Systèmes Dynamiques sur des Éspaces de Riemann

V. Obădeanu et C. Vernic

Comme on le sait, par les méthodes classiques habituelles, à certains systèmes dynamiques on leur associe toujours des fonctions de Lagrange, si ces systèmes sont décrits par des équations différentielles ordinaires du deuxième ordre, cas dans lequel les fonctions des Lagrange sont dépendantes d'accélérations, linéaires en accélérations [1]. Si les systèmes des équations différentielles décrivant l'évolu-tion d'un système dynamique sont du premier ordre, tels comme on les rencontre souvent en chimie, biologie, économie, alors les méthodes classiques s'appliquent avec du succes seulement au cas où le nombre des paramètres d'état est paire. Les fonctions de Lagrange associés sont linéaires en vitesses [3].

Le but que nous poursuivons dans ce qui suit, est de montrer comment peuvent être déterminées des fonctions de Lagrange pour des systèmes du premier ordre, quel que soit le nombre des paramètres d'état. On va montrer que de telles fonctions existent et qu'elles (celles qu'on a déterminé) sont, généralement, quadratiques en vitesses. Une démonstration de cette proprieté a été donnée par nous sur des domains des éspaces euclidiens en [2]. Nous montrerons dans ce qui suit que la propriété reste vraie globalement sur des éspaces de Riemann.

1. Soit donnée une variété différentiable M_m et, sur elle, un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ (le cas autonome), ou, plus généralement, une fonction $X : \mathbf{R} \times M \to TM$, exprimé dans une carte locale par les composantes f^i ($X = f^i \partial / \partial x^i$). Les lignes de courant du champ X sont données dans la carte mentionée par les solutions des équations différentielles

$$\dot{x}^i = f^i(t,x). \tag{1}$$

Associons, au système (1), son système dérivé

$$\ddot{x}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^h}\dot{x}^h + \frac{\partial f^i}{\partial t}, \tag{2}$$

système qui contient évidemment, parmis ses solutions, les solutions du système (1).

Une combinaison linéaire des systèmes (1) et (2) conduit à un système d'ordre deux, qui a, parmi ses solutions, aussi les solutions de (1). Nous dirons que les systèmes (1) et (2) se transforment par un facteur intégrant (multiplicateur variationnel), suivant la formule

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.2, No.1, 1997, pp. 73-82

$$\begin{pmatrix} A_{ij} & C_{ij} \\ 0 & \delta_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}^j - \frac{\partial f^j}{\partial x^h}\dot{x}^h - \frac{\partial f^j}{\partial t} \\ \dot{x}^j - f^j \end{pmatrix} = 0.$$

Cette combinaison nous conduit aux équations

$$A_{ij}\ddot{x}^j + \left(C_{ij} - A_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j}\right)\dot{x}^j - \left(A_{ij}\frac{\partial f^j}{\partial t} + C_{ij}f^j\right) = 0, \tag{3}$$

qui sont de la forme principale

$$A_{ij}\ddot{x}^j + B_i = 0, \tag{4}$$

où

$$B_i = \left(C_{ij} - A_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j}\right)\dot{x}^j - \left(A_{ij}\frac{\partial f^j}{\partial t} + C_{ij}f^i\right). \tag{5}$$

Le système (3) a les propriétés suivantes:

1°. Toutes les solutions de (1) sont aussi des solutions pour (3).

2°. Toute intégrale première de (3) est une fonction constante sur ses trajectoires. Si l'intégrale première de (3) ne dépend pas de $\dot{x}^i$, alors elle est une véritable intégrale première pour (1) aussi.

Pour déterminer des lois de conservation aussi que d'autre propriétés pour (3), on va chercher des facteurs intégrants tels que les résultats obtenus soient interprétables pour le système (1).

La condition nécessaire et suffisante pour que le système (3) provienne du principe variationnel est que ses équations soient autoadjointes, c'est-à-dire qu'elles vérifient les relations

$$\begin{aligned} &A_{ij} = A_{ji}, \quad \frac{\partial A_{ih}}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial A_{jh}}{\partial \dot{x}^i}, \quad \det A_{ij} \neq 0 \\ &\frac{\partial B_i}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}^i} = 2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)A_{ij} \\ &\frac{\partial B_i}{\partial x^j} - \frac{\partial B_j}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x}^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial B_i}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}^i}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Soit donnée une variété différentiable M et sur $\mathbf{R}\times TM$ une fonction différentiable L, avec des valeurs réelles, satisfaisant la condition
$\det(\partial^2 L/\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j) = 0$; elle définit un système d'équations différencielles d'ordre deux, appelées les équations d'Euler–Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{7}$$

Développées, ces équations s'écrivent

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\partial\dot{x}^j}\ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial\dot{x}^i\partial t} - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0. \tag{8}$$

Il est su [1] que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations différentielles d'ordre deux, écrit sous la forme principale (4), soit lagrangien est que les conditions d'autoadjonction (6) soient accomplies.

Problème ouvert. Comparer les idées de ce travail aux resultats originaux de Udrişte [4] concernant la dynamique induite par un champ de vecteurs.

2. Supposont maintenant que la variété M est douée avec une métrique riemannienne g. On va demander que les fonctions A_{ij} dépendent seulement de x (qu'elles soient indépendentes de la vitesse et du temps). Soient celles-ci

$$A_{ij} = g_{ij}(x). \tag{9}$$

Ces hypothèses sont en concordance avec les premières relations de (6). Par consequant, les fonctions B_i de (5) deviennent

$$B_i = \left(C_{ij} - g_{ih} \frac{\partial f^h}{\partial x^j} \right) \dot{x}^j - \left(C_{ij} f^j + g_{ij} \frac{\partial f^j}{\partial t} \right). \tag{10}$$

Calculons les dérivées de B_i par rapport à x^j et les introduisons dans le deuxième groupe de relations (6). On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial \dot{x}^j} &= \frac{\partial C_{ih}}{\partial \dot{x}^j} (\dot{x}^h - f^h) + C_{ij} - g_{ih} \frac{\partial f^h}{\partial x^j} \\ \frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}^i} &= \frac{\partial C_{jh}}{\partial \dot{x}^i} (\dot{x}^h - f^h) + C_{ji} - g_{jh} \frac{\partial f^h}{\partial x^i}. \end{aligned} \tag{11}$$

Donc

$$\left(\frac{\partial C_{ih}}{\partial \dot{x}^j} + \frac{\partial C_{jh}}{\partial \dot{x}^i} \right) (\dot{x}^h - f^h) + C_{ij} + C_{ji} - g_{ih} \frac{\partial f^h}{\partial x^j} - g_{jh} \frac{\partial f^h}{\partial x^i} = 2 \dot{x}^h \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}. \tag{12}$$

Le côté droit de cette relation est linéaire en $\dot{x}^h$, donc le côté gauche doit avoir cette propriété aussi. Une telle égalité est vérifiée si les fonctions C_{ij} sont linéaires en $\dot{x}^h$. On va les supposer donc de la forme

$$C_{ij} = \gamma_{ijk} \dot{x}^k + \xi_{ij}, \tag{13}$$

Avec celles-ci, les équations (3) deviennent

$$g_{ij} \ddot{x}^j + \frac{1}{2} (\gamma_{ihk} + \gamma_{ikh}) \dot{x}^h \dot{x}^k + \left[\xi_{ih} - \gamma_{ikh} f^k - g_{ik} \frac{\partial f^k}{\partial x^h} \right] \dot{x}^h - \xi_{ih} f^h - g_{ih} \frac{\partial f^h}{\partial t} = 0, \tag{14}$$

mais les coefficients B_i s'écrivent

$$B_i = \frac{1}{2} (\gamma_{ihk} + \gamma_{ikh}) \dot{x}^h \dot{x}^k + \left[\xi_{ih} - \gamma_{ikh} f^k - g_{ik} \frac{\partial f^k}{\partial x^h} \right] \dot{x}^h - \xi_{ih} f^h - g_{ih} \frac{\partial f^h}{\partial t};$$

tel que les formules (12) s'écrivent

$$(\gamma_{ijh} + \gamma_{ihj} + \gamma_{jih} + \gamma_{jhi}) \dot{x}^h + \xi_{ij} + \xi_{ji} - (\gamma_{ihj} + \gamma_{jhi}) f^h - g_{ih} \frac{\partial f^h}{\partial x^j} - g_{jh} \frac{\partial f^h}{\partial x^i} = 2 \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \dot{x}^h. \tag{15}$$

En identifiant dans ces formules les coefficients de $\dot{x}^h$ et les termes libres on arrive au système

$$\gamma_{ijh}+\gamma_{ihj}+\gamma_{jih}+\gamma_{jhi}=2\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}, \tag{I}$$

$$\xi_{ij}+\xi_{ji}=(\gamma_{ihj}+\gamma_{jhi})f^h+g_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j}+g_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i}. \tag{II}$$

En calculant les différences des dérivées de (11) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_i}{\partial \dot{x}^j}-\frac{\partial B_j}{\partial \dot{x}^i}&=(\gamma_{ijh}+\gamma_{ihj}-\gamma_{jih}-\gamma_{jhi})\dot{x}^h+\xi_{ij}-\xi_{ji}-\\&-(\gamma_{ihj}-\gamma_{jhi})f^h-g_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j}+g_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i}.\end{aligned} \tag{16}$$

Pour écrire le dernier groupe de conditions d'autoadjonction, nous calculerons les dérivées

$$\frac{\partial B_j}{\partial x^i}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_{jhk}+\gamma_{jkh})\dot{x}^h\dot{x}^k+\left[\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i}-\frac{\partial \gamma_{jkh}}{\partial x^i}f^k-\gamma_{jkh}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{\partial f^k}{\partial x^h}-g_{ik}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i\partial x^h}\right]\dot{x}^h-\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i}f^h-\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i}f^h-\xi_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^i}\frac{\partial f^h}{\partial t}-g_{jh}\frac{\partial^2 f^h}{\partial x^i\partial t},$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x^j}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^j}(\gamma_{ihk}+\gamma_{ikh})\dot{x}^h\dot{x}^k+\left[\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j}-\frac{\partial \gamma_{ikh}}{\partial x^j}f^k-\gamma_{ikh}\frac{\partial f^k}{\partial x^j}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{\partial f^k}{\partial x^h}-g_{jk}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j\partial x^h}\right]\dot{x}^h-\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j}f^h-\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j}f^h-\xi_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^j}\frac{\partial f^h}{\partial t}-g_{ih}\frac{\partial^2 f^h}{\partial x^j\partial t}$$

ainsi que leurs différences:

$$\begin{aligned}\frac{\partial B_i}{\partial x^j}-\frac{\partial B_j}{\partial x^i}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^j}(\gamma_{ihk}+\gamma_{ikh})-\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_{jhk}+\gamma_{jkh})\right]\dot{x}^h\dot{x}^k+\\&+\left\{\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j}-\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i}-\left(\frac{\partial \gamma_{ikh}}{\partial x^j}-\frac{\partial \gamma_{jkh}}{\partial x^i}\right)f^k-\gamma_{ikh}\frac{\partial f^k}{\partial x^j}+\gamma_{jkh}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}+\right.\\&+\left.\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f^k}{\partial x^h}+g_{jk}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i\partial x^h}-g_{ik}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j\partial x^h}\right\}\dot{x}^h+\left(\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i}-\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j}\right)f^h+\\&+\xi_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i}-\xi_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j}+\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f^h}{\partial t}+g_{jh}\frac{\partial^2 f^h}{\partial x^i\partial t}-g_{ih}\frac{\partial^2 f^h}{\partial x^j\partial t}.\end{aligned} \tag{17}$$

En introduisant les expressions de (16) et (17) dans le dernier groupe de (6) et en identifiant les coefficients des termes du deuxième degré et du premier degré en $\dot{x}^h$ et respectivement, les termes libres, on obtient les équations

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^j}(\gamma_{ihk}+\gamma_{ikh})-\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma_{jhk}+\gamma_{jkh})=\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}(\gamma_{ijh}+\gamma_{ihj}-\gamma_{jih}-\gamma_{jhi})+\frac{\partial}{\partial x^h}(\gamma_{ijk}+\gamma_{ikj}-\gamma_{jik}-\gamma_{jki})\right]\end{aligned} \tag{III}$$

$$\text{(IV)}\qquad \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i} - \left(\frac{\partial \gamma_{ikh}}{\partial x^j} - \frac{\partial \gamma_{jkh}}{\partial x^i}\right) f^k - \gamma_{ikh}\frac{\partial f^k}{\partial x^j} + \gamma_{jkh}\frac{\partial f^k}{\partial x^i} +$$

$$+\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f^k}{\partial x^h} + g_{jk}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^h} - g_{ik}\frac{\partial^2 f^k}{\partial x^j \partial x^h} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^h}\left[\xi_{ij} - \xi_{ji} + (\gamma_{jki} - \gamma_{ikj}) f^k + g_{jk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i} - g_{ik}\frac{\partial f^k}{\partial x^j}\right]$$

$$\text{(V)}\quad \left(\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j}\right) f^h + \xi_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} - \xi_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j} + \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f^h}{\partial t} + g_{jh}\frac{\partial^2 f^h}{\partial x^i \partial t} -$$

$$-g_{ih}\frac{\partial^2 f^h}{\partial x^j \partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\xi_{ij} - \xi_{ji} + (\gamma_{jhi} - \gamma_{ihj}) f^h + g_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} - g_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j}\right].$$

Considérons le système réuni formé par les équations (I - V) et supposons qu'il existe une solution de celui-ci. Une telle solution existe en base de l'hypothèse d'autoadjonction. Avec elle nous sommes conduits à l'existence d'une fonction de Lagrange $L(t, x, \dot{x})$, avec laquelle les équations d'Euler–Lagrange (8) s'identifient avec (14). On a, donc

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j} = g_{ij} \tag{18}$$

d'où il en résulte qu'il est nécessaire que

$$L = \frac{1}{2} g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \alpha_i(t, x)\dot{x}^i + \beta(t, x). \tag{19}$$

En calculant maintenant les fonctions B_i, données par (8) on obtient

$$B_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^h\dot{x}^k + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial x^i}$$

et en les introduisant en (4) on obtient les équations

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^h\dot{x}^k + \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i}\right)\dot{x}^j + \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} - \frac{\partial \beta}{\partial x^i} = 0. \tag{20}$$

En identifiant les coefficients de (14) et (20) on obtient

$$\gamma_{ihk} + \gamma_{ikh} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i} = 2[hk, i].$$

Une solution de ce système peut être choisie de la forme

$$\gamma_{ihk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h}\right) = [hk, i] + \alpha_{hki},$$

où

$$\alpha_{hki} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{hi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^h}\right).$$

De plus, $\gamma_{ihk} = \partial g_{ih}/\partial x^k - \frac{1}{2}\partial g_{hk}/\partial x^i$ est une fonction indépendente de t. En tenant compte des équations (II), on peut mettre

$$\xi_{ij} = \gamma_{jhi} f^h + g_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} + \alpha_{ij}(t,x) \quad (\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0)$$

tel que

$$\xi_{ij} - \xi_{ji} = (\gamma_{jhi} - \gamma_{ihj}) f^h + \left(g_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} - g_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j} \right) + 2\alpha_{ij}$$

et donc les équations (V) s'écrivent

$$\text{(21)} \qquad \left(\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j} \right) f^h + \xi_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} - \xi_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j} + \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f^h}{\partial t}$$

$$= (\gamma_{jhi} - \gamma_{ihj})\frac{\partial f^h}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial t}.$$

Une condition suffisante que celles-ci soient satisfaites est que

$$\left(\frac{\partial \xi_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^j} \right) f^h + \xi_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} - \xi_{ih}\frac{\partial f^h}{\partial x^j} = 0$$

$$\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f^h}{\partial t} = (\gamma_{jhi} - \gamma_{ihj})\frac{\partial f^h}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial t}.$$

Mais comme

$$\gamma_{jhi} - \gamma_{ihj} = \frac{3}{2}\left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} \right)$$

il résulte

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} \right)\frac{\partial f^h}{\partial t}.$$

Par suite

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} \right) f^h = \alpha_{ijh} f^h$$

et donc

$$\xi_{ij} = g_{jh}\frac{\partial f^h}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} f^h.$$

Les fonctions

$$\begin{aligned} \gamma_{ihk} &= [hk,i] + \alpha_{hki} \\ \xi_{ih} &= \nabla_i f_h - \alpha_{hki} f^k \end{aligned}$$

vérifient toutes les équations (I - V).

Les équations (14) s'écrivent maintenant

$$g_{ij}\ddot{x}^j + \frac{1}{2}(\gamma_{ihk} + \gamma_{ikh})\dot{x}^h\dot{x}^k + \left[\frac{\partial f_h}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^h} \right]\dot{x}^h - \left[g_{hk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i} f^k \right] f^h - \frac{\partial f_i}{\partial t} = 0.$$

En identifiant les coefficients de cette équation avec ceux de (20) on obtient

$$\alpha_i = -g_{ih}f^h = -f_i, \quad \beta = \frac{1}{2}g_{hk}f^h f^k = \frac{1}{2}||f||^2;$$

il résulte ainsi la fonction de Lagrange

$$L = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - g_{ij}f^j\dot{x}^i + \frac{1}{2}g_{ij}(\dot{x}^i - f^i)(\dot{x}^j - f^j).$$

Dans la structure de la fonction L on distingue les parties:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j \quad \text{(appelee l'energie cinetique du systeme)} \\ V &= -\frac{1}{2}g_{ij}f^i f^j \quad \text{(appelee l'energie potentielle du systeme)} \\ D &= g_{ij}f^i\dot{x}^j. \end{aligned}$$

3. Le formalisme hamiltonien. Soient les fonctions

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = g_{ij}(\dot{x}^j - f^j)$$

avec leur inverses

$$\dot{x}^i = g^{ij}p_j + f^i$$

et

$$H = p_i\dot{x}^i - L = p_i(g^{ij}p_j + f^i) - \frac{1}{2}g_{ij}(\dot{x}^i - f^i)(\dot{x}^j - f^j) = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j + p_i f^i.$$

Les relations suivantes ont lieu

$$\begin{aligned} &\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = g^{ij}p_j + f^i, && \frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial L}{\partial x^i} = F_i \\ &\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial g^{hk}}{\partial x^i}p_h p_k + p_h\frac{\partial f^h}{\partial x^i}, && \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

4. Groupes de symètries. Soient le lagrangien

$$L = \frac{1}{2}g_{hk}(x)(\dot{x}^h - f^h)(\dot{x}^k - f^k) \tag{22}$$

et le champ $Y = \mathcal{X}^i\partial/\partial x^i + \tau\partial/\partial t$, défini sur $\mathbf{R} \times M$, le générateur infinitésimal du pseudogroupe

$$\begin{aligned} \overline{x}^i &= x^i + \varepsilon\mathcal{X}^i(t,x) \\ \overline{t} &= t + \varepsilon\tau(t,x). \end{aligned} \tag{23}$$

Le pseudogroupe (23) est un *pseudogroupe de symètries* pour une fonction de Lagrange $L = L(t, x, \dot{x})$ si l'expression

$$\tau\frac{\partial L}{\partial t} + \mathcal{X}^i\frac{\partial L}{\partial x^i} + \left(\frac{d\mathcal{X}^i}{dt} - \dot{x}^i\frac{d\tau}{dt}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} + L\frac{d\tau}{dt} \tag{24}$$

est la différentielle totale exacte d'une fonction $\Phi = \Phi(t, x)$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x^i}\dot{x}^i.$$

Supposons donné le lagrangien (22) et déterminons le pseudogroupe (23) par les composantes $(\tau, \mathcal{X}^i)$ de Y. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}(\dot{x}^h - f^h)(\dot{x}^k - f^k) - g_{hk}(\dot{x}^h - f^h)\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\\ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} &= g_{ih}(\dot{x}^h - f^h), \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -g_{hk}(\dot{x}^h - f^h)\frac{\partial f^k}{\partial t}.\end{aligned}$$

Supposons

$$\frac{d\mathcal{X}^i}{dt} = \frac{\partial\mathcal{X}^i}{\partial t} + \dot{x}^k\frac{\partial\mathcal{X}^i}{\partial x^k}, \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial\tau}{\partial t} + \dot{x}^k\frac{\partial\tau}{\partial x^k}.$$

Avec celles-ci l'expression (24) devient

$$\begin{aligned}&(\dot{x}^h - f^h)\left\{-g_{hk}\frac{\partial f^k}{\partial t}\tau + \left[\frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}(\dot{x}^k - f^k) - g_{hk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\right]\mathcal{X}^i\right.\\ &\left.+g_{ih}\left[\frac{\partial\mathcal{X}^i}{\partial t} + \dot{x}^k\frac{\partial\mathcal{X}^i}{\partial x^k} - \dot{x}^i\frac{\partial\tau}{\partial t} - \dot{x}^i\dot{x}^k\frac{\partial\tau}{\partial x^k}\right] + \frac{1}{2}g_{hk}(\dot{x}^k - f^k)\left(\frac{\partial\tau}{\partial t} + \dot{x}^p\frac{\partial\tau}{\partial x^p}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Une telle expression, devrant être linéaire en $\dot{x}^h$, ne peut pas contenir des termes en $\dot{x}^h\dot{x}^k\dot{x}^i$ (du troixième degré). Il resulte qu'il est nécessaire que

$$-g_{ih}\frac{\partial\tau}{\partial x^k} + \frac{1}{2}g_{ih}\frac{\partial\tau}{\partial x^k} = -\frac{1}{2}g_{ih}\frac{\partial\tau}{\partial x^k} = 0$$

c'est-à-dire $\partial\tau/\partial x^h = 0$, donc

$$\tau = \tau(t). \tag{25}$$

L'expression (24) devient donc

$$\begin{aligned}&(\dot{x}^h - f^h)\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}\mathcal{X}^i + g_{ih}\frac{\partial\mathcal{X}^i}{\partial x^k} - \frac{1}{2}g_{hk}\dot{\tau}\right)\dot{x}^k + \left(-g_{hk}\frac{\partial f^k}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}f^k\mathcal{X}^i - \right.\right.\\ &\left.\left.-g_{hk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\mathcal{X}^i + g_{ih}\frac{\partial\mathcal{X}^i}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{hk}f^k\dot{\tau}\right)\right\}\end{aligned}$$

pour que celle-ci n'ait auqu'un tèrme en $\dot{x}^h\dot{x}^k$ il est nécessaire que

$$g_{hp}\frac{\partial\mathcal{X}^p}{\partial x^k} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^p}\mathcal{X}^p = \frac{1}{2}g_{hk}\dot{\tau}, \tag{26}$$

telle que (24) devient

$$(\dot{x}^h - f^h)\left[-g_{hk}\frac{\partial f^k}{\partial t}\tau - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x^i}f^k\mathcal{X}^i - g_{hk}\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\mathcal{X}^i + g_{ih}\frac{\partial\mathcal{X}^i}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{hk}f^k\dot{\tau}\right].$$

Il résulte qu'il est nécessaire avoir:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^h} = -\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{hp}}{\partial x^i}f^p + g_{hp}\frac{\partial f^p}{\partial x^i}\right)\mathcal{X}^i + g_{hi}\frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial t} - \frac{1}{2}g_{hp}f^p\dot{\tau} - g_{hp}\frac{\partial f^p}{\partial t}\tau$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = f^h\left[\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g_{hp}}{\partial x^i}f^p + g_{hp}\frac{\partial f^p}{\partial x^i}\right)\mathcal{X}^i - g_{hi}\frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial t} + \frac{1}{2}g_{hp}f^p\dot{\tau} + g_{hp}\frac{\partial f^p}{\partial t}\tau\right].$$

Avec l'utilisation des fonctions ξ_{ij}, celles-ci deviennent

(27)
$$\frac{\partial\Phi}{\partial x^h} = -\xi_{ih}\mathcal{X}^i + \frac{\partial \mathcal{X}_h}{\partial t} - \frac{1}{2}f_h t - \frac{\partial f_h}{\partial t}\tau$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = f^h\left[\xi_{ih}\mathcal{X}^i - \frac{\partial \mathcal{X}_h}{\partial t} + \frac{1}{2}f_h\dot{\tau} + \frac{\partial f_h}{\partial t}\tau\right].$$

Les conditions de compatibilité de ce système sont

(28)
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{X}_h}{\partial x^k} - \frac{\partial \mathcal{X}_k}{\partial x^h}\right) - \left(\xi_{ih}\frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial x^k} - \xi_{ik}\frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial x^h}\right) - \left(\frac{\partial \xi_{ih}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_{ik}}{\partial x^h}\right)\mathcal{X}^i -$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^h}\right)\dot{\tau} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f_h}{\partial x^k} - \frac{\partial f_k}{\partial x^h}\right)\tau = 0$$
$$\frac{\partial^2 \mathcal{X}^h}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{X}^k}{\partial x^h \partial t}f^k - (\xi_{ik}f^k)\frac{\partial \mathcal{X}_i}{\partial x^h} + \frac{\partial f^k}{\partial x^h}\frac{\partial \mathcal{X}_k}{\partial t} - \xi_{ih}\frac{\partial \mathcal{X}^i}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x^h}(f^k\xi_{ik}) - \frac{\partial \xi_{ih}}{\partial t}\right)\mathcal{X}^i$$
$$-\frac{1}{2}f_h\ddot{\tau} - \left[\frac{3}{2}\frac{\partial f_h}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^h}(f^k f_k)\right]\dot{\tau} + \left[\frac{\partial^2 f_h}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(f^k f_k)\right)\right]\tau = 0.$$

Il résulte que pour la détermination d'un pseudogroupe de symètries $X(\tau, \mathcal{X}^i)$, les composantes de celui-ci doivent être une solution des équations (26) et (28).

Acknowledgements. A version of this paper was presented at the First Conference of Balkan Society of Geometers, Politehnica University of Bucharest, September 23-27, 1996.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics, I, The Inverse Problem in Newtonian Mechanics (1984), II, Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics, (1983)*, Springer–Verlag.

[2] V. Obădeanu et C. Vernic, *Sur certaines systèmes biodynamiques et lois de conservation associées*, Sem. de Mec., nr. 46, Tip. Univ. Timişoara (1995).

[3] V. Obădeanu, *Introducere în biodinamica analitică*, Monografii Matematice, nr. 42, Tip. Univ. Timişoara (1992).

[4] C.Udrişte and A.Udrişte, *Electromagnetic Dynamical Systems*, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 2, 1 (1997), 129-140.

West University of Timişoara
Department of Mathematics
Bd. V.Pârvan 4, 1900 Timişoara, Romania