont pas nécessairement les mêmes bornés. Pour voir ceci, il suffit de considérer l'algèbre A de l'exemple donné dans la remarque 3.3.

Le problème de savoir si une a.l.m.c. commutative et complète dont tout élément est régulier est une "pseudo-Banach algebra"au sens de ([5]) reste ouvert. Le meilleur résultat dans cette direction est celui obtenu par M. Oudadess ([11] , proposition 4.1, p.108). Nous montrons que dans les a.l.m.c. advertiblement complètes, la réponse à ce problème est négative. En effet, considérons l'exemple :

Exemple 4.2 :

Considérons l'algèbre $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^+)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, constantes à partir d'un certain réel positif. Munie de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de $\mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^+)$ est une a.l.m.c. métrisable non complète. Elle est advertiblement complète (car elle est pleine dans sa complétée $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+)$). Il est clair que tout élément est régulier. Mais les bornés ne sont pas tous réguliers; car sinon, $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{+})$ serait une Q−algèbre (d'après [6]). L'ensemble des caractères n'est pas équiborné. En fait, il existe des caractères discontinus. Pour cela, il suffit de considérer le caractère φ définie sur $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^{+})$ par :

$$\varphi(f) = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Nous finissons en donnant un théorème de structure analogue à celui de M. Akkar dans le cas complet ([2]). Plus précisement, nous avons le :

Théorème 6.2 : Toute a.l.m.c. advertiblement complète séparée est limite inductive bornologique d'a.l.m.c. advertiblement complètes métrisables.

References

[1] M. Akkar "Caractérisation des algèbres localement m−convexes dont l'ensemble des cara_ ctères est équiborné" (à paraître dans Colloquium. Math (94)).

[2] M. Akkar "Sur la structure des algèbres topologiques multiplicativement convexes" C.R. Acad. Sc. Paris. t.279(1974) Serie A pp 941-943.

[3] M. Akkar, L. Oubbi et M. Oudadess "Algèbres A−convexes et problème de Michael" Proc. Amer. Math. Society, 110, n^o 1 (1990) pp 97-101.

[4] G. R. Allan "A spectral theory for locally convex algebras" Proc. London. Math. Soc (3) 15 (1965) pp 399-421.

[5] G. R. Allan, H.G. Dales, J.P. Mcclure "Pseudo−Banach algebras" Studia. Math. XL. (1971), pp 55-69.

[6] Alberto Arosio "Locally convex inductive limits of normed algebras" Rend. Univ. Padova. Vol 51, (1974) pp 333-359.

[7] A. C. Cochran, R. Keown and C. R. Williams "On a class of topological algebras" Pacific J. Math. 34(1970), 17-25.

[8] A. Mallios "Topological algebras", Selected topics. North Holland 1986.

[9] E. A. Michael "Locally multiplicatively convex topological algebras" Providence. Mem. Amer. Math. Soc (1952).

[10] M. Oudadess "Unité et semi-norme dans les algèbres localement convexes" Rev. Colom. Mat. Vol XVI n^o 3-4 (1982) 141-150.

[11] M. Oudadess "A note on m−convex and Pseudo−Banach Structures" Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, Serie II, XLI(1992) pp 105-110.

[12] L. Waelbroeck "Topological vector spaces and algebras" Lectures notes in Mathematics n^o 230. Springer Verlag (1971).

[13] S. Warner "Polynomial completeness in locally multiplicatively convex algebras" Duke Math (1956) pp 1-11.

[14] W. Zelazko "On maximal ideal in commutative m−convex algebras" Studia. Math T.LVIII, (1976), pp 291-298.

M. Akkar — A. Beddaa
U.F.R de Mathématiques et d'Informatique Université Bordeaux I
351, cours de la libération
33405 Talence Cedex France

M. Oudadess
Ecole Normale Supérieure
Takaddoum B.P 5118, Rabat, Maroc