Loi Exponentielle dans le Fibré des Jets, Symétries des Équations Différentielles et Repère Mobile de Cartan

Maido Rahula

Dedicated to Prof.Dr. Constantin UDRIŞTE
on the occasion of his sixtieth birthday

Resumé

La différentiation étant considerée comme un endomorphisme

$$U \to U' = CU$$

dans les jets infinis, le mouvement est décrit par la loi exponentielle

$$U_t = e^{tC}U,$$

ce qui permet d'en déduire les invariants

$$I = e^{-tC}U.$$

Grâce à son universalité, la loi peut être étendue au cas de transformation des champs tensoriels F par le flot du champ de vecteurs, ou le long des orbites plus générales du groupe de Lie. Nous arrivons au mouvement $F_s = e^{sC}F$ par l'intermédiaire des séries de Maclaurin avec des coefficients qui sont les dérivées de Lie dans le repère arbitraire, en particulier le repère invariant qui est très souvent préférable. La loi exponentielle est formelle du fait qu'elle reste vraie pour les champs différentiables, les séries convergentes et les structures non nécessairement locales – questions qui ne sont pas en discussion ici. Pour des exemples concrets et des applications nous renvoyons aux travaux [1]-[5].

Mathematics Subject Classification: 14B10, 34A26, 35A30, 57R45, 58A20, 58B25, 58C27, 58G35.

Key words: fibré des jets, symétries, equation différentielle

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.5, No.1, 2000, pp. 133-140

1 Loi exponentielle

Cette loi se manifeste clairement dans les jets des applications $R \to R : t \mapsto u$ dont le fibré sera noté par J. Simultanément avec les coordonnées

(1) $$t, u, u', u'', \ldots$$

dans J s'introduit la *base naturelle* – repère et corepère duals

(2) $$\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial U}\right), \left(\begin{matrix} dt \\ dU \end{matrix}\right).$$

Les symboles U et dU y notent respectivement les colonnes infinies des coordonnées $u, u', u'', \ldots$ et de leurs différentielles $du, du', du'', \ldots$, le symbole $\dfrac{\partial}{\partial U}$ la ligne infinie des opérateurs de derivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u'}, \frac{\partial}{\partial u''}, \ldots$$

Soient E la matrice unité infinie et C la matrice différant de E de la diagonale déplacée d'un pas à droite, à l'itération C^k la diagonale de E se déplace de k pas a droite. Dans l'implication suivante

(3) $$U' = CU \;\Rightarrow\; U_t = e^{tC} U_0$$

on voit une équation différentielle (à gauche) et sa solution (à droite) exprimée par l'exponentielle de la matrice tC aux conditions initiales U_0. La colonne U_t se compose des fonctions $u_t, u'_t, u''_t, \ldots$ développées en séries de Maclaurin

(4) $$u_t^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} u_0^{(k+l)} \frac{t^l}{l!},\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

La courbe (t, U_t) est traitée comme une trace du point U_0 de fibre. Nous avons ainsi dans J toute une famille de trajectoires ou un flot de champ de vecteurs appelé *l'opérateur de dérivation totale*

(5) $$D = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial U} U'.$$

Cette formule (5) et les formules suivantes sont présentées sous la forme matricielle. Il est facile de voir que les fonctions

(6) $$I = e^{-tC} U$$

sont les invariants de D. En effet,

$$I' = e^{-tC}(U' - CU) = 0.$$

On note la dérivée de Lie par rapport à l'opérateur D par une prime.

La formule (6) admet son inverse. Ayant trouvé les invariants I nous pouvons exprimer les grandeurs U en fonction de ces invariants:

(7) $$U = e^{tC} I.$$

2 Bases adaptée et invariante

Si on remplace dans le repère naturel (2) l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial t}$ par D, on arrive à la *base adaptée*

$$\left(D \, \frac{\partial}{\partial U}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \, \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U' & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -U' & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ dU \end{pmatrix}, \tag{8}$$

avec les *formes de contact*

$$\omega = dU - U'dt. \tag{9}$$

On peut passer des coordonnées U de fibre aux invariants I pour arriver à la *base invariante*

$$\left(D \, \frac{\partial}{\partial I}\right) = \left(D \, \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{tC} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dt \\ dI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-tC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ \omega \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Proposition 1. Pour les dérivées de Lie par rapport à l'opérateur D on a les formules de dérivation

$$\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)' = -\frac{\partial}{\partial U} C, \quad (dU)' = CdU, \quad \omega' = C\omega. \tag{11}$$

Proposition 2. Soit un champ de vecteurs présenté dans l'espace J à partir des trois bases

$$P = \left(\frac{\partial}{\partial t} \, \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \lambda \end{pmatrix} = \left(D \, \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \mu \end{pmatrix} = \left(D \, \frac{\partial}{\partial I}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \nu \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Le flot de P transforme chaque trajectoire de D en une autre trajectoire de la même famille si l'une des trois conditions équivalentes est satisfaite

$$\lambda' = C(\lambda + \xi' U) \Leftrightarrow \mu' = C\mu \Leftrightarrow \nu' = 0. \tag{13}$$

Démonstration. La formule $(dU)' = CdU$ dans (11) vient de $U' = CU$, parce que la dérivée de Lie se commute avec l'opérateur D. La formule $\left(\dfrac{\partial}{\partial U}\right)' = -\dfrac{\partial}{\partial U} C$ est duale à la précedente, car

$$dU \left(\frac{\partial}{\partial U}\right) = E \quad \text{et} quad (dU)' \left(\frac{\partial}{\partial U}\right) + dU \left(\left(\frac{\partial}{\partial U}\right)'\right) = 0.$$

Pour les formes de contact on obtient $\omega' = C\omega$ en dérivant (9). L'équivalence des conditions (13) se déduit immédiatement de la dérivée de Lie

$$P' = \left(\frac{\partial}{\partial t} \, \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi' \\ \lambda' - C\lambda - \xi' U' \end{pmatrix} = \left(D \, \frac{\partial}{\partial U}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi' \\ \mu' - C\mu \end{pmatrix} = \left(D \, \frac{\partial}{\partial I}\right) \cdot \begin{pmatrix} \xi' \\ \nu' \end{pmatrix}.$$

D'apreѐs la condition $\nu' = 0$ les composantes verticales de P dans la base invariante sont des invariants de D. La condition $\mu' = C\mu$ dit que la colonne μ des composantes de P dans la base adaptée est formée d'une fonction *génératrice* μ_0 et de ses dérivées $\mu_0', \mu_0'', ...$ Les composantes ν et μ sont liées par la formule $\nu = e^{-Ct}\mu$, ce qui signifie que les invariants ν sont induits de la fonction génératrice et de ses dérivées, voir (6). La première condition (13) est plus compliquée. D'ailleurs, c'est celle qui a été utilisée la première dans la théorie, v. [7], [8], [9].

Le champ de vecteurs P aux conditions (13) s'appelle *champ de Lie.* Il est remarquable que les opérateurs verticaux $\dfrac{\partial}{\partial I}$ de la base invariante (10) sont les champs de Lie avec les fonctions génératrices $1, t, \dfrac{t^2}{2}, ...$

3 Équations différentielles

Proposition 3. La fonction arbitraire $\Phi : J \to R$ est traitée comme un opérateur différentiel $\Phi(t, U)$. L'équation

$$\Phi(t, U) = 0 \tag{14}$$

est considerée comme un équation différentielle (ordinaire). On parle d'une surface dans l'espace J, du mouvement de cette surface dans le flot de D et des caractéristiques sur elle:

$$\Phi = \Phi' = \Phi'' = \Phi^{(k)} = 0, k = 1, 2, ... \tag{15}$$

La trajectoire de D qui appartient toute entière à la surface $\Phi = 0$ (et à toutes les caractéristiques) correspond à la solution de l'équation (14). Autrement dit, les solutions sont les courbes intégrales de la distribution (*de Cartan*), annulateur des formes ω sur la surface. Il est possible d'étudier la formation des ombres (*singularités*) sur la surface $\Phi = 0$ éclairée par le flot de D, v. [3], [5].

Le champ de Lie P tangent à la surface $\Phi = 0$ transforme les solutions en d'autres solutions (cela nous permet de multiplier par le flot de P les solutions connues). On parle dans ce cas de *la symétrie infinitésimale* de l'équation. Toute fonction constante sur la surface $\Phi = 0$ mène à *la loi de conservation.*

4 Universalité de la loi

Proposition 4. Le schéma (1)-(5) peut être étendu au fibré $J_{n,m}$ des jets d'applications $R^n \to R^m$. Pour ce cas le paramètre t sera remplacé par

$$t = (t_1, t_2, ..., t_n),$$

le temps est dit de dimension n. Les symboles $u', u'', ...$ correspondent aux ensembles des dérivées partielles, les séries de Maclaurin (4) s'écrivent par le moyen des multi-indices, l'implication (3) garde son sens antérieur. Le symbole D représente l'ensemble des opérateurs

$$D = (D_1, D_2, ..., D_n),$$

v. ci-dessous (23). On note par D aussi la distribution intégrable correspondante aves ses variétés intégrales (orbites) à dimension n. L'algorithme de calcul des invariants (6) reste le même. On parle également de la base dans $J_{n,m}$: naturelle, adaptée ou invariante, ainsi que du champ de Lie transformant les orbites de D en d'autres orbites de la même famille. Dans le contexte correspondant on considére les équations différentielles aux dérivées partielles, leurs solutions, symétries et lois de conservation, v. [1], [9].

Proposition 5. La structure considérée est *universelle* dans le sens suivant. Chaque fois que se produit dans un espace V la différentiation d'une fonction f par rapport à un champ de vecteurs X, il est possible de déterminer une application

$$\varphi : V \to J$$

telle que

$$\begin{cases} t \circ \varphi & = s \\ U \circ \varphi & = F \end{cases}, \tag{16}$$

la fonction s étant une primitive de l'unité, $Xs = 1$, et F la matrice colonne, composée de la fonction f et de ses dèrivées $X^k f$, $k = 1, 2, ...$ Le résultat est que le champ de vecteurs X sera φ-lié à l'opérateur D, c'est à dire que, quelle que soit la fonction I différentiable dans l'espace J, on a

$$(DI) \circ \varphi = X(I \circ \varphi). \tag{17}$$

Cela nous permet, à partir des invariants de D, de déduire dans l'espace V les invariants de X,

$$DI = 0 \;\Rightarrow\; X(I \circ \varphi) = 0. \tag{18}$$

De la même manière on calcule des invariants de X pour n'importe quel champ tensoriel dans V et, ce qui est essentiel, on examine suivant le schéma

$$J = e^{-sC} F \;\Rightarrow\; F_t = e^{(s+t)C} J \tag{19}$$

la transformation du champ tensoriel par le flot de X dans la base invariante (repère mobile), v. [4].

5 Applications

Ayant étendu le schéma (1) - (14) au cas du temps multidimensionnel (Proposition 4) et montré l'universalité de la loi (Proposition 5), nous sommes maintenant en état de présenter des applications.

Soit un fibré à la base de dimension n et à fibres de dimension m. La structure $\Delta_v \oplus \Delta_h$ oú Δ_v est la distribution (intégrable) tangente aux fibres, dite *verticale*, et Δ_h une distribution supplémentaire à la distribution Δ_v, dite *horizontale*, détermine dans le fibré une *connexion*, v. [1], [6]. Sur la carte locale avec les coordonnées (u^i, u^α) on a la *base adaptée* de la connexion

$$(20)\qquad \begin{aligned}(X_i\, X_\alpha) &= (\partial_j\, \partial_\beta)\cdot \begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ \Gamma_i^\beta & \delta_\alpha^\beta \end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix} \omega^i \\ \omega^\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 \\ -\Gamma_i^\alpha & \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les champs de vecteurs $X_i = \partial_i + \Gamma_i^\alpha \partial_\alpha$ constituent une base de la distribution Δ_h, annulateur des formes $\omega^\alpha = du^\alpha - \Gamma_i^\alpha du^i$. Les grandeurs Γ_i^α sont en général des fonctions des coordonnées de base u^i et de celles de fibre u^α. Pour le cas de la *connexion linéaire dans un fibré vectoriel* elles sont linéaires sur les fibres:

$$(21)\qquad \Gamma_i^\alpha = \Gamma_{i\beta}^\alpha u^\beta,$$

avec les coefficients dépendants des coordonnées de base. À chaque chemin $u^i = \varphi^i(t)$ est associé un système d'équations différentielles ordinaires *(système dynamique)*:

$$(22)\qquad \frac{du^\alpha}{dt} = \Gamma_i^\alpha(\varphi(t), u^\beta)\frac{d\varphi^i(t)}{dt},$$

dont les solutions déterminent *la translation des fibres* le long des courbes intégrales de Δ_h, *relèvements du chemin. La courbure* de la connexion est localement déterminée par les grandeurs $K_{ij}^\alpha = X_{[i}\Gamma_{j]}^\alpha$, dans le cas (21) linéaires sur les fibres: $K_{ij}^\alpha = K_{ij\beta}^\alpha u^\beta$.

La conception de la connexion linéaire, appliquée au *fibré tangent* d'une variété, mène à *l'analyse tensorielle* classique. Dans le fibré tangent on a pour les coordonnées les coordonnées de base u^i et leurs différentielles du^i. Par conséquent les grandeurs (21) sont considerées comme une 1-forme aux valeurs vectorielles dans l'algèbre de Lie $gl(R, n)$, ce qui correspond à la définition de *la connexion affine* d'après E.Cartan et Ch. Ehresmann.

Proposition 6. Dans le fibré des jets $J_{n,m}$ avec les opérateurs de dérivation totale

$$(23)\qquad D_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + ...$$

les champs de vecteurs X_i *prolongés* suivant la règle

$$(24)\qquad X_i = \frac{\partial}{\partial u^i} + \Gamma_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + D_i\Gamma_j^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + D_{ij}\Gamma_k^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{jk}^\alpha} + ...$$

$(D_{ij} = D_i D_j, ...)$ forment un système de champs de Lie avec les fonctions génératrices Γ_i^α.

En particulier, nous comprenons ainsi les prolongements des champs de vecteurs dans n'importe quel espace complété par l'axe du temps (multidimensionnel).

Disons que le repère et le corepère duals (R_i, R_α) et $(\theta^i, \theta^\alpha)$ sur $J_{m,n}$, avec les champs de vecteurs R_α verticaux et R_i horizontaux, relèvement d'un repère non-holonome (d'aprés J.A.Schouten), forment une *base spécialisée* de la structure $\Delta_v \otimes \Delta_h$. Les coefficients dans les formules

$$[R_I\, R_J] = R_K c_{IJ}^K, \quad d\theta^I = -c_{JK}^I \theta^J \wedge \theta^K$$

se divisent en 6 parties: $c_{\alpha\beta}^i$ et $c_{i\alpha}^\beta$ sont nuls parce que la distribution Δ_v est intégrable et admet les opérateurs R_i; c_{jk}^i, qui sont constants sur les fibres, et $c_{\beta\gamma}^\alpha$ caractérisent les repères non-holonomes dans Δ_h et Δ_v; les grandeurs $c^\alpha_{i\beta}$ déterminent le déplacement infinitésimal du repère R_α dans la direction R_i, $L_{R_i} R_\alpha = R_\beta c^\beta_{i\alpha}$, et les grandeurs c^α_{ij} correspondent à la courbure. Pour la base adaptée de la connexion linéaire a lieu la coïncidence (sur la carte locale): $c^\alpha_{i\beta} = \Gamma^\alpha_{i\beta}$, $c^\alpha_{ij} = K^\alpha_{ij}$.

Proposition 7. Soit G un groupe de Lie opérant sur la variété V (espace homogène). Considérons le fibré $G \times V$, avec le groupe G pour la base du fibré, et décrivons la situation dans la base spécialisée:

$$(R_i\, R_\alpha) = (X_j\, X_\beta) \times \begin{pmatrix} \bar{A}^j_i & 0 \\ 0 & \bar{A}^\beta_\alpha \end{pmatrix} = (\partial_j\, \partial_\beta) \times \begin{pmatrix} \bar{A}^j_i & 0 \\ \Gamma^\beta_k \bar{A}^k_i & \bar{A}^\beta_\alpha \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \theta^i \\ \theta^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^i_j & 0 \\ 0 & A^\alpha_\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega^j \\ \omega^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^i_j & 0 \\ -A^\alpha_\gamma \Gamma^\gamma_j & A^\alpha_\beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} du^j \\ du^\beta \end{pmatrix},$$

les blocs $\bar{A}^i_j$ et A^j_i déterminant sur G une base invariante (à droite ou à gauche). En outre, posons que $A^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$ (matrice unité) et $\xi^\alpha_i = \Gamma^\alpha_j A^j_i$. Une distribution horizontale Δ_h (intégrable) est déterminée par les champs de vecteurs et les formes

$$R_i = A_i + X_i, \quad \vartheta^\alpha = du^\alpha - \xi^\alpha_i \theta^i. \tag{25}$$

Les champs verticaux $X_i = \xi^\alpha_i \partial_\alpha$ sont les opérateurs de G sur V dont les crochets sont liés avec les constantes de structure de G: $[X_i\, X_j] = X_k c^k_{ij}$. Les formes $\omega^\alpha = \xi^\alpha_i \theta^i$ s'annulent sur le groupe d'isotropie en un point $u \in V$. Le repère de l'espace homogène se construit soit par le procédé de E.Cartan soit par la technique de S.Lie, v. [4].

Remarque. Cet article est écrit dans le cadre du projet ETF'99, grant 2389, et de la Convention entre les universités de Paris VI, de Wroclaw et de Tartu.

References

[1] M.Rahula, *New Problems in Differential Geometry*, WSP, 1993, 172 p.

[2] M.Rahula, *Invariant approach to the theory of symmetries of differential equations*, GROUP 21, Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups and Algebras, Vol. II, Proc. XXI Intern. Coll. Group. Theor. Methods in Physics, 15-20.07.1996, Goslar, WSP, 1997, 1047-1052.

[3] M.Rahula, *L'étude géométrique des singularities à l'aide des équations différentielles*, Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, Ser. II, t. XIV, n.1. (1991), 219-235.

[4] M.Rahula, *Exponential law in Lie-Cartan calculus,* (to appear).

[5] M.Rahula, *Éclairage des surfaces,* Proc. 3rd Congress of Geometry, Thessaloniki, 1991, 346-356.

[6] M.Rahula, *Infinitesimal connection in the bundle,* Problemy geometrii, Moscow. VINITI, t.8 (1977), 163-182 (in Russian).

[7] L.V.Ovsiannikov, *Group Analysis of Differential Equations*, Acad. Press, NY, 1982.

[8] Olver, P.J. *Applications of the Lie Groups to Differential Equations,* Springer-Verlag, 1993, 519 p.

[9] 9. *Symmetries and Conservation Laws of Equations of Mathematical Physics*, Ed. Vinogradov, A.M. and Krassil'schik, I.S., Moscow, "Faktorial", 1997, 462 p. (in Russian).

Université de Tartu
Institut des Mathématiques Pures
46 Vanemuise, Tartu
51 014 Estonie
e-mail: rahula@math.ut.ee