Structures Géométriques Associées à Certains Systèmes Dynamiques

V. Obădeanu

Dedicated to Prof.Dr. Constantin UDRIŞTE on the occasion of his sixtieth birthday

Résumé. On associe à tout système d'équations différentielles ordinaires, une structure géométrique, composée d'un tenseur distingué et d'une connexion nonlinéaire spéciale. On definit un objet de dissipation.

Mathematics Subject Classification: 53C07, 53C60, 53C80, 70H35
Mots Clefs: Espaces de Lagrange, systèmes dynamiques, connexions non-linéaires

1 Systèmes d'équations différentielles définis implicitement

1.1. Préliminaires. Soient M une variété différentiable, de la classe C^∞, de dimension m, définie par un atlas $\mathcal{A} = (U, \varphi)$, et les espaces fibrés: TM, T^*M, J^iM, $\tau_i M = (E_i, p_\tau, J^iM)$, $\delta_i^q M = (E_i^q, p_\delta, J^iM)$, $(i = 1, 2;\ p = \overline{1, m})$, où les dérniers ont comme base respectivement les espaces de jets J^iM ($J^0M = R \times M$, $J^1M = R \times TM$), et comme espaces totaux $E_i = J^iM \times_M TM$, $E_i^q = J^iM \times_M \Omega^q M$, avec $\Omega^q M$ l'espace des q-formes et doués des atlas vectoriels correspondants.

Si $\mathcal{E}$ est un espace fibré, on note $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ le module des sections de $\mathcal{E}$.

1.2. Systèmes d'équations différentielles de deuxième ordre. Soit F une section de δ_2^1 $(F \in \mathcal{S}(\delta_2^1))$:

$$F : (t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \in J^2M \to F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \in T^*M \tag{1.1}$$

avec laquelle on met en évidence l'ensemble:

$$KerF = \{(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) \in J^2M \mid F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0\}$$

On dira que $KerF$ définit une *équation différentielle de deuxième ordre*, que nous étudieront dans la suite.

En coordonnées locales, la fonction F se représente par

$$F = F_i(t, x^h, \dot{x}^h, \ddot{x}^h)dx^i, \quad \forall t \in I \subset R,\ (t, x^h, \dot{x}^h, \ddot{x}^h) \in J^2U \tag{1.2}$$

Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.5, No.2, 2000, pp. 81-89

mais la condition $F = 0$ s'exprime par les relations

$$F_i(t, x^h, \dot{x}^h, \ddot{x}^h) = 0, \tag{1.3}$$

qui porte le nom de *système des équations différentielles, de deuxième ordre, implicites, ordinaire* si elles satisfont la relation

$$\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}^j}\right) \neq 0,$$

et *singulier* au cas que $det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}^j}\right) = 0$.

L'ensemble $KerF$ (sous-variété différentiable de J^2M), nous conduit à l'espace total $F_2 = KerF \times_M J^0M$, de l'espace fibré $\mathcal{F} = (F_2, \pi_2, J^0M)$, sous-espace fibré de $\tau_2 M$.

1.3. Solutions des équations différentielles (1.3). Soit $c : t \in I \subset R \to x = c(t) \in U \subset M$, un chemin différentiable. Ce-ci on le relève à J^2M, par

$$\bar{c} : t \in I \to \left[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}, \frac{d^2c(t)}{dt^2}\right] \in J^2M.$$

On considèrera l'image réciproque de F par $\bar{c}$, comme étant la fonction

$$\bar{c}^* F = F \cdot \bar{c} = F\left[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}, \frac{d^2c(t)}{dt^2}\right].$$

Définition. On appelle solution, locale, du système d'équations différentielles (1.3), une fonction $c : t \in I \to x = c(t) \in U$, qui jouit de la propriété

$$F_i\left[t, c(t), \frac{dc(t)}{dt}, \frac{d^2c(t)}{dt^2}\right] \equiv 0,\ \forall t \in I,\ i = \overline{1, m}.$$

Dans le cas des équations différentielles ordinaires, le système d'équations différentielles implicites est équivalent (a les mêmes solutions) avec un système écrit sous la forme cinématique $\ddot{x}^i = f^i(t, x, \dot{x})$.

2 Variation des chemins différentiables

2.1. Formes en général. Soient X et Y deux sections du fibré $\tau_0 = ((R \times M) \times_M TM, p_\tau, R \times M)$, exprimées localement par $X = \xi^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \eta^i(t,x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, et appelées *champs paramétrisés* de vecteurs sur M.

On notera $\mathcal{M}$ l'ensemble des formes bilinéaires (biformes) de la forme:

$$\mathcal{M} = \Big\{ \quad M : (X,Y) \in \mathcal{S}(\tau_0) \times \mathcal{S}(\tau_0) \to M(X,Y) \in \mathcal{F}(J^pM, R)|$$
$$M(X,Y) = \left[\alpha^0_{ij}(t, x, \ldots, x^{(p)})\frac{d^p\xi^j}{dt^p} + \ldots + \alpha^p_{ij}(t, x, \ldots, x^{(p)})\xi^j\right]\eta^i \Big\}$$

Ainsi étant, on définit les applications, appelées *formes*:

$$M : X \in \mathcal{S}(\tau_0) \to M^X \in \mathcal{S}(\delta_0^1)$$
$$M^X = \left[\alpha_{ij}^0 \frac{d^p \xi^j}{dt^p} + \ldots + \alpha_{ij}^p \xi^j\right] dx^i;$$
$$M^X : Y \in \mathcal{S}(\tau_0) \to M^X(Y) = M(X,Y)$$
$$M(X,Y) = \left[\alpha_{ij}^0 \frac{d^p \xi^j}{dt^p} + \ldots + \alpha_{ij}^p \xi^j\right] \eta^i.$$

Dans l'ensemble $\mathcal{M}$ on peut définir une "relation", en disant que deux biformes M et $\widetilde{M}$ sont "en relation" s'il existe une autre (biforme) $Q : (X,Y) \to Q(X,Y) \in \mathcal{F}(J^3M)$ telle que

$$M^X(Y) - \widetilde{M}^Y(X) = \frac{d}{dt} Q(X,Y)\ ,\ \forall X, Y \in \mathcal{S}(\tau_0). \tag{2.1}$$

2.2. Variation des chemins différentiables. Formes à variations. Soit X une section du fibré $\tau_0 = ((R \times M) \times_M TM, p_\tau, R \times M)$, exprimée localement par $X = \xi^i(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. À la section X on associe, sur $R \times M$ (via le champ de Reeb $\dfrac{\partial}{\partial t} + X$), le pseudogroupe à un paramètre de transformations infinitésimales

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i(t,x), \quad \varepsilon \in J \subset R, \end{cases}$$

(où J est un intérvalle ouvert de R, contenant l'origine), qui se relève à J^2M, par

$$\begin{cases} \bar{t} = t \\ \bar{x}^i = x^i + \varepsilon \xi^i(t,x) \\ \dot{\bar{x}}^i = \dot{x}^i + \varepsilon \dfrac{d\xi^i}{dt} \\ \ddot{\bar{x}}^i = \ddot{x}^i + \varepsilon \dfrac{d^2\xi^i}{dt^2} \end{cases} \quad , \ \varepsilon \in J. \tag{2.2}$$

Par les transformations infinitésimalles (2.2), à toute solution $x = c(t)$, du système (1.3), corresponde une famille de chemins

$$\mathcal{C}^i(\varepsilon, t) = c^i(t) + \varepsilon \xi^i(t, c(t)),$$

indexée par ε.

En calculant l'image réciproque de la fonction F, par $\overline{\mathcal{C}}$, le relevé de $\mathcal{C}$ à J^2M, on obtient

$$\overline{\mathcal{C}}^* F = F\left[t, \mathcal{C}(\varepsilon,t), \frac{\partial \mathcal{C}(\varepsilon,t)}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathcal{C}(\varepsilon,t)}{\partial t^2}\right] =$$
$$= F\left[t,\ x + \varepsilon\xi,\ \frac{dx}{dt} + \varepsilon\frac{d\xi}{dt},\ \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \frac{d^2\xi}{dt^2}\right].$$

La dérivée de cette fonction par rapport avec ε, calculée pour $\varepsilon = 0$, est

$$M_F^X = \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{C}}^* F}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x^j}\xi^j + \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}\frac{d\xi^j}{dt} + \frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}^j}\frac{d^2\xi^j}{dt^2}\right] dx^i =$$

$$= \left[a_{ij}^0(t,x,\dot{x},\ddot{x})\frac{d^2\xi^j}{dt^2} + a_{ij}^1(t,x,\dot{x},\ddot{x})\frac{d\xi^j}{dt} + a_{ij}^2(t,x,\dot{x},\ddot{x})\xi^j\right] dx^i,$$

où on a utilisé les notations

$$a_{ij}^0(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}^j}\ ,\ a_{ij}^1(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j}\ ,\ a_{ij}^2(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial x^j} \tag{2.3}$$

La fonction M_F^X porte le nom de *forme à variations* associée à l'équation $F(t,x,\dot{x},\ddot{x}) = 0$ et à la section X.

Localement, il résulte le *système de formes à variations*:

$$M_{F,i}^X = a_{ij}^0\frac{d^2\xi^j}{dt^2} + a_{ij}^1\frac{d\xi^j}{dt} + a_{ij}^2\xi^j \tag{2.4.}$$

Les formes à variations (2.4) sont associées au système (1.3) et à la section X. Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des biformes. Le système (1.3) définit donc une application

$$M_F : X \in \mathcal{S}(\tau_0) \to M_F^X = \left(a_{ij}^0\frac{d^2\xi^j}{dt^2} + a_{ij}^1\frac{d\xi^j}{dt} + a_{ij}^2\xi^j\right) dx^i \in \mathcal{M}.$$

2.3. Systèmes adjoints. À une autre section $Y : R \times M \to (R \times M) \times_M TM$, avec la représentation locale $Y = \eta^i(t,x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}$, correspondent les formes du type

$$\widetilde{M}^Y = \left(\tilde{a}_{ij}^0\frac{d^2\eta^j}{dt^2} + \tilde{a}_{ij}^1\frac{d\eta^j}{dt} + \tilde{a}_{ij}^2\eta^j\right) dx^i,$$

et donc des autre systèmes de la forme

$$\widetilde{M}_i^Y = \tilde{a}_{ij}^0\frac{d^2\eta^j}{dt^2} + \tilde{a}_{ij}^1\frac{d\eta^j}{dt} + \tilde{a}_{ij}^2\eta^j.$$

Le calcul de la valeur de la forme à variations M_F^X sur le champ Y, nous conduit à

$$M_F^X(Y) = \left(a_{ij}^0\frac{d^2\xi^j}{dt^2} + a_{ij}^1\frac{d\xi^j}{dt} + a_{ij}^2\xi^j\right)\eta^i$$

et, de façon analogue, de la forme $\widetilde{M}^Y$ sur X, à

$$\widetilde{M}^Y(X) = \left(\tilde{a}_{ij}^0\frac{d^2\eta^j}{dt^2} + \tilde{a}_{ij}^1\frac{d\eta^j}{dt} + \tilde{a}_{ij}^2\eta^j\right)\xi^i.$$

Définition. Deux formes à variations M_F^X et $\widetilde{M}^Y$ s'appellent *adjointes* l'une à l'autre s'il existe une fonction $Q_F(X,Y)$ (bilinéaire), telle que le longue des trajectoires de l'équation $F = 0$, ait lieu la relation (2.1).

À lieu le théorème suivant:

Théorème [**2**]. *Etant donée une forme à variations M_F^X, il y a, localement, une unique forme à variations, notée $\widetilde{M}_F^Y$, adjointe à la première.*

De la démonstration du théorème il résulte les composantes de $\widetilde{M}_F^Y$:

$$\widetilde{M}_{F,i}^Y = a_{ji}^0 \frac{d^2\eta^j}{dt^2} + \left(2\frac{da_{ji}^0}{dt} - a_{ji}^1\right)\frac{d\eta^j}{dt} + \left(\frac{d^2 a_{ji}^0}{dt^2} - \frac{da_{ji}^1}{dt} + a_{ji}^2\right)\eta^j, \tag{2.5}$$

système construit avec la section $Y = \eta^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, et implicitement avec la fonction F, d'où il résulte les liaisons (involutives)

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{ij}^0 &= a_{ji}^0 \\ \widetilde{a}_{ij}^1 + a_{ji}^1 &= 2\frac{da_{ji}^0}{dt} \\ \widetilde{a}_{ij}^2 - a_{ji}^2 &= \frac{d^2 a_{ji}^0}{dt^2} - \frac{da_{ji}^1}{dt}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

ainsi que

$$Q_F(X,Y) = (a_{ij}^0\eta^i)\frac{d\xi^j}{dt} - \left[\frac{d}{dt}(a_{ij}^0\eta^i) - a_{ij}^1\eta^i\right]\xi^j \tag{2.7}$$

Observations. 1) $Q_F(X,Y)$ ne dépend pas de a_{ij}^2;

2) $\widetilde{Q}_F(Y,X) = -Q_F(X,Y)$;

3) La relation d'adjonction entre deux formes, définie par (2.1) peut être prolongée, sans aucune modification, aux couples de sections $X \in \mathcal{S}(\tau_r)$, $Y \in \mathcal{S}(\tau_s)$ (en particulier pour $X, Y \in \mathcal{S}(\tau_1)$).

3 La géométrie du système (1.3)

3.1. Le comportement des coefficients des formes à variations par un changement de carte locale. Considérons maintenant un changement de carte locale sur M: $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^h)$, alors sur J^2M on à de façon correspondante, le changement de carte locale, donné par les formules

$$\begin{cases} \bar{t} = t \quad \text{(le paramêtre t est invariant)} \\ \bar{x}^i = \bar{x}^i(x^h) \quad \text{(le changement de coordonnées sur M)} \\ \dot{\bar{x}}^i = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h}\dot{x}^h \quad \text{(le changement des composantes des vecteurs tangents)} \\ \ddot{\bar{x}}^i = \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h}\ddot{x}^h + \dfrac{\partial \dot{\bar{x}}^i}{\partial x^h}\dot{x}^h = \dfrac{\partial \dot{\bar{x}}^i}{\partial x^h}\dot{x}^h + \dfrac{\partial \dot{\bar{x}}^i}{\partial \dot{x}^h}\ddot{x}^h \end{cases} \tag{3.1}$$

et leurs inverses, pendant que le vecteur $X(\xi^i)$ change ses composantes suivant la loi

$$\bar{\xi}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h}\xi^h.$$

Par rapport à un changement, de la forme ci-dessus précisé, les coefficients des formes à variations se change suivant la loi

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
\bar{a}^0_{ij} &= \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}a^0_{hk}\\
\bar{a}^1_{ij} &= \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i}\left[\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}a^1_{hk} + 2\frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \bar{x}^j}a^0_{hk}\right]\\
\bar{a}^2_{ij} &= \frac{\partial x^h}{\partial \bar{x}^i}\left[\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}a^2_{hk} + \frac{\partial \dot{x}^k}{\partial \bar{x}^j}a^1_{hk} + \frac{\partial \ddot{x}^k}{\partial \bar{x}^j}a^0_{hk}\right] + \frac{\partial^2 x^h}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}F_h.
\end{aligned}
$$

Pour une meilleure mise en évidence des propriétés géométriques, nous adopterons le changement de notation suivant [1]

$$
(3.3)\qquad x^i = x^i_0\ ,\quad \dot{x}^i = x^i_1\ ,\quad \ddot{x}^i = 2x^i_2.
$$

À l'aide de ces notations on aura

$$
\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial F_i}{\partial x^j_2} = \frac{1}{2}\alpha^0_{ij}\ ,\quad \frac{\partial F_i}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial F_i}{\partial x^j_1} = \alpha^1_{ij}\ ,\quad \frac{\partial F_i}{\partial x^j} = \frac{\partial F_i}{\partial x^j_0} = \alpha^2_{ij}.
$$

Les formules de changement de cartes (3.1) implique

$$
\begin{cases}
\bar{x}^i_0 = \bar{x}^i_0(x^h_0)\\
\bar{x}^i_1 = \dfrac{\partial \bar{x}^i_0}{\partial x^h_0}x^h_1\\
2\bar{x}^i_2 = \dfrac{\partial \bar{x}^i_1}{\partial x^h_0}x^h_1 + 2\dfrac{\partial \bar{x}^i_1}{\partial x^h_1}x^h_2,
\end{cases}
$$

où on a utilisé les notations [1]: $\dfrac{\partial \bar{x}^i_0}{\partial x^j_0} = \dfrac{\partial \bar{x}^i_k}{\partial x^j_k}\ ,\quad \dfrac{\partial \bar{x}^i_1}{\partial x^j_0} = \dfrac{\partial \bar{x}^i_k}{\partial x^j_{k-1}}$.

Ainsi étant, on retranscrit les formules (3.2) dans la forme

$$
(3.4)\qquad
\begin{aligned}
\bar{\alpha}^0_{ij} &= \frac{\partial x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0}\frac{\partial x^k_0}{\partial \bar{x}^j_0}\alpha^0_{hk}\\
\bar{\alpha}^1_{ij} &= \frac{\partial x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0}\left[\frac{\partial x^k_1}{\partial \bar{x}^j_0}\alpha^0_{hk} + \frac{\partial x^k_1}{\partial \bar{x}^j_1}\alpha^1_{hk}\right]\\
\bar{\alpha}^2_{ij} &= \frac{\partial x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0}\left[\frac{\partial x^k_2}{\partial \bar{x}^j_0}\alpha^0_{hk} + \frac{\partial x^k_2}{\partial \bar{x}^j_1}\alpha^1_{hk} + \frac{\partial x^k_2}{\partial \bar{x}^j_2}\alpha^2_{hk}\right] + \frac{\partial^2 x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0 \partial \bar{x}^j_0}F_h.
\end{aligned}
$$

Conclusions. 1) Les coefficients α^0_{ij} sont les composantes d'un tenseur deux fois covariant distingué sur M.

2) Les coefficients α^1_{ij} sont les composantes d'un tenseur distingué dans le premier indice et semidistingué dans le deuxième. Le couple $(\alpha^0_{ij},\ \alpha^1_{ij})$ est un tenseur distingué sur TM.

3) Les coefficients α^2_{ij} sont des coefficients d'un objet géométrique tel que le triple $(\alpha^0_{ij},\ \alpha^1_{ij},\ \alpha^2_{ij})$ est un tenseur sur $KerF$ distingué dans le premier indice et ordinaire dans le deuxième.

3.2. Le comportement des coefficients des formes adjointes, par un changement de carte. Soit le système adjoint (2.5), avec les coefficients donnés par (2.6), et un changement de carte locale (3.1), on a:

Théorème. *Les coefficients des formes adjointes constituent un objet géométrique du même type avec celui constitué par le coefficients des formes à variations.*

En effet, ils se changement suivant les formules:

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\alpha}}^0_{ij} &= \frac{\partial x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0}\frac{\partial x^k_0}{\partial \bar{x}^j_0}\tilde{\alpha}^0_{hk} \\ \bar{\tilde{\alpha}}^1_{ij} &= \frac{\partial x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0}\left[\frac{\partial x^k_1}{\partial \bar{x}^j_0}\tilde{\alpha}^0_{hk} + \frac{\partial x^k_1}{\partial \bar{x}^j_1}\tilde{\alpha}^1_{hk}\right] \\ \bar{\tilde{\alpha}}^2_{ij} &= \frac{\partial x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0}\left[\frac{\partial x^k_2}{\partial \bar{x}^j_0}\tilde{\alpha}^0_{hk} + \frac{\partial x^k_2}{\partial \bar{x}^j_1}\tilde{\alpha}^1_{hk} + \frac{\partial x^k_2}{\partial \bar{x}^j_2}\tilde{\alpha}^2_{hk}\right] + \frac{\partial^2 x^h_0}{\partial \bar{x}^i_0 \partial \bar{x}^j_0}F_h \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.3. Dissipativité de la structure géométrique associée. Soit l'objet géométrique fourni par les formes à variations, par ses coefficients $(\alpha^0_{ij},\ \alpha^1_{ij},\ \alpha^2_{ij})$, ainsi que celui fourni par les coefficients $(\tilde{\alpha}^0_{ij},\ \tilde{\alpha}^1_{ij},\ \tilde{\alpha}^2_{ij})$ des formes adjointes, ayant les lois de changement respectivement donnés par les formules (3.4) et (3.5).

En faisant la différence de ces deux objets, on appelle cet nouvel objet, *l'objet de dissipation.* Ces composantes sont donc

$$\begin{aligned} \tau^0_{ij} &= \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^0_{ij} - \alpha^0_{ij}) \\ \tau^1_{ij} &= \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^1_{ij} - \alpha^1_{ij}) \\ \tau^2_{ij} &= \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}^2_{ij} - \alpha^2_{ij}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

En tenant compte des relations (2.6), on déduit

$$\begin{aligned} \tau^0_{ij} &= -\alpha^0_{[ij]} \\ \tau^1_{ij} &= -\alpha^1_{(ij)} + \frac{1}{2}\frac{d\alpha^0_{ji}}{dt} \\ \tau^2_{ij} &= -\alpha^2_{[ij]} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\frac{d\alpha^0_{ji}}{dt} - \alpha^1_{ji}\right] \end{aligned}$$

Propriétés. 1) Les fonctions τ^0_{ij} constituent les composantes d'un tenseur distingué, antisymétrique, la partie antisymétrique de a^0_{ij}, avec le signe changé.

2) La partie antisymétrique de τ^1_{ij} est

$$\tau^1_{[ij]} = -\frac{da^0_{[ij]}}{dt},$$

et la partie symétrique est

$$\tau^1_{(ij)} = -\alpha^1_{(ij)} + \frac{da^0_{(ij)}}{dt}.$$

3.4. Systèmes d'équations différentielles de deuxième ordre, ordinaires. Considérons maintenant le cas dans lequel $det\left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}^j}\right) \neq 0$. En considérant la matrice $(a^0_{ij}) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \ddot{x}^j}\right)$, on peut construir la matrice inverse (a_0^{ij}), dont les coefficients se change, par un changement de carte, suivant la formule

$$\bar{a}_0^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^h}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}a_0^{hk}.$$

Définissons les coefficients $\underset{1}{M}{}^i_j$ et $\underset{2}{M}{}^i_j$, respectivement par les formules $2\underset{1}{M}{}^i_j = a_0^{ih}a^1_{hj}$ et $2\underset{2}{M}{}^i_j = a_0^{ih}a^2_{hj}$. Ces nouveaux coefficients, définissent dans une carte locale, se changent à un changement de carte et en utilisant les notations (3.3), par les formules

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x^p_0}{\partial \bar{x}^i_0}\bar{\delta}^i_j = \delta^p_i \frac{\partial x^i_0}{\partial \bar{x}^j_0}\\
&\frac{\partial x^p_0}{\partial \bar{x}^i_0}\overline{\underset{1}{M}}{}^i_j = \delta^p_i \frac{\partial x^i_1}{\partial \bar{x}^j_0} + \underset{1}{M}{}^p_i \frac{\partial x^i_0}{\partial \bar{x}^j_0}\\
&\frac{\partial x^p_0}{\partial \bar{x}^i_0}\overline{\underset{2}{M}}{}^i_j = \delta^p_i \frac{\partial x^i_2}{\partial \bar{x}^j_0} + \underset{1}{M}{}^p_i \frac{\partial x^i_1}{\partial \bar{x}^j_0} + \underset{2}{M}{}^p_i \frac{\partial x^i_0}{\partial \bar{x}^j_0} + \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{x}^h_0}{\partial x^q_0}\frac{\partial^2 x^k_0}{\partial \bar{x}^h_0 \partial \bar{x}^j_0}a_0^{pq}F_k.
\end{aligned}$$

Remarques. 1) Les fonctions $\underset{1}{M}{}^i_j$ constituent les composantes (paramétrisées par t) d'une *connection non-linéaire* distinguée sur la varieté M.

2) Les fonctions $\left(\underset{1}{M}{}^i_j,\ \underset{2}{M}{}^i_j\right)$ sont les coefficients duals ([1]) d'une connection non-linéaire sur $KerF$.

3) Les composantes $\left(\delta^i_j,\ \underset{1}{M}{}^i_j,\ \underset{2}{M}{}^i_j\right)$ constituent un tenseur mixte sur $KerF$, distingué, dans l'indice de contravariance, et semidistingué dans l'indice de covariance.

4) Des mêmes propriétés jouit aussi le deuxième objet, "conjugué".

3.5. Le tenseur de dissipation. En faisant la différence de deux objets de connexion, on obtient

$$\underset{1}{T}{}^i_j = \underset{1}{\widetilde{M}}{}^i_j - \underset{1}{M}{}^i_j \qquad \left(\frac{\partial x^p_0}{\partial \bar{x}^i_0}\overline{\underset{1}{T}}{}^i_j = \underset{1}{T}{}^p_i\frac{\partial x^i_0}{\partial \bar{x}^j_0}\right),$$

qui est un tenseur mixt distingué;

$$\underset{2}{T}{}^i_j = \underset{2}{\widetilde{M}}{}^i_j - \underset{2}{M}{}^i_j \qquad \left(\frac{\partial x^p_0}{\partial \bar{x}^i_0}\overline{\underset{2}{T}}{}^i_j = \underset{1}{T}{}^p_i\frac{\partial x^i_1}{\partial \bar{x}^j_0} + \underset{2}{T}{}^p_i\frac{\partial x^i_0}{\partial \bar{x}^j_0}\right)$$

qui est un tenseur mixt semidistingué.

Aknowledgements. A version of this paper was presented at the Third Conference of Balkan Society of Geometers, Workshop on Electromagentic Flows and Dynamics, July 31 - August 3, 2000, University POLITEHNICA of Bucharest, Romania

Supported by MEN Grant No 21815/28.09.1998, CNCSU-31

References

[1] R. Miron, GH. Atanasiu - *Compendium sur les espaces Lagrange d'ordre supérieur*; Sem. Mec. Nr.40, Tip. Univ. Tim. (1994)

[2] R.M. Santilli - *Foundations Theoretical Mechanics (I). The inverse problem in Newtonian mechanics*; Springer-Verlag, Berlin (1984)

Obădeanu Virgil
Université de l'Ouest de Timişoara
1900 Timişoara, Romanie
E-mail: obadeanu@hilbert.math.uvt.ro