Presque C_p-Représentations

A Kazuya Kato,

à l'occasion de son cinquantième anniversaire

Jean-Marc Fontaine

Received: October 25, 2002
Revised: April 3, 2003

Abstract. Let $\overline{\mathbb{Q}}_p$ be an algebraic closure of $\mathbb{Q}_p$ and C its p-adic completion. Let K be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ contained in $\overline{\mathbb{Q}}_p$ and set $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/K)$. A $\mathbb{Q}_p$-representation (resp. a C-representation) of G_K is a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space (resp. C-vector space) equipped with a linear (resp. semi-linear) continuous action of G_K. A banach representation of G_K is a topological $\mathbb{Q}_p$-vector space, whose topology may be defined by a norm with respect to which it is complete, equipped with a linear and continuous action of G_K. An almost C-representation of G_K is a banach representation X which is almost isomorphic to a C-representation, i.e. such that there exists a C-representation W, finite dimensional sub-$\mathbb{Q}_p$-vector spaces V of X and V' of W stable under G_K and an isomorphism $X/V \to W/V'$. The almost C-representations of G_K form an abelian category $\mathcal{C}(G_K)$. There is a unique additive function $dh : \mathrm{Ob}\mathcal{C}(G_K) \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ such that $dh(W) = (\dim_C W, 0)$ if W is a C-representation and $dh(V) = (0, \dim_{\mathbb{Q}_p} V)$ if V is a $\mathbb{Q}_p$-representation. If X and Y are objects of $\mathcal{C}(G_K)$, the $\mathbb{Q}_p$-vector spaces $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$ are finite dimensional and are zero for $i \notin \{0,1,2\}$. One gets $\sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) = -[K:\mathbb{Q}_p]h(X)h(Y)$. Moreover, there is a natural duality between $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$ and $\mathrm{Ext}^{2-i}_{\mathcal{C}(G_K)}(Y, X(1))$.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary: 11F80, 11S20 11S25. Secondary:11G25, 11S31, 14F30, 14G22.
Mots clés: Corps p-adiques, représentations galoisiennes p-adiques, cohomologie galoisienne, espaces de Banach p-adiques.
Keywords and Phrases: p-adic fields, p-adic Galois representations, Galois cohomology, p-adic Banach spaces.

Table

1 – Introduction

1.1 – Prologue

Cet article est le premier d'une série en préparation consacrée à l'étude de certains phénomènes que l'on rencontre lorsque l'on étudie les représentations p-adiques associées aux motifs des variétés algébriques sur les corps p-adiques. Considérons d'abord la situation suivante : On se donne un complété K d'un corps de nombres, on choisit une clôture algébrique $\overline{K}$ de K, on pose $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et on note C le complété de $\overline{K}$.
Soient A une variété abélienne sur K de dimension g et t_A son espace tangent. C'est un K-espace vectoriel de dimension g. Il est commode de le voir comme un groupe vectoriel, i.e. de poser $t_A(R) = R \otimes_K t_A$ pour toute K-algèbre R.

Supposons d'abord K archimédien. On a donc $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\overline{K} = C = \mathbb{C}$, $G_K = \{1, \tau\}$, avec τ la conjugaison complexe ou $G_K = \{1\}$. L'exponentielle est définie partout et on a une suite exacte

$$0 \to H_1(A(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \to t_A(\mathbb{C}) \to A(\mathbb{C}) \to 0$$

Si maintenant K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, c'est au contraire le logarithme qui est partout défini et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}) & \to & A(\overline{K}) & \to & t_A(\overline{K}) & \to & 0 \\ & & \| & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \to & A_{\mathrm{tor}}(C) & \to & A(C) & \to & t_A(C) & \to & 0 \end{array}$$

Le groupe $A(\overline{K})$ est muni d'une topologie naturelle : notons $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_{\overline{K}}$) l'anneau des entiers de K (resp. $\overline{K}$) ; si $\mathcal{A}$ est un modèle propre (pas nécessairement lisse) de A sur $\mathcal{O}_K$, on a $A(\overline{K}) = \mathcal{A}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$; on prend la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \to \mathcal{A}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n)$, pour

$n \in \mathbb{N}$ (avec la topologie discrète sur $\mathcal{A}(\mathcal{O}_{\overline{K}}/p^n)$). On vérifie que cette topologie est indépendante du choix du modèle, fait de $A(\overline{K})$ un groupe topologique induisant la topologie discrète sur $A_{tor}(\overline{K})$ et la topologie naturelle sur $t_A(\overline{K})$ et que $A(C)$ s'identifie au séparé complété de $A(\overline{K})$ pour cette topologie.

On a $A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}) = A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K}) \oplus A_{p'-\mathrm{tor}}(\overline{K})$ où $A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K})$ (resp. $A_{p'-\mathrm{tor}}(\overline{K})$) désigne le sous-groupe de p-torsion (resp. de p'-torsion) de $A(\overline{K})$. L'exponentielle est définie localement, ce qui veut dire qu'il existe un réseau Λ de t_A (i.e. un sous-$\mathcal{O}_K$-module libre de rang g de t_A) et un homomorphisme continu G_K-équivariant $\exp : \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_K} \Lambda \to A(C)$ vérifiant $\log(\exp(x)) = x$, pour tout $x \in \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_K} \Lambda$; on a $\exp(\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Lambda) \subset A(\overline{K})$. Ceci permet en particulier de définir une section s de l'inclusion de $A_{p'-\mathrm{tor}}(\overline{K})$ dans $A(C)$: si $x \in A(C)$, $p^n \log(x) \in \mathcal{O}_C \otimes_{\mathcal{O}_K} \Lambda$, pour n assez grand et $s(x) = p^{-n}\pi(x^{p^n}/\exp(p^n \log(x)))$, où $\pi : A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}) \to A_{p'-\mathrm{tor}}(\overline{K})$ est la projection canonique (on a noté multiplicativement $A(C)$ et additivement $A_{p'-\mathrm{tor}}(\overline{K})$). Si $A^{(p)}(C)$ désigne le noyau de s, on a $A(C) = A_{p'-\mathrm{tor}}(\overline{K}) \oplus A^{(p)}(C)$ et $A(\overline{K}) = A_{p'-\mathrm{tor}}(\overline{K}) \oplus A^{(p)}(\overline{K})$, en posant $A^{(p)}(\overline{K}) = A(\overline{K}) \cap A^{(p)}(C)$. Cette décomposition est compatible avec la topologie et $A^{(p)}(C)$ est le complété de $A^{(p)}(\overline{K})$ pour la topologie induite.

Le premier fait remarquable est que l'*on peut retrouver $A^{(p)}(\overline{K})$ (et donc aussi $A^{(p)}(C)$) en tant que groupe topologique muni d'une action de G_K à partir de la seule connaissance de $A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K})$* (et donc également $A(\overline{K})$ et $A(C)$ à partir de $A_{\mathrm{tor}}(\overline{K})$):

Notons $U_C^+ = 1 + m_{\mathcal{O}_C}$ le groupe des unités de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_C$ de C qui sont congrues à 1 modulo l'idéal maximal. Le logarithme p-adique définit une suite exacte

$$0 \to (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1) \to U_C^+ \to C \to 0$$

Le module de Tate $T_p(A)$, limite projective des $A_{p^n}(\overline{K})$, pour $n \in \mathbb{N}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $2g$ et en tensorisant la suite exacte ci-dessus avec $T_p(A)(-1)$, on obtient une autre suite exacte

$$0 \to A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K}) \to U_C^+(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(A) \to C(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(A) \to 0$$

Proposition 1.1 (cf. §8.4). — *Soit A une variété abélienne sur K. Il existe une et une seule application additive continue G_K-équivariante*

$$\xi : A^{(p)}(\overline{K}) \to U_C^+(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(A)$$

induisant l'identité sur $A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K})$. Cette application est injective et identifie $A^{(p)}(\overline{K})$ au plus grand sous-groupe de $U_C^+(-1) \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(A)$ sur lequel l'action de G_K est discrète. L'application $\bar{\xi} : t_A(\overline{K}) \to C(-1) \otimes T_p(A)$, déduite de ξ par passage au quotient, est $\overline{K}$-linéaire.

On remarque en outre que $\overline{\xi}$ induit une application injective ξ_1 de t_A sur $(C(-1) \otimes (T_p(A))^{G_K}$. L'application analogue pour la variété abélienne duale A' fournit par dualité une application surjective $\xi_0 : (C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(A))^{G_K} \to t^*_{A'}$

(où $t^*_{A'}$ est le K-espace vectoriel dual de l'espace tangent de A'). Grâce à un théorème de Tate ([Se67a], prop.4), pour toute représentation p-adique V, on a $\dim_K(C(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} + \dim_K(C\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Pour des raisons de dimension, ξ_0 et ξ_1 sont donc des isomorphismes. On retrouve ainsi la décomposition de Hodge-Tate pour les variétés abéliennes.

En fait, on a plus que cela : $A^{(p)}$ a une structure naturelle de groupe rigide analytique. On peut retrouver cette structure à partir de $A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K})$: U_C^+ a une structure naturelle de groupe rigide analytique sur C : c'est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau sous-jacent au disque unité fermé. D'où une structure analytique sur $U_C^+(-1)\otimes T_p(A) \simeq (U_C^+)^{2g}$. Et $A^{(p)}(C)$ s'identifie à un sous-groupe fermé.

Au groupe $A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K})$ muni de l'action de G_K, on peut donc associer deux objets intéressants
(A) *le groupe topologique $A^{(p)}(C)$ muni de son action de G_K*,
(B) *le groupe analytique rigide $A^{(p)}$* [Attention, on ne peut pas obtenir trop : ce n'est pas la variété analytique rigide A^{rig} associée à A ; dans le cas de bonne réduction par exemple, c'est seulement la fibre générique du schéma en groupes formel (pas nécessairement connexe) $\widehat{\mathcal{A}}$ associé au groupe de Barsotti-Tate $(\mathcal{A}_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathcal{A}$ est le modèle de Néron de A].
Lorsque A a bonne réduction, on peut encore associer un troisième objet, qui est
(C) un *faisceau de groupes abéliens pour la topologie* plate (pour les généralisations, ce sera mieux de considérer la topologie *syntomique lisse sur $SpfW$*), à savoir le faisceau représenté par $\widehat{\mathcal{A}}$.

Ces trois constructions se généralisent aux motifs. Pour fixer les idées, soient X une variété algébrique propre et lisse sur K, $m\in\mathbb{N}$ et $i\in\mathbb{Z}$. Au "motif" $M = H^m(X)(i)$, on peut associer $M_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K}) = H^m_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(i))$. A partir de ce module galoisien, on peut construire des objets du type (A), (B) et, dans le cas de bonne réduction, (C) qui vivent dans de jolies catégories. Pour (C), on ne sait le faire qu'à isogénie près, sauf si $0\leq m\leq p-2$. En fait pour fabriquer un objet du type (A) ou (B) il suffit de partir d'un groupe abélien de p-torsion Λ avec action linéaire et continue de G_K qui est de cotype fini. Si on travaille seulement à isogénie près, il suffit de partir d'une représentation p-adique V de G_K qui peut être quelconque. Pour pouvoir faire (C), il faut la supposer cristalline.
Le but du présent article est d'introduire et étudier la catégorie des jolis objets du type (A) à isogénie près. L'étude des objets des types (B) et (C) sera faite ailleurs. Signalons dès à présent que celle des objets de type (B) repose sur le travail fondamental de Colmez sur *les Espaces de Banach de dimension finie* [Co02], travail qui joue déjà un rôle crucial ici (§4).

1.2 – Conventions, notations

Dans toute la suite de l'article, K est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, $\overline{K}$ une clôture algébrique fixée de K et $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$.
Un *banach* est un espace de Banach p-adique à équivalence de normes près. Autrement dit, c'est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel topologique V qui contient un sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}$ qui est séparé et complet pour la topologie p-adique et est tel que $V = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} p^{-n}\mathcal{V}$ (avec la topologie correspondante. Un tel $\mathcal{V}$ s'appelle un *réseau de* V. Pour qu'un autre sous-$\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{V}'$ de V soit aussi un réseau, il faut et il suffit qu'il existe $r, s \in \mathbb{N}$ tels que $p^r\mathcal{V} \subset \mathcal{V}' \subset p^s\mathcal{V}$.
Une *représentation banachique de* G_K (ou seulement une *représentation banachique* s'il n'y a pas de risque de confusion sur G_K) est un banach muni d'une action linéaire et continue de G_K. Avec comme morphismes les applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires continues G_K-équivariantes, les représentations banachiques forment une catégorie additive $\mathbb{Q}_p$-linéaire $\mathcal{B}(G_K)$.
Tout comme la catégorie des banach , la catégorie $\mathcal{B}(G_K)$ a une structure de *catégorie exacte* au sens de [Qu73] (§2, cf. aussi [La83], §1.0) : Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{B}(G_K)$ est un *épimorphisme strict* (ou *admissible*) (resp. un *monomorphisme strict*) (ou *admissible*) si et seulement si l'application sous-jacente est surjective (resp. si elle induit un homéomorphisme de X sur un fermé de Y). Un *morphisme strict* est un morphisme qui peut s'écrire $f_2 \circ f_1$ avec f_1 un épimorphisme strict et f_2 un monomorphisme strict.
Si $f : X \to Y$ est un morphisme strict, le noyau et le conoyau de l'application sous-jacente sont de façon naturelle des représentations banachiques, les morphismes $\mathrm{Ker}\ f \to X$ et $Y \to \mathrm{Coker}\ f$ sont stricts et l'application $\mathrm{Coim}\ f \to \mathrm{Im}\ f$ est un isomorphisme.
Une *suite exacte courte* de $\mathcal{B}(G_K)$ est une suite

$$O \to S' \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} S'' \to 0$$

où g est un épimorphisme strict et f un noyau de G.
Disons qu'une sous-catégorie strictement pleine $\mathcal{D}$ de $\mathcal{B}(G_K)$ est *stricte* si elle contient 0, est stable par somme directe et si tout morphisme de $\mathcal{D}$ est strict (en tant que morphisme de $\mathcal{B}(G_K)$) et a son noyau et son conoyau dans $\mathcal{B}(G_K)$. Une telle catégorie est abélienne.
Appelons *représentation p-adique (de G_K)* toute représentation banachique qui est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Ces représentations forment une sous-catégorie stricte $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ de $\mathcal{B}(G_K)$.

1.3 – C-représentations et B_{dR}^+-représentations

Par continuité le groupe G_K opère sur le corps C complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique. Une *C-représentation (de G_K)* est un C-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire continue de G_K. Avec comme morphismes les applications C-linéaires G_K-équivariantes, ces représentations forment une catégorie abélienne K-linéaire que nous notons $\mathrm{Rep}_C(G_K)$.

Tout C-espace vectoriel de dimension finie muni de sa topologie naturelle est un banach. Toute C-représentation est donc de manière naturelle une représentation banachique.

Théorème A (cf. §3.3). — *Le foncteur d'oubli*

$$\mathrm{Rep}_C(G_K) \to \mathcal{B}(G_K)$$

est pleinement fidèle.

Autrement dit, si W_1 et W_2 sont deux C-représentations de G_K, toute application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue, G_K-équivariante, de W_1 dans W_2 est C-linéaire. Ceci nous permet d'identifier $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}(G_K)$ qui, bien sûr, est exacte. Il en est de même de la sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_C^{\mathrm{triv}}(G_K)$ de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ dont les objets sont les *C-représentations triviales*, i.e. les représentations W telles qu'il existe un entier d et un isomorphisme de C^d sur W. On remarque qu'une C-représentation W est triviale si et seulement si W est engendré en tant que C-espace vectoriel par W^{G_K}.

Nous allons avoir besoin de plonger $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ dans une catégorie un peu plus grande.

Choisissons un générateur t de $\mathbb{Z}_p(1)$ (noté additivement). Rappelons (cf., par exemple [Fo00], §3.1 et 3.2) que le corps B_{dR} des périodes p-adiques est une $\overline{K}$-algèbre, contenant $\mathbb{Z}_p(1)$, munie d'une topologie et d'une action semi-linéaire continue de G_K.

Ce corps a aussi une structure naturelle de corps complet pour une valuation discrète (la topologie définie par cette valuation est plus fine que la topologie canonique). Son corps résiduel est C et t est une uniformisante. On note B_{dR}^+ l'anneau de la valuation (qui est aussi ouvert et fermé dans B_{dR} pour la topologie canonique). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $B_m = B_{dR}^+/t^m B_{dR}^+$ (on a donc $B_0 = 0$ et $B_1 = C$).

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, B_m, muni de la topologie induite par la topologie canonique de B_{dR}, est un banach (et sur $B_1 = C$, cette topologie coïncide avec la topologie p-adique sur C). Inversement, la topologie canonique sur $B_{dR}^+ = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} B_m$ est la topologie de la limite projective avec la topologie de banach sur chaque B_m.

Un B_{dR}^+-module de longueur finie n'est autre qu'un B_{dR}^+-module de type fini annulé par une puissance de t, i.e. c'est un B_m-module de type fini pour m assez grand. Pour tout B_{dR}^+-module W de longueur finie, on note $d_1(W)$ sa longueur. On a donc $d_1(B_m) = m$.

On appelle *B_{dR}^+-représentation (de G_K)* tout B_{dR}^+-module de longueur finie muni d'une action semi-linéaire et continue de G_K. Ces représentations forment de manière évidente une catégorie abélienne K-linéaire que nous notons $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$. La catégorie $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ dont les objets sont ceux qui sont annulés par t. Le théorème A s'étend à $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$.

Théorème A' (cf. §3.3). — *Le foncteur d'oubli*

$$\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K) \to \mathcal{B}(G_K)$$

est pleinement fidèle.

1.4 – Presque-C-représentations

Soient X_1 et X_2 deux représentations banachiques. On dit que X_1 et X_2 sont *presqu'isomorphes* s'il existe des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie V_1 de X_1 et V_2 de X_2 stables par G_K et un isomorphisme $X_1/V_1 \to X_2/V_2$ dans $\mathcal{B}(G_K)$. On a ainsi défini une relation d'équivalence sur les objets de $\mathcal{B}(G_K)$. Une *presque C-représentation (de G_K)* est une représentation banachique qui est presqu'isomorphe à une C-représentation triviale. On note $\mathcal{C}(G_K)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}(G_K)$ dont les objets sont les presque C-représentations.

Théorème B (cf. §5.1). — *La catégorie $\mathcal{C}(G_K)$ est une sous-catégorie stricte de $\mathcal{B}(G_K)$. En outre, il existe des fonctions additives*

$$d : \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}(G_K) \to \mathbb{N} \text{ et } h : \mathrm{Ob}\mathcal{C}(G_K) \to \mathbb{Z}$$

caractérisées par $d(C) = 1,\ h(C) = 0$ et

$$d(V) = 0\ ,\ h(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V \text{ pour toute représentation } p\text{-adique } V \text{ de } G_K$$

En fait $\mathcal{C}(G_K)$ contient toutes les C-représentations et même les B_{dR}^+-représentations :

Théorème C (cf. §5.5). — *Soit W une B_{dR}^+-représentation et soit d la longueur du B_{dR}^+-module sous-jacent. Alors W est presqu'isomorphe à C^d. On a $d(W) = d$ et $h(W) = 0$.*

1.5 – Extensions

Disons qu'une suite exacte courte de $\mathcal{B}(G_K)$

$$0 \to S' \to S \to S'' \to 0$$

est *presque scindée* s'il existe un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie V de S' stable par G_K tel que la suite

$$0 \to S'/V \to S/V \to S'' \to 0$$

est scindée.

Théorème D (cf. §5.2, 5.4 et 5.5). — *Soit*

$$0 \to S' \to S \to S'' \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathcal{B}(G_K)$.
i) Si S' *et* S'' *sont des presque* C*-représentations, pour que* S *soit une presque-*C*-représentation, il faut et il suffit que la suite soit presque scindée.*
ii) Si S' *et* S'' *sont des* B_{dR}^+*-représentations, pour que* S *soit une* B_{dR}^+*-représentation, il faut et il suffit que la suite soit presque scindée.*

1.6 – Le plan

Faisons une dernière convention : Si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$ et si $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(X,Y)$ le groupe des *classes de* n*-extensions de Yoneda*. Si $\mathcal{C} = \mathrm{Rep}_E(G)$ est une catégorie de représentations (semi)-linéaires d'un groupe G à coefficients dans un anneau commutatif E, on écrit aussi $\mathrm{Ext}^n_{E[G]}(X,Y)$.
Expliquons maintenant, pour terminer cette introduction, comment cet article est organisé.

– L'objet du §2, est une étude détaillée des B_{dR}^+-représentations de G_K. Celle-ci repose de façon essentielle sur l'article de Tate sur les groupes p-divisibles [Ta67] et sur la classification de Sen des C-représentations [Sen80]. Ces travaux ont été repris et poursuivis dans [Fo00] que l'on utilise abondamment. On introduit les *petites représentations* pour lesquelles on peut tout écrire explicitement et auxquelles on peut se ramener dans la plupart des cas parce que toute B_{dR}^+-représentation devient petite après changement de base fini. On détermine les groupes d'extensions dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$.
Ces calculs, qui seront utiles dans la suite, ne sont pas difficiles. Ils reposent essentiellement sur la description explicite des groupes proalgébriques associés aux catégories tannakiennes sous-jacentes. Ils sont plutôt fastidieux et nous recommandons au lecteur de passer rapidement sur le §2 en première lecture.

– Dans le §3, on établit les théorèmes de pleine fidélité (th. A et A' ci-dessus). Puis, on montre comment construire toutes les extensions d'une C-représentation – ou plus généralement d'une B_{dR}^+-représentation – W par une représentation p-adique V.
Rappelons [Fo88a] que B_{cris} est une sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{dR} stable par G_K et munie d'un Frobenius φ qui est un endomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres commutant à l'action de G_K. Si B_e désigne la sous-$\mathbb{Q}_p$-algèbre de B_{cris} formée des b tels que $\varphi(b) = b$, on dispose (cf. par exemple, [FPR94], prop. 3.1.1) d'une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_e \to B_{dR}/B_{dR}^+ \to 0$$

où la flèche $B_e \to B_{dR}/B_{dR}^+$ est le composé de l'inclusion de $B_e \subset B_{cris}$ dans B_{dR} avec la projection sur B_{dR}/B_{dR}^+.

En tensorisant avec V, on obtient une suite exacte

$$0 \to V \to B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0$$

d'où une application[(1)]

$$\delta_{W,V} : \mathrm{Hom}(W, (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W, V)$$

Le point essentiel est que $\delta_{W,V}$ est un isomorphisme. Pour le prouver, on commence par utiliser beaucoup de cohomologie galoisienne et en particulier, la théorie du corps de classes local pour montrer que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W, V)$ est de dimension finie et calculer sa dimension. On constate alors que la source et le but de $\delta_{W,V}$ ont la même dimension et il est facile de vérifier que $\delta_{W,V}$ est injective.
Dans le cas où W est une C-représentation, on peut remplacer B_e par $B_e \cap t^{-1}B_{dR}^+$ qui est une extension de $C(-1)$ par $\mathbb{Q}_p$ que l'on peut décrire très simplement : avec les notations du §1.1, on a $B_e \cap t^{-1}B_{dR}^+ = U(-1)$ où U est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des suites $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de U_C^+ vérifiant $(u^{(n+1)})^p = u^{(n)}$ pour tout n.
Remarquons au passage que cela nous fournit un procédé pour construire – au moins théoriquement et modulo la construction des représentations de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ – tous les objets de $\mathcal{C}(G_K)$. Si S est l'un d'entre eux, on peut en effet trouver une C-représentation W (que l'on peut même choisir triviale) et une représentation p-adique V telles que S soit isomorphe au quotient d'une extension de W par V par une autre représentation p-adique V'.

– Dans le §4, on commence par énoncer, dans un langage un peu différent, l'un des résultats essentiels de l'article de Colmez [Co02] sur les *Espaces de Banach de dimension finie*. On introduit ce que nous appelons les *espaces de Banach-Colmez effectifs* qui sont des espaces de Banach munis d'une structure de limite inductive de limite projective d'objets en groupes commutatifs dans la catégorie des espaces rigides analytiques sur C vérifiant certaines propriétés. Un tel groupe a une dimension et une hauteur qui sont des entiers naturels. On a $C = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} p^{-n}\mathcal{O}_C$ ce qui permet de munir C d'une structure d'espace de Banach-Colmez (la structure analytique sur $\mathcal{O}_C$ est la structure habituelle du disque unité fermé) de dimension 1 et de hauteur 0. Tout $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie h a une structure naturelle d'espace de Banach-Colmez de dimension 0 et hauteur h. Le résultat de Colmez peut alors s'exprimer en disant essentiellement que, si S est un espace de Banach-Colmez effectif de dimension 1 et de hauteur h et si $f : S \to C$ est un morphisme (d'espaces de Banach-Colmez effectifs) dont l'image n'est pas de dimension finie, alors f est surjectif et son noyau est de dimension 0 et de hauteur h.

[(1)] Ici $\mathrm{Hom}(W, (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ désigne le groupe des applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires continues G_K-équivariantes – ou, cela revient au même, des applications B_{dR}^+-linéaires G_K-équivariantes – de W dans $(B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$.

On utilise ensuite les résultats du §3 pour montrer
i) que, si E est une représentation banachique de G_K extension de C par une représentation p-adique de dimension h, alors E est munie d'une structure d'espace de Banach-Colmez effectif de dimension 1 et hauteur h,
ii) que si $\eta : E \to C$ est une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante, alors elle est induite par un morphisme dans la catégorie des espaces de Banach-Colmez effectifs.
Le résultat de Colmez implique alors que si l'image de η n'est pas de dimension finie, η est surjective et son noyau est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension h.

– Le théorème de structure pour la catégorie $\mathcal{C}(G_K)$ (th.B ci-dessus) est une conséquence essentiellement formelle de ce résultat, comme on le montre au début du §5. La suite de ce paragraphe consiste surtout à prouver que toute extension de B_{dR}^+-représentations est *presque scindée*, que toute B_{dR}^+-représentation est presqu'isomorphe à une C-représentation triviale et que, dans la catégorie des représentations banachiques, toute extension presque scindée de B_{dR}^+-représentations est encore une B_{dR}^+-représentation. On y fait un grand usage de l'étude des B_{dR}^+-représentations faite au §1. On utilise aussi certaines représentations p-adiques spécifiques pour construire explicitement certains presque-scindages et certains presqu'isomorphismes.

– Dans le §6, on calcule les groupes d'extensions dans la catégorie des presque-C-représentations. Les résultats du §5 permettent de ramener ces calculs soient à ceux des groupes d'extensions dans la catégorie des B_{dR}^+-représentations, calculs déjà faits au §1, soient à ceux des groupes d'extensions dans la catégorie des représentations p-adiques, lesquels se ramènent aux calculs de cohomologie galoisienne continue de Tate.
Soient X et Y des presque-C-représentations. On montre (th.6.1) que les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$ sont de dimension finie, nulle si $n \geq 3$ et que

$$\sum_{n=0}^{2}(-1)^n \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) = -[K:\mathbb{Q}_p]h(X)h(Y)$$

On construit (prop.6.8) une application naturelle $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(X,X(1)) \to \mathbb{Q}_p$ et on montre (prop.6.9) que, pour $0 \leq n \leq 2$, l'application

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) \times \mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(Y,X(1)) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(X,X(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

définit une dualité parfaite.

– Dans le §7, on étudie la catégorie des *presque-C-représentations de G_K à presqu'isomorphismes près*, i.e. la catégorie déduite de $\mathcal{C}(G_K)$ en rendant inversible les presqu'isomorphismes. C'est une catégorie abélienne semi-simple qui a une seule classe d'isomorphisme d'objets simples, celle de C. Le corps gauche $\mathcal{D}_K$ des endomorphismes de C dans cette catégorie est assez gros. Il contient K et on dispose d'une suite exacte courte de K-espaces vectoriels

$$0 \to K \to \mathcal{D}_K \to ((C \otimes_{\mathbb{Q}_p} C_f)(-1))^{G_K} \to K \to 0$$

où C_f désigne la réunion des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, stables par G_K, de C. Mais la structure multiplicative de $\mathcal{D}_K$ reste assez mystérieuse.

– Dans le §8, on fait le lien entre cet article et le prologue de cette introduction. On décrit quelques objets universels que l'on peut associer à la cohomologie étale des variétés algébriques sur K, en particulier dans le cas des variétés abéliennes.
On définit aussi l'espace tangent t_V d'une représentation p-adique quelconque et l'exponentielle de Bloch-Kato

$$\exp_{BK} : t_V \to H^1_{\mathrm{cont}}(K, V)$$

qui généralisent de façon évidente ces notions, maintenant classiques, pour des représentations de de Rham. On montre que l'image $H^1_e(K, V)$ de $\exp_{BK}$ est le sous-groupe de $H^1_{\mathrm{cont}}(K, V) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p, V)$ formé des classes d'extensions qui proviennent, via l'inclusion de $\mathbb{Q}_p$ dans B^+_{dR}, d'une extension de B^+_{dR} par V.

Une partie de ce travail a été fait pendant un séjour à l'*University of Sydney* en Australie, une autre pendant un séjour au *Korea Institute for Advanced Study* de Séoul en République de Corée. J'ai plaisir à remercier ces institutions - et tout particulièrement Mark Kisin et Minhyong Kim - pour leur accueil chaleureux.
Je voudrais enfin remercier le rapporteur pour sa lecture minutieuse et ses remarques pertinentes.

2 – – Etude des B^+_{dR}-représentations de G_K

Soit K_∞ la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K contenue dans $\overline{K}$, i.e. l'unique $\mathbb{Z}_p$-extension de K contenue dans le sous-corps de $\overline{K}$ engendré sur K par les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. Soient $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et $\Gamma_K = G_K/H_K$.
Dans le §2.1, nous introduisons un anneau de séries formelles $K_\infty[[\underline{t}]]$ qui est un sous-anneau de $(B^+_{dR})^{H_K}$ stable par Γ_K et construisons une équivalence entre la catégorie des B^+_{dR}-représentations de G_K et celle des $K_\infty[[\underline{t}]]$-*représentations de* Γ_K.
Dans le §2.2, on montre que cette dernière catégorie a une structure de catégorie tannakienne K-linéaire et est équippée d'un foncteur fibre à valeurs dans les

K_∞-espaces vectoriels. On décrit le groupe pro-algébrique associé à ce foncteur-fibre. On en déduit quelques résultats sur les groupes d'extensions dans cette catégorie.
Si Y est une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ_K, la théorie de Sen permet de définir un endomorphisme ∇_0 du K_∞-espace vectoriel sous-jacent. Si les valeurs propres de ∇_0 sont dans K et suffisamment petites, on peut utiliser l'exponentielle pour donner une description terre à terre de Y et de la B^+_{dR}-représentation qui lui est associée (on dit qu'une telle B^+_{dR}-représentation est *petite*). L'étude des petites représentations est l'objet du §2.3.
Si W est une B^+_{dR}-représentation de G_K, il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que W est petite en tant que représentation de $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$. Une notion de changement de base permet alors de ramener le calcul des groupes d'extensions dans la catégorie des B^+_{dR}-représentations au cas des petites représentations. C'est ce qu'on fait dans le §2.4.
Dans le §2.5 enfin, on calcule ces groupes d'extensions. On montre que si W_1 et W_2 sont des B^+_{dR}-représentations, les $\mathrm{Ext}^i(W_1, W_2)$ sont des K-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $i \geq 3$ et $\sum_{i=0}^{2} \dim_K \mathrm{Ext}^i(W_1, W_2) = 0$ (th.2.14). On dispose en outre (prop.2.16) d'une dualité parfaite

$$\mathrm{Ext}^i(W_1, W_2) \times \mathrm{Ext}^{2-i}(W_2, W_1(1)) \to K$$

En outre (prop. 2.15), si W est un objet simple de la catégorie des B^+_{dR}-représentations, les $\mathrm{Ext}^i(C, W)$ sont tous nuls sauf dans les cas suivants :
(i) $W = C$ et $i = 0$ ou 1, et chacun de ces deux K-espaces vectoriels est de dimension 1,
(ii) $W = C(1)$ et $i = 1$ ou 2, chacun de ces deux K-espaces vectoriels étant encore de dimension 1.

2.1 – B^+_{dR}-représentations et $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations ; structures tannakiennes

Le générateur choisi t de $\mathbb{Z}_p(1)$ correspond à une suite $(\varepsilon^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varepsilon^{(n)} \in \overline{K}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité et où $(\varepsilon^{(n+1)})^p = \varepsilon^{(n)}$ pour tout n. Si $p \neq 2$, on note π_t l'unique uniformisante du corps $\mathbb{Q}_p[\varepsilon^{(1)}]$ telle que $(\pi_t)^{p-1}+p = 0$ et $v_p(\varepsilon^{(1)} - 1 - \pi_t) \geq \frac{2}{p-1}$; si $p = 2$, on pose $\pi_t = 2\varepsilon^{(2)}$. Alors $\underline{t} = t/\pi_t$ est un élément de $(B^+_{dR})^{H_K}$ qui est encore une uniformisante de B^+_{dR}. L'anneau $K_\infty[[\underline{t}]]$ des séries formelles en l'indéterminée $\underline{t}$ s'identifie à un sous-anneau de $(B^+_{dR})^{H_K}$ stable par Γ_K et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'image de cet anneau dans $(B_m)^{H_K} = (B^+_{dR}/t^m B^+_{dR})^{H_K} = (B^+_{dR}/\underline{t}^m B^+_{dR})^{H_K} = (B^+_{dR})^{H_K}/\underline{t}^m (B^+_{dR})^{H_K}$ s'identifie à $K_\infty[[\underline{t}]]/\underline{t}^m$ et est dense dans $(B_m)^{H_K}$ (cf [Fo00], §3).
Soit W une B^+_{dR}-représentation. Alors W^{H_K} est un $(B^+_{dR})^{H_K}$-module muni d'une action semi-linéaire de Γ_K. Notons W^f la réunion des sous-K-espaces vectoriels de dimension finie de W^{H_K} stables par Γ_K. C'est un sous-$K_\infty[[\underline{t}]]$-module stable par Γ_K de W^{H_K}.

PROPOSITION 2.1 (cf. [Fo00], th.3.5 et 3.6 [(2)]). — *Pour toute B_{dR}^+-représentation W de G_K, W^{H_K} est un $(B_{dR}^+)^{H_K}$-module de longueur finie, W^f un $K_\infty[[\underline{t}]]$-module de longueur finie et les applications naturelles*

$$B_{dR}^+ \otimes_{(B_{dR}^+)^{H_K}} W^{H_K} \to W \text{ et } B_{dR}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} W^f \to W$$

sont des isomorphismes.

Autrement dit, la correspondance $W \mapsto W^f$ est de façon évidente un foncteur de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma_K)$ des $K_\infty[[\underline{t}]]$-*représentations de* Γ_K (i.e. des $K_\infty[[\underline{t}]]$-modules de longueur finie munis d'une action linéaire et continue de Γ_K [(3)])). Ce foncteur est une équivalence de catégorie et le foncteur $Y \mapsto Y_{dR} := B_{dR}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} Y$ est un quasi-inverse.

Si Y_1 et Y_2 sont deux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations de G_K, le produit tensoriel $Y_1 \otimes Y_2 := Y_1 \otimes_{K_\infty} Y_2$ (attention : on ne prend pas le produit tensoriel au dessus de $K_\infty[[\underline{t}]]$!) est muni d'une action naturelle de Γ_K. On en fait une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ_K en posant, $\underline{t}(y_1 \otimes y_2) = \underline{t}y_1 \otimes y_2 + y_1 \otimes \underline{t}y_2$ quels que soient $y_1 \in Y_1$ et $y_2 \in Y_2$.
De la même façon, le K_∞-espace vectoriel $Hom(Y_1, Y_2) := \mathcal{L}_{K_\infty}(Y_1, Y_2)$ des applications K_∞-linéaires de Y_1 dans Y_2 est muni d'une action naturelle de Γ_K. On en fait une $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ_K en posant $(\underline{t}\eta)(y) = \underline{t}\eta(y) - \eta(\underline{t}y)$ pour tout $\eta \in Hom(Y_1, Y_2)$ et $y \in Y_1$.
On voit que l'on a ainsi muni $\mathrm{Rep}_{K_\infty[[\underline{t}]]}(\Gamma_K)$ d'une structure de catégorie tannakienne sur K, dont l'objet unité est K_∞ muni de l'action tautologique de $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.
Par transport de structure, $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ devient une catégorie tannakienne dont l'objet-unité est $B_{dR}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} K_\infty = C$. Si W_1 et W_2 sont deux objets de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$, $W_1 \otimes W_2 = B_{dR}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} (W_1^f \otimes W_2^f)$ et $\mathcal{H}\wr\Updownarrow(W_1, W_2) = B_{dR}^+ \otimes_{K_\infty[[\underline{t}]]} Hom(W_1^f, W_2^f)$. On prendra garde à ne pas confondre $W_1 \otimes W_2$ avec $W_1 \otimes_{B_{dR}^+} W_2$ et $Hom(W_1, W_2)$ avec $\mathcal{L}_{B_{dR}^+}(W_1, W_2)$; ces dernières structures ne font d'ailleurs pas de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ une catégorie tannakienne. Toutefois, si W_1 et W_2 sont des C-représentations, $W_1 \otimes W_2 = W_1 \otimes_C W_2$ et $Hom(W_1, W_2) = \mathcal{L}_C(W_1, W_2)$.

Exercice : Si $m, n \in \mathbb{N}$, avec $m \geq n$, alors $B_m \otimes B_n \simeq \oplus_{i=0}^{n-1} B_{m+n-1-2i}(i)$.

---

(2) On prendra garde que dans [Fo00] les B_{dR}^+-représentations de G_K et les $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations de Γ_K considérées ne sont pas supposées de longueur finie, comme on le fait ici.
(3) Attention que $K_\infty[[\underline{t}]]$ n'est pas complet pour la topologie induite par celle de B_{dR}^+ ; et que K_∞ et les $K_\infty[[\underline{t}]]/(\underline{t}^r)$ ne sont pas des banach.

2.2 – Connexions et groupes pro-algébriques

Soient E un corps de caractéristique 0 et $E[[\underline{t}]]$ l'anneau des séries formelles en une indéterminée $\underline{t}$ à coefficients dans E. Notons $\Omega^{\log}_{E[[\underline{t}]]/E}$ le module des *E-différentielles continues logarithmiques de* $E[[\underline{t}]]$, autrement dit le $E[[\underline{t}]]$-module libre de rang 1 de base $d\underline{t}/\underline{t}$ (base qui ne change pas si l'on remplace $\underline{t}$ par $\lambda\underline{t}$, avec $\lambda \in E^*$).
Si Y est un $E[[\underline{t}]]$-module de longueur finie, une *connexion* ∇ *sur* Y est une application E-linéaire de Y dans $Y \otimes_{E[[\underline{t}]]} \Omega^{\log}_{E[[\underline{t}]]/E}$ vérifiant la règle de Leibniz. Se donner une application E-linéaire ∇ de Y dans $Y \otimes_{E[[\underline{t}]]} \Omega^{\log}_{E[[\underline{t}]]/E}$ revient à se donner une application E-linéaire $\nabla_0 : Y \to Y$ (on pose $\nabla(y) = \nabla_0(y) \otimes d\underline{t}/\underline{t}$) et ∇ est alors une connexion si et seulement si ∇_0 vérifie $\nabla_0(\underline{t}y) = \underline{t}(y + \nabla_0(y))$ pour tout $y \in Y$.

Proposition 2.2 (cf [Fo00], prop.3.7 et 3.8). — *i) Pour toute $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation Y de Γ_K, il existe une et une seule connexion ∇ sur Y qui a la propriété que, pour tout $y \in Y$, il existe un sous-groupe ouvert $\Gamma_{K,y}$ de Γ_K tel que, pour tout $\gamma \in \Gamma_{K,y}$,*

$$\gamma(y) = \exp(\log \chi(\gamma).\nabla_0)(y)$$

ii) Deux $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentations Y_1 et Y_2 de Γ_K sont isomorphes si et seulement s'il existe une application $K_\infty[[\underline{t}]]$-linéaire $\varphi : Y_1 \to Y_2$ qui commute à l'action de ∇_0.

Remarquons que, si E est un corps de caractéristique 0, se donner un $E[[\underline{t}]]$-module de longueur finie muni d'une connexion ∇ revient à se donner un E-espace vectoriel de dimension finie muni de deux endomorphismes $\underline{t}$ et ∇_0, avec $\underline{t}$ nilpotent, vérifiant la relation $\nabla_0\underline{t} - \underline{t}\nabla_0 = \underline{t}$. C'est la raison pour nous pour introduire la catégorie qui suit : on fixe une clôture algébrique $\overline{E}$ de E et on se donne un sous-ensemble S du groupe additif de $\overline{E}$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ et par la translation $\alpha \mapsto \alpha + 1$. On note $\mathcal{C}_{S,E}$ la catégorie suivante :
– un objet est un E-espace vectoriel muni de deux endomorphismes ∇_0 et $\underline{t}$ vérifiant :
i) les valeurs-propres de ∇_0 dans $\overline{E}$ sont dans S,
ii) l'endomorphisme $\underline{t}$ est nilpotent,
iii) on a $\nabla_0\underline{t} - \underline{t}\nabla_0 = \underline{t}$;
– un morphisme est une application E-linéaire qui commute à ∇_0 et $\underline{t}$.

On obtient ainsi une catégorie abélienne E-linéaire. La sous-catégorie pleine $\mathcal{C}^f_{S,E}$ de $\mathcal{C}_{S,E}$ dont les objets sont ceux qui sont de dimension finie sur E s'identifie à la sous-catégorie pleine de la catégorie des $E[[\underline{t}]]$-modules de longueur finie munis d'une connection ∇ dont les objets sont ceux pour lesquels les valeurs propres de l'endomorphisme ∇_0 du E-espace vectoriel sous-jacent sont dans S.
Lorsque S est *un sous-groupe de* $\overline{E}$, cette catégorie a une structure de catégorie tannakienne neutre sur E :

– le E-espace vectoriel sous-jacent au produit tensoriel $X_1 \otimes X_2$ de X_1 et X_2 est le produit tensoriel des E-espaces vectoriels sous-jacents, avec $\nabla_0(x_1 \otimes x_2) = \nabla_0 x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes \nabla_0 x_2$ et $\underline{t}(x_1 \otimes x_2) = \underline{t}x_1 \otimes x_2 + x_1 \otimes \underline{t}x_2$,
– le E-espace vectoriel sous-jacent au Hom interne $Hom(X_1, X_2)$ de X_1 et X_2 est $\mathcal{L}_E(X_1, X_2)$, avec $\nabla_0(\eta)(x) = \nabla_0(\eta(x)) - \eta(\nabla_0 x)$ et $\underline{t}(\eta)(x) = \underline{t}(\eta(x)) - \eta(\underline{t}x)$,
– l'objet unité est E avec $\nabla_0 = \underline{t} = 0$.
On prendra garde que si X_1 et X_2 sont deux objets de $\mathcal{C}^f_{S,E}$, le $E[[\underline{t}]]$-module sous-jacent à $X_1 \otimes X_2$ (resp. $Hom(X_1, X_2)$) n'est pas isomorphe en général à $X_1 \otimes_{E[[\underline{t}]]} X_2$ (resp. $\mathcal{L}_{E[[\underline{t}]]}(X_1, X_2)$).

Toujours lorsque S est un sous-groupe de $\overline{E}$, la catégorie $\mathcal{C}^f_{S,E}$ est neutre et s'identifie donc à la catégorie des représentations E-linéaires de dimension finie du groupe pro-algébrique sur E qui est le groupe $\mathbb{C}_{S,E}$ des $\otimes$-automorphismes du foncteur fibre tautologique qui, à tout objet de $\mathcal{C}^f_{S,E}$, associe le E-espace vectoriel sous-jacent. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}^f_{S,E}$ dont les objets sont ceux sur lesquels $\underline{t} = 0$ s'identifie à la catégorie des représentations E-linéaires de dimension finie d'un quotient $\mathbb{T}_{S,E}$ de $\mathbb{C}_{S,E}$. En écrivant $\nabla_0 = \nabla_0^n + \nabla_0^{ss}$, avec $\nabla_0^n \nabla_0^{ss} = \nabla_0^{ss} \nabla_0^n$, ∇_0^n nilpotent et ∇_0^{ss} semi-simple, on peut identifier (cf. par exemple [Fo00], §2.4) $\mathbb{T}_{S,E}$ au produit du groupe additif sur E par le groupe de type multiplicatif $\mathbb{T}^m_{S,E}$ dont le groupe des caractères $\mathrm{Hom}_{\overline{E}}(\mathbb{T}^m_{S,E} \times \overline{E}, \mathbb{G}_{m,\overline{E}})$ est S (avec l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ induite par l'action sur $\overline{E}$).
La projection de $\mathbb{C}_{S,E}$ sur $\mathbb{T}_{S,E}$ admet une section canonique : elle s'obtient en associant à tout objet X de $\mathcal{C}_{S,E}$, la représentation de $\mathbb{T}_{S,E}$ dont le E-espace vectoriel sous-jacent est X muni de la même action de ∇_0, mais ou l'on fait agir $\underline{t}$ par 0.
Se donner une action du groupe additif $\mathbb{G}_{a,E}$ sur un E-espace vectoriel revient à se donner un endomorphisme nilpotent de cet espace. L'action de $\underline{t}$ induit ainsi une action de $\mathbb{G}_{a,E}$ sur tout objet X de $\mathcal{C}_{S,E}$, ce qui définit un morphisme de $\mathbb{G}_{a,E}$ dans $\mathbb{C}_{S,E}$. On voit que ce morphisme identifie $\mathbb{G}_{a,E}$ au noyau de la projection de $\mathbb{C}_{S,E}$ sur $\mathbb{T}_{S,E}$, donc que $\mathbb{C}_{S,E}$ est le produit semi-direct du groupe pro-algébrique commutatif $\mathbb{T}_{S,E}$ par le sous-groupe invariant $\mathbb{G}_{a,E}$.
Pour voir l'action de $\mathbb{T}_{S,E}$ sur $\mathbb{G}_{a,E}$, on commence par vérifier que la relation $\nabla_0 \underline{t} - \underline{t}\nabla_0 = \underline{t}$ équivaut en fait à $\nabla_0^n \underline{t} = \underline{t}\nabla_0^n$ et $\nabla_0^{ss}\underline{t} - \underline{t}\nabla_0^{ss} = \underline{t}$. Ceci implique que le sous-groupe de $\mathbb{T}_{S,E}$ isomorphe à $\mathbb{G}_{a,E}$ opère trivialement sur $\mathbb{G}_{a,E}$. Soit $\mathbb{H}_E$ le sous-groupe de $\mathbb{G}L_{2,E}$ formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$. L'inclusion de $\mathbb{Z}$ dans S fournit un morphisme $\mathbb{T}_{S,E} \to \mathbb{T}^m_{S,E} \to \mathbb{T}^m_{\mathbb{Z},E} = \mathbb{G}_{m,E}$ et on vérifie que $\mathbb{C}_{S,E}$ s'identifie au produit fibré $\mathbb{H} \times_{\mathbb{G}_{m,E}} \mathbb{T}_{S,E}$.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}_{S,E}$, notons $X\{-1\}$ l'objet de $\mathcal{C}_{S,E}$ qui a le même E-espace vectoriel sous-jacent, avec la même action de $\underline{t}$, la nouvelle action de ∇_0 étant $x \mapsto (\nabla_0 - 1)(x)$.

Proposition 2.3. — *Soient E un corps de caractéristique 0 et $\overline{E}$ une clôture algébrique de E. Soient S et S' deux sous-ensembles de $\overline{E}$ stables par* $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ *et par la translation $\alpha \mapsto \alpha+1$.*
i) Si X est un objet de $\mathcal{C}_{S,E}$, les $\mathrm{Ext}^n(E,X)$ *s'identifient, canoniquement et fonctoriellement, aux groupes de cohomologie du complexe*

$$(C_X) \qquad X \xrightarrow{d^0} X\{-1\} \oplus X \xrightarrow{d^1} X\{-1\} \to 0 \to 0 \to 0 \ldots$$

où le premier terme est placé en degré 0, $d^0(x) = (\underline{t}x, \nabla_0 x)$ et $d^1(y,z) = \underline{t}z - \nabla_0 y$.
ii) Si $S \subset S'$ et si X_1 et X_2 sont deux objets de $\mathcal{C}_{S,E}$, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(X_1,X_2) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S',E}}(X_1,X_2)$ *est bijective pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
iii) Si $S \cap S' = \emptyset$, si X est un objet de $\mathcal{C}_{S,E}$ et X' un objet de $\mathcal{C}_{S',E}$, on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S\cup S',E}}(X,X') = 0$ *pour tout n.*
iv) Si S est un sous-groupe de $\overline{E}$ et si X_1 et X_2 sont deux objets de $\mathcal{C}^f_{S,E}$ et si $n \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(X_1,X_2)$ *est un E-espace vectoriel de dimension finie, nul si $n \geq 3$ qui s'identifie (canoniquement et fonctoriellement) à* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(E, Hom(X_1,X_2))$.
En outre, $\sum_{n=0}^{2}(-1)^n \dim_E \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(X_1,X_2) = 0$.

Preuve : Remarquons que les $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,X)$ sont les foncteurs dérivés du foncteur $\Gamma : \mathcal{C}_{S,E} \to \underline{\mathrm{Vect}}_E$ qui envoie X sur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,X)$. L'assertion (i) peut alors se voir :
– soit en notant $\mathcal{C}_{S,\underline{t}=0,E}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_{S,E}$ formée des objets sur lesquels $\underline{t} = 0$, en remarquant que $\Gamma = \Gamma_2 \circ \Gamma_1$ où $\Gamma_1 : \mathcal{C}_{S,E} \to \mathcal{C}_{S,\underline{t}=0,E}$ est le foncteur qui envoie X sur $X_{\underline{t}=0}$ tandis que Γ_2 est la restriction à $\mathcal{C}_{S,\underline{t}=0,E}$ de Γ, et que le complexe (C_X) est le complexe simple associé au complexe double

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & X & \xrightarrow{\underline{t}} & X\{-1\} & \to & 0 & \to & \ldots & \to & 0 & \to & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_0} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_0} & & & & & & & & \\
0 & \to & X & \xrightarrow{\underline{t}} & X\{-1\} & \to & 0 & \to & \ldots & \to & 0 & \to & \ldots
\end{array}$$

– soit en remarquant que la correspondance $X \mapsto C_X$ est un foncteur exact de la catégorie $\mathcal{C}_{S,E}$ dans la catégorie des complexes bornés à gauche de E-espaces vectoriels, qui définit donc un δ-foncteur (ou foncteur cohomologique) dont le H^0 est ce que l'on veut et dont on vérifie facilement qu'il est effaçable.
Le fait que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(X_1,X_2)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(E, Hom(X_1,X_2))$ est un résultat standard valable dans n'importe quelle catégorie tannakienne. Les autres assertions résultent immédiatement de (i). □

Le groupe $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \times \mathbb{Z}$ agit sur le sous-ensemble S de $\overline{E}$ stable par $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ et par la translation $\alpha \to \alpha+1$ (qui définit l'action du générateur 1 de $\mathbb{Z}$ sur S). La proposition ci-dessous montre que, si $\mathcal{O}(S)$ désigne l'ensemble des orbites de $\overline{E}$ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E) \times \mathbb{Z}$, on a une décomposition canonique de tout objet X de $\mathcal{C}_{S,E}$

$$X = \oplus_{A \in \mathcal{O}(S)} X_{(A)}$$

où $X_{(A)}$ est le plus grand sous-objet de X pour lequel toutes les valeurs propres de ∇_0 sont dans A.

Pour tout objet X de $\mathcal{C}_{S,E}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$, notons $X_{(i)}$ le sous-espace caractéristique correspondant à la valeur-propre i de ∇_0. Il est muni d'une filtration croissante par des sous E-espaces vectoriels

$$0 = X_{(i,-1)} \subset X_{(i,0)} \subset \ldots X_{(i,n-1)} \subset X_{(i,n)} \subset \ldots \subset X_{(i)}$$

définie inductivement en posant $X_{(i,n)} = \{x \in X \mid \nabla_0(x) - ix \in X_{(i,n-1)}\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si X est dans $\mathcal{C}^f_{S,E}$, on an a $X_{(i)} = X_{(i,n)}$ pour n suffisamment grand. L'assertion suivante est immédiate :

PROPOSITION 2.4. — *Soit S un sous-ensemble de $\overline{E}$ contenant 0, stable par* $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ *et par la translation $\alpha \to \alpha+1$. Soit X un objet de $\mathcal{C}^f_{S,E}$ et soit $X_{(\mathbb{Z})} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} X_{(i)}$. Alors $X_{(\mathbb{Z})}$ est stable par ∇_0 et $\underline{t}$. C'est le plus grand sous-objet de X qui est dans $\mathcal{C}^f_{\mathbb{Z},E}$ et c'est un facteur direct de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application naturelle* $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(E, X_{(\mathbb{Z})}) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,X)$ *est un isomorphisme*

□

Remarquons également que le complexe $(C_{X_{(\mathbb{Z})}})$ se décompose en une somme directe de complexes

$$(C_{X,i}) \qquad X_{(i)} \to X_{(i+1)} \oplus X_{(i)} \to X_{(i+1)} \to 0 \to 0 \to 0 \ldots$$

avec $d^0(x) = (\underline{t}x, \nabla_0(x))$ et $d^1(y,z) = \underline{t}z - (\nabla_0 - 1)(y)$.

PROPOSITION 2.5. — *Soit X un objet de $\mathcal{C}_{S,E}$.*
i) Les $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,X)$ *s'identifient canoniquement et fonctoriellement aux groupes de cohomologie du complexe*

$$(C_{X,0}) \qquad X_{(0)} \to X_{(1)} \oplus X_{(0)} \to X_{(1)} \to 0 \to 0 \to 0 \ldots$$

(avec $d^0(x) = (\underline{t}x, \nabla_0(x))$ et $d^1(y,z) = \underline{t}z - (\nabla_0 - 1)(y)$).
ii) Soit E' l'objet de $\mathcal{C}_{S,E}$ dont le E-espace vectoriel sous-jacent est E lui-même, avec $\underline{t} = 0$ et $\nabla_0 = \mathrm{id}_E$. Alors $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,E')$ *est un E-espace vectoriel de dimension 1 et, pour $0 \le n \le 2$, le cup-produit induit une dualité parfaite*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,X) \times \mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}_{S,E}}(X,E') \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,E')$$

Preuve : L'assertion (i) résulte de ce que, pour $i \neq 0$, le complexe $C_{X,i}$ est acyclique puisque ∇_0 est bijectif sur $X_{(i)}$ et $\nabla_0 - 1$ est bijectif sur $X_{(i+1)}$. Compte-tenu de (i), le fait que $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,E')$ est de dimension 1 est immédiat. Le reste de l'assertion (ii) résulte de ce que, si $X' = \mathit{Hom}(X,E')$, le complexe $C_{X',0}$ s'identifie au dual, convenablement décalé, du complexe $C_{X,0}$. □

Soit $\varepsilon \in H^1(C_{X,0})$. Il est facile de décrire explicitement une extension Y de E par X dont la classe est ε : si $(b,c) \in Z^1(C_{X,0})$ représente ε, alors, en tant que E-espace vectoriel $Y = X \oplus E$. Si $(x,\lambda) \in Y$, on a $\underline{t}(x,\lambda) = (\underline{t}x + \lambda b, 0)$ et $\nabla_0(x,\lambda) = (\nabla_0(x) + \lambda c, 0)$. En particulier, on voit que cette extension est scindée, en tant que suite exacte de $E[[\underline{t}]]$-modules, si et seulement si l'on peut choisir le représentant (b,c) pour que $b = 0$.

Si X_1 et X_2 sont des objets de $\mathcal{C}^f_{S,E}$, on note $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E},0}(X_1,X_2)$ le sous-E-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E}}(X_1,X_2)$ qui classifie les extensions de X_1 par X_2 qui sont scindées en tant qu'extensions de $E[[\underline{t}]]$-modules. Rappelons que le $E[[\underline{t}]]$-module sous-jacent à $\mathcal{H}\wr\Updownarrow(X_1,X_2)$ ne s'identifie pas en général à $\mathcal{L}_{E[[\underline{t}]]}(X_1,X_2)$. Cependant, on vérifie sans peine que lorsque l'on identifie $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E}}(X_1,X_2)$ à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,\mathcal{H}\wr\Updownarrow(X_1,X_2))$, le sous-$E$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E},}(X_1,X_2)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E},0}(E,\mathcal{H}\wr\Updownarrow(X_1,X_2))$. Le calcul de ce Ext^1 se ramène donc au calcul de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E},0}(E,X)$ pour X objet de $\mathcal{C}^f_{S,E}$. Mais ce qu'on vient de faire nous montre que, si $X_{(0),\underline{t}=0}$ désigne le noyau de l'application $X_{(0)} \to X_{(1)}$ induite par la multiplication par $\underline{t}$, ce groupe s'identifie au H^1 du sous-complexe de $C_{X,0}$

$$X_{(0),\underline{t}=0} \xrightarrow{\nabla_0} X_{(0),\underline{t}=0}$$

On a donc :

Proposition 2.6. — *Soit X un objet de $\mathcal{C}^f_{S,E}$. On a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,X) \to X_{(0),\underline{t}=0} \xrightarrow{\nabla_0} X_{(0),\underline{t}=0} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E},0}(E,X) \to 0$$

et $\dim_E \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E},0}(E,X) = \dim_E \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(E,X)$.

□

Le corps $E((\underline{t}))$ des séries formelles en $\underline{t}$ à coefficients dans E a une structure naturelle d'objet de $\mathcal{C}_{\mathbb{Z},E}$, avec $\nabla_0(\sum a_i\underline{t}^i) = \sum ia_i\underline{t}^i$.Tout idéal fractionnaire de $E[[\underline{t}]]$, en particulier $E[[\underline{t}]]$ lui-même, est stable par $\underline{t}$ et ∇_0.

Proposition 2.7. — *Soit X un objet de $\mathcal{C}^f_{S,E}$. On a une suite exacte*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(E[[\underline{t}]],X) \to X_{(0)} \xrightarrow{\nabla_0} X_{(0)} \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E}}(E[[\underline{t}]],X) \to 0$$

En particulier les E-espaces vectoriels $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(E[[\underline{t}]],X)$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E}}(E[[\underline{t}]],X)$ *ont la même dimension finie et* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(E[[\underline{t}]],X) = X_{(0,0)}$.

Preuve : Se donner une application $E[[\underline{t}]]$-linéaire de $E[[\underline{t}]]$ dans X revient à se donner l'image x de 1 dans X qui peut être n'importe quel élément. L'application ainsi définie commute à ∇_0 si et seulement si $\nabla_0(x) = 0$. D'où $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(E[[\underline{t}]],X) = \mathrm{Ker}\ (X_{(0)} \xrightarrow{\nabla_0} X_{(0)}) = X_{(0,0)}$.

Soit Y une extension de $E[[\underline{t}]]$ par X. L'élément $1 \in E[[\underline{t}]]$ est dans le sous-espace propre associé à la valeur-propre 0 de ∇_0 et on peut choisir un relèvement e de 1 dans le sous-espace caractéristique de Y associé à la valeur propre 0. On doit avoir $a = \nabla_0(e) \in X_{(0)}$. Si l'on change le relèvement de 1 en choisissant $e' = e + x$, avec $x \in X_{(0)}$, on a $\nabla_0(e') = a + \nabla_0(x)$ et l'image de a dans Coker $(X_{(0)} \xrightarrow{\nabla_0} X_{(0)})$ ne dépend pas du choix du relèvement. On a ainsi défini une application de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E}}(E[[\underline{t}]], X)$ dans ce conoyau. On vérifie sans peine que c'est un isomorphisme. $\square$

Proposition 2.8. — *Soit X un objet de $\mathcal{C}^f_{S,E}$. Notons $\overline{X}_{(-1)}$ le plus grand quotient de $X_{(-1)}$ sur lequel l'action de ∇_0 est semi-simple. Alors* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(X, E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]])$ *s'identifie au E-espace vectoriel des applications E-linéaires de $\overline{X}_{(-1)}$ dans le sous-E-espace vectoriel de $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]$ engendré par l'image de $\underline{t}^{-1}$. C'est un E-espace vectoriel de dimension finie égale à celle de $X_{(-1,0)}$.*

Preuve : La deuxième assertion résulte de la première puisqu'alors la dimension de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(X, E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]])$ est égale à celle du plus grand quotient de $X_{(-1)}$ sur lequel l'action de ∇_0 est semi-simple et que cette dimension est aussi celle du sous-espace propre associé à la valeur propre -1.
Montrons la première assertion. Comme les valeurs propres de ∇_0 agissant sur $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]$ sont dans $\mathbb{Z}$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(X, E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(X_{\mathbb{Z}}, E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]])$$

et on peut supposer que $X = X_{(\mathbb{Z})}$. Comme l'action de ∇_0 sur $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]$ est semi-simple, tout morphisme de X dans $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]$ se factorise à travers le plus grand quotient de X sur lequel l'action de ∇_0 est semi-simple ; on peut donc supposer que l'action de ∇_0 sur X est semi-simple et écrire $X = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} X_{(i)}$, où les $X_{(i)}$ sont des E-espaces vectoriels de dimension finie presque tous nuls, ∇_0 étant la multiplication par i dans $X_{(i)}$ et $\underline{t}$ étant une application E-linéaire qui envoie $X_{(i)}$ dans $X_{(i+1)}$.
Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $F^m X = \oplus_{i\geq m} X_{(i)}$ est un sous-objet de X. Les $(F^m X)_{m\in\mathbb{Z}}$ définissent une filtration décroissante, exhaustive et séparée de X par des sous-objets de $\mathcal{C}_{S,E}$. Pour tout m, le quotient $F^m X/F^{m+1} X$ s'identifie à $X_{(m)}$, avec $\nabla_0 =$ la multiplication par m et $\underline{t} = 0$.
Par dévissage, il suffit d'établir le lemme suivant :

Lemme 2.9. — *Soit $m \in \mathbb{Z}$ et soit X un E-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une structure d'objet de $\mathcal{C}_{S,E}$ définie par $\nabla_0(x) = mx$ et $\underline{t}x = 0$, pour tout $x \in X$.*
i) Si $m = -1$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(X, E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]])$ *s'identifie au E-espace vectoriel des applications E-linéaires de X dans le E-espace vectoriel engendré par l'image t_{-1} de $\underline{t}^{-1}$ dans $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]])$,*
ii) si $m \neq -1$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{S,E}}(X, E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]) = 0$,
iii) si $m \neq 0$, on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}_{S,E}}(X, E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]) = 0$.

Preuve : On voit que le noyau de $\underline{t}$ dans $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]$ est aussi le sous-espace propre associé à la valeur-propre -1 et que c'est le E-espace vectoriel de dimension 1 de base t_{-1}. Les assertions (i) et (ii) sont alors évidentes.
Soit maintenant Y un objet de $\mathcal{C}_{S,E}$, extension de $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]$ par X. Pour tout entier $r \geq 1$, soit Z_r le sous $E[[\underline{t}]]$-module de $E((\underline{t}))/E[[\underline{t}]]$ engendré par l'image t_{-r} de $\underline{t}^{-r}$ et soit Y_r l'image inverse de Z_r dans Y. Alors Y est la réunion croissante des Y_r et il suffit de vérifier que, pour tout entier $r > \sup\{0, -m\}$, la suite

$$0 \to X \to Y_r \to Z_r \to 0$$

admet un unique scindage. Comme $\nabla_0(t_{-r}) = -rt_{-r}$ et, comme $-r$ n'est pas valeur-propre de ∇_0 agissant sur X, il existe un unique relèvement e_{-r} de t_{-r} dans Y_r tel que $\nabla_0(e_{-r}) = -re_{-r}$ et il suffit de vérifier que $\underline{t}^r e_r = 0$. A priori, on a $\underline{t}^r e_{-r} = x \in X$, mais on doit avoir $\nabla_0(\underline{t}^r e_{-r}) = r\underline{t}^r e_{-r} + \underline{t}^r \nabla_0(e_{-r}) = 0$, ce qui implique x=0 puisque $\nabla_0(x) = mx$ est différent de 0 si $x \neq 0$. D'où (iii). □

2.3 – Petites représentations

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne. *Une sous-catégorie épaisse* de $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine stable par sous-objet, quotient, somme directe (c'est donc encore une catégorie abélienne) et extension.
Pour tout sous-groupe S de $\overline{K}$ stable sous l'action de G_K, introduisons la sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},S}(G_K)$ de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$ dont les objets sont les W tels que les valeurs-propres de ∇_0 - vu comme un endomorphisme du K_∞-espace vectoriel sous-jacent à W^f - sont dans S. C'est une sous-catégorie tannakienne épaisse de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$.

Soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. On dit qu'un élément $\alpha \in \overline{K}$ est *K-petit* s'il est dans K et si $\alpha \log \chi(g) \in 2p\mathcal{O}_K$ pour tout $g \in G_K$. Les éléments K-petits forment un idéal fractionnaire $\mathfrak{a}_K$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K contenant $\mathcal{O}_K$. On dit qu'une B^+_{dR}-représentation W de G_K est *petite* si c'est un objet de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},\mathfrak{a}_K}(G_K)$. Pour tout $\alpha \in \overline{K}$, il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que α est L-petit ; pour toute extension finie L' de L contenue dans $\overline{K}$, α est alors a fortiori L'-petit.
Soit X un objet de la catégorie $\mathcal{C}^f_{\mathfrak{a}_K,K}$. L'endomorphisme $\underline{t}$ permet de munir le K-espace vectoriel sous-jacent à X d'une structure de $K[[\underline{t}]]$-module de longueur finie. On fait agir G_K sur X via son quotient Γ_K en posant, pour tout $\gamma \in \Gamma_K$ et tout $x \in X$,

$$\gamma(x) = \exp(\log \chi(\gamma).\nabla_0)(x)$$

Cette action est semi-linéaire relativement à l'action naturelle de Γ_K sur $K[[\underline{t}]]$, ce qui nous permet, par extension des scalaires, de munir le B^+_{dR}-module de type fini $R_{dR}(X) = B^+_{dR} \otimes_{K[[\underline{t}]]} X$ d'une action de G_K qui en fait une B^+_{dR}-représentation de G_K. On peut considérer la correspondance R_{dR} comme un foncteur de $\mathcal{C}^f_{\mathfrak{a}_K,K}$ dans $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$.

Proposition 2.10. — *Le foncteur $R_{dR} : \mathcal{C}^f_{\mathfrak{a}_K,K} \to \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$ est pleinement fidèle et son image essentielle est la catégorie $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},\mathfrak{a}_K}(G_K)$ des petites B^+_{dR}-représentations de G_K.*

Preuve : Pour tout objet X de $\mathcal{C}^f_{\mathfrak{a}_K,K}$, il est clair que $X \subset (R_{dR}(X))^f$ et on en déduit que $(R_{dR}(X))^f$ s'identifie à $K_\infty[[\underline{t}]] \otimes_{K[[\underline{t}]]} X = K_\infty \otimes_K X$, l'application ∇_0 sur $(R_{dR}(X))^f$ étant l'extension par K_∞-linéarité de l'application ∇_0 sur X. En particulier, $R_{dR}(X)$ est un objet de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},\mathfrak{a}_K}(G_K)$.

Lemme 2.11. — *Soit W un objet de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},\mathfrak{a}_K}(G_K)$, ∇_0 le K_∞-endomorphisme de W^f qui lui est associé (cf.* prop.2.2*) et soit*

$$W^f_K = \{x \in W^f \mid \gamma(x) = \exp(\log \chi(\gamma).\nabla_0)(x), \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma_K\} .$$

L'application K_∞-linéaire $K_\infty \otimes_K W^f_K = K_\infty[[\underline{t}]] \otimes_{K[[\underline{t}]]} W^f_K \to W^f$, déduite par extension des scalaires de l'inclusion de W^f_K dans W^f, est un isomorphisme

Le lemme implique la proposition puisqu'on voit que le foncteur $W \mapsto W^f_K$ est un quasi-inverse du foncteur R_{dR}.

Prouvons le lemme : Soient d'abord W une B^+_{dR}-représentation arbitraire et $\delta \in \Gamma_K$. Si $y \in W^f$ et si $\gamma \in \Gamma_K$ est suffisamment petit, on a $\gamma(y) = \delta\gamma\delta^{-1}(y) = \delta(\exp(\log \chi(\gamma).\nabla_0)(\delta^{-1}(y))) = \exp(\log \chi(\gamma).\delta\nabla_0\delta^{-1})(y)$. L'unicité de ∇_0 implique donc que $\nabla_0\delta = \delta\nabla_0$.
Supposons maintenant que W est un objet de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},\mathfrak{a}_K}(G_K)$. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_h$ des éléments de W^f qui l'engendrent en tant que $K_\infty[[\underline{t}]]$-module. Pour chaque y_i, choisissons un Γ_{K,y_i} comme dans la proposition 2.2, soit Γ'_K l'intersection des Γ_{K,y_i} et $K' = K_\infty^{\Gamma'_K}$.
Soient $p^n = (\Gamma_K : \Gamma'_K)$ et γ_0 un générateur topologique de Γ_K, de sorte que
a) le corps K' est l'unique extension de degré p^n de K contenue dans K_∞,
b) tout élément de Γ_K s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\gamma_0^{\tau(\gamma)}$ avec $\tau(\gamma) \in \mathbb{Z}_p$,
c) si $\gamma \in \Gamma_K$, alors $\gamma \in \Gamma'_K$ si et seulement si p^n divise $\tau(\gamma)$.
Pour $1 \leq i \leq h$ et tout $\gamma \in \Gamma'_K$, on a $\gamma(y_i) = \exp(\log \chi(\gamma).\nabla_0)(y_i)$. Soit X' le sous-$K'[[\underline{t}]]$-module de W^f engendré par les $\gamma_0^m y_i$, pour $0 \leq m < p^n$ et $1 \leq i \leq h$. C'est un sous-K'-espace vectoriel de dimension finie de W^f stable par Γ_K. Comme $\delta\nabla_0 = \nabla_0\delta$, pour tout $\delta \in \Gamma_K$, on a $\gamma(x) = \exp(\log \chi(\gamma).\nabla_0)(x)$ pour tout $\gamma \in \Gamma'_K$ et tout $x \in X'$.
Par construction, X' contient une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ de W^f sur K_∞. Si $x \in W^f$, on peut écrire $x = \sum_{i=1}^d a_i e_i$, avec les $a_i \in K_\infty$. Pour tout $\gamma \in \Gamma'_K$, on a $\gamma(x) = \sum \gamma(a_i)\gamma(e_i)$; si $x \in X'$, on a aussi $\gamma(x) = \sum a_i\gamma(e_i)$, d'où on déduit que $a_i \in K'$ pour tout i ; donc $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ est aussi une base de X' sur K' et l'application naturelle

$$K_\infty[[\underline{t}]] \otimes_{K'[[\underline{t}]]} X' = K_\infty \otimes_{K'} X' \to W^f$$

est un isomorphisme.
Considérons l'automorphisme $\eta = \exp(\log \chi(\gamma_0).\nabla_0)$ du K'-espace vectoriel X'. Pour tout $\gamma \in \Gamma_K$, on a $\eta \circ \gamma = \gamma \circ \eta$
Pour tout $\gamma \in \Gamma_K$, notons $\rho(\gamma) \in GL_d(K')$ la matrice dont la j-ième colonne est formée des composantes de $\gamma(e_j)$ sur la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$. Cette matrice commute avec la matrice A de l'endomorphisme η dans la même base. Si, pour tout $\gamma \in \Gamma_K$, on pose $\rho_0(\gamma) = \rho(\gamma)A^{-\tau(\gamma)}$, on voit que $\rho_0(\gamma)$ ne dépend que de l'image de γ dans $\mathrm{Gal}(K'/K)$ et que l'application de $\mathrm{Gal}(K'/K)$ dans $GL_d(K')$ ainsi définie est un 1-cocycle. La trivialité de $H^1(\mathrm{Gal}(K'/K), GL_d(K'))$ implique que, quitte à changer la base, on peut supposer que $\rho_0 = 1$. Mais alors les e_j sont dans W_K^f et le même argument que celui que l'on a utilisé pour prouver qu'ils forment une base de X' sur K' montre qu'ils forment aussi une base de W_K^f sur K. Le lemme en résulte. □

Soit $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K. Pour tout $\alpha \in \overline{K}$ qui est K-petit, on note $\chi^{(\alpha)} : G_K \to \mathcal{O}_K^*$ l'homomorphisme continu défini par $\chi^{(\alpha)}(g) = \exp(\alpha \log(\chi(g))$. On note $\mathcal{O}_K\{\alpha\}$ le $\mathcal{O}_K$-module libre de rang 1 qui est $\mathcal{O}_K$ lui-même sur lequel on fait agir G_K via le caractère $\chi^{(\alpha)}$. Enfin pour tout $\mathcal{O}_K$-module M muni d'une action $\mathcal{O}_K$-linéaire de G_K, on pose $M\{\alpha\} = M \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K\{\alpha\}$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\chi^i = \chi^{(i)}(\omega)^i$, où $\omega : G_K \to \mathbb{Z}_p^*$ est le caractère d'ordre fini qui donne l'action de G_K sur les racines $2p$-ièmes de 1 ; il en résulte que $C\{i\}$ est isomorphe, non canoniquement, à $C(i)$.
Si α est K-petit, comme $C\{\alpha\}$ est de dimension 1 sur C, $C\{\alpha\}$ est un objet simple de la catégorie des B_{dR}^+-représentations ; comme l'opérateur $\nabla_0(W)$ est la multiplication par α, $C\{\alpha\}$ est une petite B_{dR}^+-représentation.

PROPOSITION 2.12. — *L'application qui à $\alpha \in \mathfrak{a}_K$ associe la classe d'isomorphisme de $C\{\alpha\}$ définit une bijection de l'ensemble des éléments K-petits sur celui des classes d'isomorphismes d'objets simples de la catégorie des petites B_{dR}^+-représentations de G_K.*

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. □

Remarque : Notons $\overline{\mathfrak{a}}_K$ l'ensemble des orbites de $\mathfrak{a}_K$ sous l'action de $\mathbb{Z}$ (où 1 agit par la translation $\alpha \to \alpha+1$). La décomposition canonique de tout objet de $\mathcal{C}_{S,E}$ en somme directe indexée par les orbites de S sous l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{E}/E)$ induit, via le foncteur R_{dR}, lorsque l'on prend $S = \mathfrak{a}_K$, une décomposition canonique de toute petite représentation

$$W = \oplus_{A \in \overline{\mathfrak{a}}_K} W_A$$

où (avec les notations du lemme 2.11) $W_A = R_{dR}((W_K^f)_{(A)})$ est la plus grande sous-B_{dR}^+-représentation de W telle que les valeurs propres de ∇_0 sur $W_A)^f$ sont dans A. En particulier $W_{\mathbb{Z}}$ correspond à la plus grande représentation pour laquelle les valeurs-propres de ∇_0 sont dans $\mathbb{Z}$.

2.4 – Changement de base

Soit L une extension finie de K (la discussion qui suit reste valable en remplaçant K par n'importe quel corps). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie tannakienne sur K. Rappelons (cf. par exemple [DM82], p.155) que l'on peut définir la catégorie tannakienne $\mathcal{C}_L$ sur L déduite de $\mathcal{C}$ par l'extension des scalaires $K \to L$: Un objet de $\mathcal{C}_L$ peut être vu comme un couple (X, ρ) formé d'un objet X de $\mathcal{C}$ et d'un homomorphisme de K-algèbres $\rho : L \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$; les morphismes sont les morphismes des objets de $\mathcal{C}$ sous-jacents qui sont L-linéaires. La structure tannakienne se définit facilement ; on peut fabriquer l'objet-unité $(1_{\mathcal{C}_L}, \rho_0)$ de $\mathcal{C}_L$ en prenant $1_{\mathcal{C}_L} = (1_{\mathcal{C}})^d$ où $d = [L : K]$ et pour $\rho_0 : L \to \mathcal{M}_d(K)$, anneau des matrices carrées à d lignes et d colonnes à coefficients dans K, un plongement arbitraire. Le foncteur de *restriction des scalaires*

$$\mathrm{Res} : \mathcal{C}_L \to \mathcal{C}$$

est le foncteur qui envoie (X, ρ) sur X. C'est un foncteur additif exact et fidèle qui a un adjoint à gauche, le foncteur d'*extension des scalaires*

$$\mathrm{Ext} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_L$$

qui envoie W sur $W_L = (1_{\mathcal{C}_L} \otimes X, \rho_0 \otimes \mathrm{id})$.
Si X et Y sont deux objets de $\mathcal{C}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $L \otimes_K \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_L}(X_L, Y_L)$ est un isomorphisme. Lorsque l'extension L/K est galoisienne, le groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$ agit sur $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_L}(X_L, Y_L)$ et $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(X, Y)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_L}(X_L, Y_L)^{\mathrm{Gal}(L/K)}$.

Notons $B^+_{dR}[G_K]$ le B^+_{dR}-module libre de base les $g \in G_K$. On le munit d'une structure d'anneau non commutatif contenant B^+_{dR} en décrétant que la multiplication de deux éléments de G_K est celle qui est donnée par la loi de groupe et que $g.b = g(b).g$, si $b \in B^+_{dR}$ et $g \in G_K$ (ce n'est donc pas l'algèbre de groupe usuelle, l'anneau B^+_{dR} n'est pas contenu dans le centre de $B^+_{dR}[G_K]$). La catégorie des B^+_{dR}-représentations de G_K s'identifie, de manière évidente à une sous-catégorie pleine de la catégorie des $B^+_{dR}[G_K]$-modules à gauche.
Soit L une extension finie de K contenue dans $\overline{K}$. L'anneau $B^+_{dR}[G_L]$ s'identifie à un sous-anneau de $B^+_{dR}[G_K]$. La restriction des scalaires de $B^+_{dR}[G_L]$ à $B^+_{dR}[G_K]$ et l'extension des scalaires dans l'autre sens induisent des foncteurs adjoints à gauche l'un de l'autre

$$R^L_K : \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K) \to \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L) \quad \text{et} \quad I^K_L : \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L) \to \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$$

On remarque que, si $g_1, g_2, \ldots, g_d$ désigne un système de représentants des classes à gauche de G_K suivant G_L, et si X est un $B^+_{dR}[G_L]$-module à gauche, tout élément de $I^K_L X = B^+_{dR}[G_K] \otimes_{B^+_{dR}[G_L]} X$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_{i=1}^d g_i \otimes x_i$ avec les $x_i \in X$.

Soit $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)_L$ la catégorie déduite de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$ par l'extension des scalaires $K \to L$. On dispose de foncteurs

$$\Phi_{L/K} : \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)_L \to \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L) \text{ et } \Psi_{L/K} : \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L) \to \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)_L$$

Si (W, ρ) est un objet de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)_L$, $\Phi_{L/K}(W, \rho)$ est le plus grand sous-B^+_{dR}-module de W sur lequel les deux structures données de L-espace vectoriel coïncident :

$$\Phi_{L/K}(W, \rho) = \{w \in W \mid \rho(\lambda)(w) = \lambda w \text{ pour tout } \lambda \in L\}$$

qui est bien sûr stable par G_L. Si X est un objet de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L)$, alors $\Psi_{L/K}(X) = (I_{L/K}X, \rho)$, avec $\rho(\lambda)(\sum g_i \otimes x_i) = \sum g_i \otimes \lambda x_i$.

Proposition 2.13. — *Le foncteur $\Phi_{L/K} : \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)_L \to \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L)$ induit une $\otimes$-équivalence entre ces deux catégories tannakiennes et $\Psi_{L/K} : \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L) \to \mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)_L$ est un quasi-inverse.*

Preuve : C'est immédiat. □

Remarque : Dans cette correspondance, l'extension des scalaires correspond à la restriction de l'action du groupe de Galois tandis que la restriction des scalaires correspond à l'induction : on a des identifications évidentes de foncteurs

$$\Phi_{L/K} \circ \mathrm{Ext} = R^L_K \text{ et } \mathrm{Res} \circ \Psi_{L/K} = I^K_L$$

Corollaire. — *Soit L une extension finie galoisienne de G_K. Soient W' et W'' deux B^+_{dR}-représentations de G_K. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W'', W')$ s'identifie à $(\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_L]}(W'', W'))^{\mathrm{Gal}(L/K)}$; on a*

$$\dim_K \mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W'', W') = \dim_L \mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_L]}(W'', W').$$

Preuve : Par définition, $\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_L]}(W'', W') = \mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_L]}(R^L_K W'', R^L_K W')$. D'où, avec des notations évidentes,

$$\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_L]}(W'', W') = \mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_L]}(\Phi_{L/K}(\mathrm{Ext}(W'')), \Phi_{L/K}(\mathrm{Ext}(W'))) =$$
$$\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]_L}(\mathrm{Ext}(W''), \mathrm{Ext}(W')) = L \otimes_K \mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W'', W')$$

et la proposition s'en déduit. □

2.5 – Calcul des Ext^n dans la catégorie des B^+_{dR}-représentations

Soit W une B_{dR}-représentation. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, posons $W_{(i,-1)} = 0$, et définissons inductivement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le K-espace vectoriel $W_{(i,n)}$ par

$$W_{(i,n)} = \{w \in W \mid g(x) - \chi^{(i)}(g)(x) \in W_{(i,n-1)} \text{ pour tout } g \in G_K\}$$

Posons aussi $W_{(i)} = \cup_{n\in\mathbb{N}} W_{(i,n)}$. On voit tout de suite que l'application naturelle de $K_\infty \otimes_K W_{(i)}$ dans W est injective et identifie $K_\infty \otimes_K W_{(i)}$ (resp. $K_\infty \otimes_K W_{(i,0)}$) au sous-espace caractéristique (resp. propre) de W^f associé à la valeur-propre i. En particulier $W_{(\mathbb{Z})} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} W_{(i)}$ a une structure naturelle d'objet de la catégorie $\mathcal{C}^f_{\mathbb{Z},K}$ et, avec les notations du §2.2, on a $(W_{\mathbb{Z}})_{(i)} = W_{(i)}$ et $(W_{\mathbb{Z}})_{(i,n)} = W_{(i,n)}$; la B^+_{dR}-représentation $R_{dR}(W_{(\mathbb{Z})}) = B^+_{dR} \otimes_{K[[\underline{t}]]} W_{(\mathbb{Z})}$ s'identifie à la plus grande sous-représentation de W qui est dans l'image essentielle de la restriction à $\mathcal{C}^f_{\mathbb{Z},K}$ du foncteur R_{dR} ; c'est un facteur direct de W.

Remarque : On peut trouver plus naturel de considérer les sous-K-espaces vectoriels $W_{i,n}$ pour $i \in \mathbb{Z}$ et $n \geq -1$ définis inductivement par $W_{i,-1} = 0$ et $W_{i,n} = \{w \in W \mid g(x) - \chi^i(g)(x) \in W_{i,n-1} \text{ pour tout } g \in G_K\}$. Si π_t, est comme au §2.1, de sorte que $t = \pi_t \underline{t}$, on voit que $W_{i,n} = \pi_t^i . W_{(i,n)}$ et $W_i = \pi_t^i W_{(i)}$; en particulier, $\dim_K W_{i,n} = \dim_K W_{(i,n)}$ et $\dim_K W_i = \dim_K W_{(i)}$. Si $W_{\mathbb{Z}} = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} W_i$, $W_{\mathbb{Z}}$ est un sous-$K[[t]]$-module de B^+_{dR} stable par G_K et l'application naturelle $B^+_{dR} \otimes_{K[[t]]} W_{\mathbb{Z}} \to W$ est injective et a même image que $B^+_{dR} \otimes_{K[[\underline{t}]]} W_{(\mathbb{Z})}$. On observe que W_i n'est fixe par $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ que si et seulement si $W_i = W_{(i)}$, ce qui équivaut à $\pi_t^i \in K$.

Si W_1 et W_2 sont des B^+_{dR}-représentations, on note $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K],0}(W_1, W_2)$ le sous-groupe de $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1, W_2)$ qui classifie les extensions qui sont scindées en tant qu'extensions de B^+_{dR}-modules.

THÉORÈME 2.14. — *A) Soient W_1 et W_2 deux B^+_{dR}-représentations. Les K-espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1, W_2)$ sont de dimension finie, nuls pour $i \geq 3$ et*

$$\sum_{i=0}^{2} (-1)^i \dim_K \mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1, W_2) = 0 \ .$$

B) Soit γ_0 un générateur topologique de $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(\mathrm{K}_\infty/\mathrm{K})$ et soit W une B^+_{dR}-représentation.
i) Les $\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(C, W)$ s'identifient, canoniquement et fonctoriellement, aux groupes de cohomologie du complexe

$$W_{(0)} \to W_{(1)} \oplus W_{(0)} \to W_{(1)} \to 0 \to 0 \ldots$$

avec $d^0(x) = (\underline{t}x, (\gamma_0 - 1)(x))$ et $d^1(y, z) = \underline{t}z - (\chi^{(-1)}(\gamma_0)\gamma_0 - 1)(y)$;
ii) on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(C, W) \to W_{(0),\underline{t}=0} \xrightarrow{\gamma_0 - 1} W_{(0),\underline{t}=0} \to \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K],0}(C, W) \to 0$$

En particulier, $\mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(C, W)$ et $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K],0}(C, W)$ sont des K-espaces vectoriels de même dimension finie égale à celle du noyau de la multiplication par $\underline{t}$ sur $W_{(0,0)}$;

iii) on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(B^+_{dR}, W) \to W_{(0)} \xrightarrow{\gamma_0 - 1} W_{(0)} \to \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(B^+_{dR}, W) \to 0$$

En particulier $\mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(B^+_{dR}, W) = W_{(0,0)}$ *et* $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(B^+_{dR}, W)$ *est un* K*-espace vectoriel de dimension finie égale à celle de* $W_{(0,0)}$ *;*
iv) le K*-espace vectoriel* $\mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(W, B_{dR}/B^+_{dR})$ *s'identifie au dual du plus grand quotient de* $W_{(-1)}$ *sur lequel l'action de* ∇_0 *est semi-simple ; il est de dimenson finie égale à celle de* $W_{(-1,0)}$.

Preuve : On peut (cor. à la prop.2.13) remplacer K par une extension finie galoisienne, ce qui nous permet de supposer que les B^+_{dR}-représentations qui interviennent sont petites. Comme la catégorie des petites représentations est une sous-catégorie épaisse de celle de toutes les B^+_{dR}-représentations, on peut calculer les Ext^i dans la catégorie des petites représentations et utiliser l'équivalence entre cette catégorie et $\mathcal{C}^f_{\mathfrak{a}_K,K}$ (prop.2.10).
Montrons (B i). Si $W = R_{dR}(X)$, d'après la proposition 2.5, les $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}_{S,E}}(C, W)$ sont les groupes de cohomologie du complexe

$$(C_{X,0}) \qquad X_{(0)} \to X_{(1)} \oplus X_{(0)} \to X_{(1)} \to 0 \to 0 \to 0 \ldots$$

les différentielles étant $x \mapsto (\underline{t}x, \nabla_0(x))$ et $(y,z) \mapsto \underline{t}z - (\nabla_0 - 1)(y))$ que l'on peut réécrire $x \mapsto (\underline{t}x, Nx)$ et $(y,z) \mapsto \underline{t}z - Ny$, si l'on pose $N = \nabla_0$ sur $W_{(0)}$ et $N = \nabla_0 - 1$ sur $W_{(-1)}$. On remarque que N est nilpotent sur chacun de ces deux K-espaces vectoriels. On remarque aussi que $W_{(0)} = X_{(0)}$ et $W_{(1)} = X_{(1)}$.
Choisissons un relèvement $g_0 \in G_K$ de γ_0 et posons $c = \log \chi(g_0)$. C'est un élément non nul de l'idéal de $\mathbb{Z}_p$ engendré par $2p$ qui ne dépend pas du choix du relèvement. Sur $W_{(0)}$ comme sur $W_{(1)}$, on a $\exp(cN) = Nu$, où $u = c + \frac{c^2}{2!}N + \frac{c^3}{3!}N^2 + \ldots + \frac{c^n}{n!}N^{n-1} + \ldots$ est un automorphisme qui commute à N. On a aussi $(\underline{t}N)(x) = (N\underline{t})(x)$ pour tout $x \in W_{(0)}$.
Sur $W_{(0)}$, on a $(\gamma_0 - 1)(x) = \exp(cN)(x) - x = Nu(x)$; sur $W_{(1)}$, on a $(\chi^{(-1)}(\gamma_0)\gamma_0 - 1)(y) = (\exp(-c)\exp(c(\mathrm{id} + N)(y) - y = Nu(y)$. On a alors un diagramme commutatif de complexes

$$\begin{array}{ccccccccc} X_{(0)} & \to & X_{(1)} \oplus X_{(0)} & \to & X_{(1)} & \to & 0 & \to & 0 & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ W_{(0)} & \to & W_{(1)} \oplus W_{(0)} & \to & W_{(1)} & \to & 0 & \to & 0 & \ldots \end{array}$$

où les flèches verticales sont successivement $a \mapsto a$, $(b,c) \mapsto (b, u(c))$ et $d \mapsto u(d)$. Comme ce sont des isomorphismes, ces deux complexes sont isomorphes. D'où (B i).
De la même manière, les assertions (B ii), (B iii) et (B iv) sont la traduction dans le langage des B^+_{dR}-représentations des propositions 2.6, 2.7 et 2.8.
Comme C est l'objet-unité de la catégorie tannakienne $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$, le K-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1, W_2)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(C, Hom(W_1, W_2))$

(attention c'est le hom interne pour la structure tannakienne déduite par transport de structure de celle de $\mathcal{C}^f_{\mathfrak{a}_K,K}$) et l'assertion (A) résulte de (B i). □

Rappelons que $B_m = B^+_{dR}/t^m B^+_{dR} = B^+_{dR}/\underline{t}^m B^+_{dR}$. On a $B_0 = 0$, $B_1 = C$ et pour tout m une suite exacte

$$0 \to B_m(1) \to B_{m+1} \to C \to 0$$

En particulier B_2 est une extension de C par $C(1)$. On remarque que la B^+_{dR}-représentation B_m est indécomposable (c'est déjà un B^+_{dR}-module indécomposable), que $(B_m)^f = K_\infty[[\underline{t}]]/\underline{t}^m$ et que les valeurs propres de ∇_0 sont les entiers i vérifiant $0 \leq i \leq m-1$, $(B_m)_{(i,0)} = (B_m)_{(i)}$ étant le K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'image de $\underline{t}^i$.
Notons $\mathbb{Z}_p[\log t]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ en une indéterminée $\log t$. On munit cet anneau d'une action de G_K compatible avec sa structure de $\mathbb{Z}_p$-algèbre en posant $g(\log t) = \log(\chi(g)) + \log t$. Cette action se factorise à travers $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$. Remarquons que cet anneau peut être défini intrinsèquement : si $t' = at$, avec a une unité p-adique, on identifie $\mathbb{Z}_p[\log t]$ à $\mathbb{Z}_p[\log t']$ en posant $\log t' = \log a + \log t$. Remarquons aussi que si l'on prolonge le logarithme à $\overline{K}^*$ en convenant que $\log p = 0$, on peut identifier $\log t$ à $\log \underline{t}$ (on a $t = \pi_t \underline{t}$ et $\log(\pi_t) = 0$). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note T_m le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de $\mathbb{Z}_p[\log t]$ formé des polynômes de degré $< m$. On pose $C_m = C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_m$. C'est donc une C-représentation de dimension m.
On voit que $(C_m)^f$ s'identifie à $K_\infty \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_m$, que la seule valeur-propre de ∇_0 est 0 (en particulier C_m est une petite représentation) et $(C_m)_{(0)} = K \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_m$, l'opérateur ∇_0 étant la dérivation par rapport à $\log t$. En particulier C_m est indécomposable.
Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a une suite exacte

$$0 \to C_m \to C_{m+1} \to C \to 0$$

la projection de C_{m+1} sur C étant l'application $\sum_{i=0}^m c_i(\log t)^i \mapsto c_m$.

PROPOSITION 2.15. — *Soit W un objet simple de la catégorie des B^+_{dR}-représentations.*
A – On a $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,W) = \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,W) = 0$ sauf si l'on est dans l'un des deux cas suivants (qui s'excluent mutuellement) :
i) $W \simeq C$; alors $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,C) = \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1, avec pour base la classe de $C_2 = C \oplus C \log t$.
ii) $W \simeq C(1)$; alors $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,C(1)) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ est un K-espace vectoriel de dimension 1, avec pour base la classe de B_2.
B – On a $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,W) = 0$ sauf si $W \simeq C(1)$; alors $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 admettant comme base la classe c_{fond} de la 2-extension

$$0 \to C(1) \to B_2 \xrightarrow{d} C_2 \to C \to 0$$

(où d est le composé de la projection canonique de B_2 sur C avec l'inclusion de C dans C_2). La classe de

$$0 \to C(1) \to C_2(1) \xrightarrow{d'} B_2 \to C \to 0$$

(où d' est le composé de la projection canonique de $C_2(1)$ sur $C(1)$ avec l'inclusion de $C(1)$ dans B_2) est $-c_{\mathrm{fond}}$.

Preuve : On a $W_{(0)} = 0$ sauf si $W \simeq C$ et $W_{(1)} = 0$ sauf si $W \simeq C(1)$. L'assertion (B) du théorème précédent implique donc que $\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(C,W) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ si W n'est ni isomorphe à C, ni isomorphe à $C(1)$. Comme $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,W) \subset \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,W)$, on a aussi $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,W) = 0$.
Si $W = C$, les $\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C)$, sont les groupes de cohomologie du complexe

$$K \xrightarrow{0} K \to 0 \to 0 \to \dots$$

Par conséquent, $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C) = 0$ et $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1. Comme l'extension

$$0 \to C \to C_2 \to C \to 0$$

est non scindée, la classe de C_2 engendre ce K-espace vectoriel. Comme C_2 est une C-représentation, cette classe appartient à $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,C)$ et $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,C) = \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C)$.
Si $W = C(1)$, l'assertion (B) du théorème 2.14 implique la nullité de $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,C(1))$, tandis que les $\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$, sont les groupes de cohomologie du complexe

$$0 \to K.\underline{t} \xrightarrow{0} K.\underline{t} \to 0 \to 0 \to \dots$$

Les K-espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ et $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ sont donc tous deux de dimension 1. Comme l'extension

$$0 \to C(1) \to B_2 \to C \to 0$$

est non scindée, sa classe engendre $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$.
Mais cette suite exacte induit la suite exacte

$$\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,B_2) \to \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C) \to \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$$

Or $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,B_2)$, premier groupe de cohomologie du complexe

$$K \to K\underline{t} \oplus K \to K\underline{t} \to 0 \to 0 \to \dots$$

avec $d^0(x) = (x\underline{t}, 0)$ et $d^1(y,z) = z\underline{t}$, est nul. L'application

$$\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C, C) \to \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C, C(1))$$

est donc injective. La classe de C_2 dans $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C)$ étant non nulle, elle s'envoie sur un élément non nul de $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C, C(1))$. C'est précisément c_{fond}.
Notons $\theta : B_2 \to C$ la projection canonique. Posons $B_{2,2} = B_2 \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_2$, de sorte que tout élément de $B_{2,2}$ s'écrit de manière unique sous la forme $b_0 + b_1 \log t$ avec $b_0, b_1 \in B_2$ et que $C_2(1)$ s'identifie à la sous-B^+_{dR}-représentation de $B_{2,2}$ formée des éléments qui peuvent s'écrire sous la forme $c_0 t + c_1 t \log t$, avec $c_0, c_1 \in C$. On définit des applications

$$\begin{array}{ccc}
\alpha : B_2 \oplus C_2(1) \to B_2 & \text{par} & \alpha(b, c_0 t + c_1 t \log t) = b + c_1 t \\
\alpha' : B_2 \oplus C_2(1) \to C_2(1) & \text{par} & \alpha'(b, c_0 t + c_1 t \log t) = c_0 t + c_1 t \log t \\
\beta : B_{2,2} \to C_2 & \text{par} & \beta(b_0 + b_1 \log t) = \theta(b_0) + \theta(b_1) \log\ t \\
\beta' : B_{2,2} \to B_2 & \text{par} & \beta'(b_0 + b_1 \log t) = b_1 \\
d^{-1} : C(1) \to B_2 \oplus C_2(1) & \text{par} & d^{-1}(ct) = (ct, -ct) \\
d^0 : B_2 \oplus C_2(1) \to B_{2,2} & \text{par} & d^0(b, c_0 t + c_1 t \log t) = b + c_0 t + c_1 \log t \\
d^1 : B_{2,2} \to C & \text{par} & d^1(b_0 + b_1 \log t) = \theta(b_1)
\end{array}$$

On vérifie que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C(1) & \to & B_2 & \to & C_2 & \to & C & \to & 0 \\
 & & \| & & \uparrow \alpha & & \uparrow \beta & & \| & & \\
0 & \to & C(1) & \xrightarrow{d^{-1}} & B_2 \oplus C_2(1) & \xrightarrow{d^0} & B_{2,2} & \xrightarrow{d^1} & C & \to & 0 \\
 & & \downarrow -\mathrm{id} & & \downarrow \alpha' & & \downarrow \beta' & & \| & & \\
0 & \to & C(1) & \to & C_2(1) & \to & B_2 & \to & C & \to & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes, est commutatif. La dernière assertion de la proposition en résulte. $\square$

Pour toute B^+_{dR}-représentation W, on a

$$\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(W, W(1)) = \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C, Hom(W, W(1))$$

(où $Hom(W, W(1))$ est le hom interne dans la catégorie tannakienne des B^+_{dR}-représentations). La flèche naturelle $Hom(W, W(1)) \to C(1)$ nous donne donc une application de $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(W, W(1))$ dans $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C, C(1)) = K.c_{\mathrm{fond}}$. Pour tout $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(W, W(1))$, on note $c_{K,W}(\varepsilon).c_{\mathrm{fond}}$ son image. On a ainsi défini une application K-linéaire $c_{K,W} : \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(W, W(1)) \to K$.

Proposition 2.13. — *Soient W_1 et W_2 des B^+_{dR}-représentations. Pour $n = 0,1,2$ l'application bilinéaire*

$$\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1,W_2)\times\mathrm{Ext}^{2-n}_{B^+_{dR}[G_K]}(W_2,W_1(1)) \to \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1,W_1(1)) \to K$$

est une dualité parfaite de K-espaces vectoriels.

Preuve : Quitte à remplacer W_2 par $Hom(W_1,W_2)$ (au sens tannakien), on peut supposer $W_1 = C$. On est donc ramené à prouver que pour $n = 0,1,2$ et pour toute C-représentation W, l'accouplement

$$\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(C,W) \times \mathrm{Ext}^{2-n}_{B^+_{dR}[G_K]}(W,C(1)) \to \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$$

est non dégénéré. Par dévissage, on se ramène au cas où W est simple.
– Si W n'est isomorphe ni à C ni à $C(1)$, les $\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(C,W)$ sont nuls ainsi que les $\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(W,C(1)) = \mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(C,W^*(1))$ et il n'y a rien à prouver.
– Supposons $W = C$. Pour $n = 0$, on a $\mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C) = K$, $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1)) = K.c_{\mathrm{fond}}$ et c'est évident. Pour $n = 1$, $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C)$ est le K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe c_2 de C_2, tandis que $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ est le K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe b_2 de B_2 et cela résulte de ce que, d'après la partie (B) de la proposition précédente, le générateur c_{fond} de $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ est le cup-produit de c_2 avec b_2. Pour $n = 2$, on a $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C) = \mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1)) = 0$ et c'est évident.
– Supposons alors $W = C(1)$. Pour $n = 0$, on a $\mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1)) = \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C(1),C(1)) = \mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C) = 0$ et c'est évident. Pour $n = 1$, $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ est le K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe b_2 de B_2, tandis que $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C(1),C(1)) \simeq \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C)$ est le K-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe c'_2 de $C_2(1)$ et cela résulte de ce que, d'après la partie (B) de la proposition précédente, le générateur $-c_{\mathrm{fond}}$ de $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1))$ est le cup-produit de b_2 avec c'_2. Pour $n = 2$ enfin, $\mathrm{Ext}^2_{B^+_{dR}[G_K]}(C,C(1)) = K.c_{\mathrm{fond}}$, tandis que $\mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(C(1),C(1)) = K.\mathrm{id}_{C(1)}$ et c'est évident. □

La proposition 2.15 implique aussi le résultat suivant, également très facile à vérifier directement :

Proposition 2.17. — *A) Soient W_1 et W_2 deux C-représentations. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le K-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^i_{C[G_K]}(W_1,W_2)$ s'identifie, canoniquement et fonctoriellement, à $\mathrm{Ext}^i_{C[G_K]}(C,W_1^* \otimes_C W_2)$.*

B) Pour toute C-représentation W, on a $\mathrm{Ext}^i_{C[G_K]}(C,W) = 0$ si $i \geq 2$, tandis que $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C,W)$ et $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,W)$ sont des K-espaces vectoriels de même dimension finie. On dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C,W) \to W_{(0)} \to W_{(0)} \to \mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,W) \to 0$$

3 – Quelques calculs d'homomorphismes et d'extensions

Comme au paragraphe précédent, K_∞ est la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de K, $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)$ et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

3.1 – Cohomologie continue

Si G est un groupe topologique et si M est un groupe topologique abélien muni d'une action linéaire et continue de G, on sait définir les groupes de *cohomologie continue* $H^m_{\mathrm{cont}}(G,M)$ (cf. [Ta76]). Lorsque $G = \mathrm{Gal}(E^s/E)$ où E^s est la clôture séparable d'un corps E, on écrit aussi $H^m_{\mathrm{cont}}(E,M) = H^m_{\mathrm{cont}}(G,M)$.
Si S est un banach muni d'une action linéaire et continue de G et si $\mathcal{S}$ est un réseau de S stable par G, on a $H^m_{\mathrm{cont}}(G,S) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} H^m_{\mathrm{cont}}(G,\mathcal{S})$.
Si V est une représentation p-adique, les $H^n_{\mathrm{cont}}(K,V)$ sont des K-espaces vectoriels de dimension finie, nuls pour $n \notin \{0,1,2\}$ et

$$\sum_{n=0}^{2}(-1)^n \dim_K H^n_{\mathrm{cont}}(K,V) = -[K:\mathbb{Q}_p].\dim_{\mathbb{Q}_p} V$$

En outre, on a un isomorphisme canonique de $H^2_{\mathrm{cont}}(K,\mathbb{Q}_p(1))$ sur $\mathbb{Q}_p$ et le cup-produit induit, pour $n = 0,1,2$, une dualité parfaite

$$H^n_{\mathrm{cont}}(K,V) \times H^{2-n}_{\mathrm{cont}}(K,V^*(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

(ces résultats bien connus se voient par passage à la limite à partir des résultats analogues pour la cohomologie des G_K-modules finis de p-torsion, cf [Se94], chap.II, th.2 et 5).
Par ailleurs, $H^n_{\mathrm{cont}}(K,V)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p,V)$ (ce sont des δ-foncteurs effaçables qui coïncident en degré 0). Si V_1 et V_2 sont deux représentations p-adiques, $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_1,V_2)$ s'identifie donc à $H^n_{\mathrm{cont}}(K,V_1^*\otimes V_2)$.

Rappelons (§2.5) que, pour toute B^+_{dR}-représentation W, on a posé $W_{(0,0)} = W^{G_K}$.

PROPOSITION 3.1. — *Soit W une B_{dR}^+-représentation. Alors $H^0(K,W)$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(K,W)$ sont des K-espaces vectoriels de même dimension finie. On a $H^0(K,W) = W_{(0,0)} = \mathrm{Hom}_{B_{dR}^+[G_K]}(B_{dR}^+,W)$ tandis que $H^1_{\mathrm{cont}}(K,W)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{B_{dR}^+[G_K]}(B_{dR}^+,W)$.*
Si W est une C-représentation, $H^0(K,W)$ s'identifie aussi à $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C,W)$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(K,W)$ à $\mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C,W)$.

Preuve : L'application qui à $\eta \in \mathrm{Hom}_{B_{dR}^+[G_K]}(B_{dR}^+,W)$ associe $\eta(1)$ identifie ce K-espace vectoriel à $W^{G_K} = H^0(K,W) = W_{(0,0)}$.
Soit maintenant E un B_{dR}^+-module de type fini, muni d'une action linéaire et continue de G_K, extension de B_{dR}^+ par W. L'extension est scindée en tant qu'extension de B_{dR}^+-modules et si $\hat{1}$ est un relèvement de 1 dans E, l'application $\varepsilon : G_K \to W$ qui à g associe $g(\hat{1}) - \hat{1}$ est un 1-cocycle continu de G_K à valeurs dans W. Si l'on change le relèvement, on change ε par un cobord et la classe de ε dans $H^1_{\mathrm{cont}}(K,W)$ ainsi définie ne dépend que de la classe de E dans $\mathrm{Ext}^1_{B_{dR}^+[G_K]}(B_{dR}^+,W)$. On vérifie que l'application de $\mathrm{Ext}^1_{B_{dR}^+[G_K]}(B_{dR}^+,W)$ dans $H^1_{\mathrm{cont}}(K,V)$ ainsi définie est bien un isomorphisme.
Le cas où W est une C-représentation se traite de la même manière. □

Rappelons le résultat fondamental de Tate :

PROPOSITION 3.2 ([Ta67], prop.9, cf.aussi [Fo00], th.1.8). — *Soient M une extension finie de K_∞, $\mathcal{O}_M$ l'anneau de ses entiers et $tr_{M/K_\infty} : M \to K_\infty$ la trace. Alors l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{K_\infty}$ de l'anneau des entiers de K_∞ est contenu dans $tr_{M/K_\infty}(\mathcal{O}_M)$.* □

Appelons *presque B_{dR}^+-représentation* toute représentation banachique qui est presqu'isomorphe à une B_{dR}^+-représentation.

PROPOSITION 3.3. — *Soit $\mathcal{S}$ un $\mathbb{Z}_p$-module séparé et complet pour la topologie p-adique muni d'une action linéaire et continue de G_K.*
i) Si n est un entier ≥ 3, on a $H^n_{cont}(K,\mathcal{S}) = 0$;
ii) Si $n \in \{0,1,2\}$ et si $\mathcal{S}$ est un réseau stable par G_K d'une presque B_{dR}^+-représentation S, il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que p^s annule $H^n_{cont}(K,\mathcal{S})_{\mathrm{tor}}$ et $H^n_{cont}(K,\mathcal{S})/H^n_{cont}(K,\mathcal{S})_{\mathrm{tor}}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini ;
iii) Pour $n = 2$, ce rang est nul si S est une B_{dR}^+-représentation.

Preuve : Comme la p-dimension cohomologique de G_K est 2 ([Se94], chap.II, §5), si $n \leq 3$, on a $H^n_{cont}(K,\mathcal{S}/p\mathcal{S}) = H^n(K,\mathcal{S}/p\mathcal{S}) = 0$. Ceci nous permet, si $f : G_K^n \to \mathcal{S}$ est un n-cocycle continu de G_K à valeurs dans $\mathcal{S}$, de construire, de proche en proche, une suite $(u_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de $(n-1)$-cochaines continues telle que $f = d(\sum_{r\in\mathbb{N}} p^r u_r)$, d'où (i).
Soient $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ deux réseaux de S. Le fait qu'ils sont commensurables implique que (ii) est vraie pour $\mathcal{S}'$ si et seulement si elle est vraie pour $\mathcal{S}''$. Par ailleurs, soit

$$0 \to S_1 \to S_2 \to S_3 \to 0$$

une suite exacte courte de presque-B_{dR}^+-représentations et soit $\mathcal{S}_2$ un réseau stable par G_K de S_2. L'image $\mathcal{S}_3$ de $\mathcal{S}_2$ dans S_3 et $\mathcal{S}_1 = S_1 \cap \mathcal{S}_2$ sont des réseaux stables par G_K respectivement de S_3 et de S_1 ; la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_3 \to 0$$

induit une suite exacte longue de cohomologie, d'où l'on déduit que, si la propriété (ii) est vraie pour deux des trois réseaux $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$, elle est vraie pour le troisième. Comme S est une presque B_{dR}^+-représentation, on peut trouver un isomorphisme $S/V \simeq W/V'$, avec W une B_{dR}^+-représentation et V et V' des $\mathbb{Q}_p$-représentations. On peut donc, pour prouver (ii), supposer que $S = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{S}$ est soit une $\mathbb{Q}_p$-représentation, soit une B_{dR}^+-représentation.
Dans le premier cas, comme $\mathcal{S}$ est un $\mathbb{Z}_p$-module de type fini, les $H^n_{\mathrm{cont}}(K, \mathcal{S})$ sont de type fini : cela résulte formellement (cf. par exemple, [NSW00], cor.2.3.9) du fait que, si M est un $\mathbb{Z}_p$-module fini avec action linéaire discrète de G_K, les groupes $H^n(K, M)$ sont finis (cf. par exemple [Se94], chap. II,prop.14). Ils vérifient donc (ii).
Dans le second cas, par dévissage, on se ramène au cas où S *est une C-représentation, ce que nous supposons désormais.* On peut, pour prouver l'assertion, remplacer K par une extension finie galoisienne convenable, ce qui nous permet de supposer que S est K-petite (cf. §2.3). Toujours par dévissage, on peut en outre supposer qu'elle est simple.
La fin de la preuve repose sur les techniques "presque-étales" classiques de Tate [Ta67] et Sen [Se80] :

Lemme 3.4. — *Soient $\pi \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$ un élément non nul et $f : H_K \to \mathcal{O}_C$ un 1-cocycle continu. Il existe $b \in \mathcal{O}_C$ tel que le 1-cocycle continu $\pi f - db$ est à valeurs dans $\pi^2\mathcal{O}_C$.*

Preuve : Comme f est continu, il existe un sous-groupe ouvert invariant H'_K de H_K tel que $f'(H_K) \subset \pi^2\mathcal{O}_C$. La condition de cocycle implique que, si $g \in H_K$ et $h \in H'_K$, alors $f(gh) \equiv f(g) \pmod{\pi^2\mathcal{O}_C}$.
Soit $M = \overline{K}^{H'_K}$; c'est une extension finie galoisienne de K_∞ de groupe de Galois $J = H_K/H'_K$. D'après la proposition 3.2, on peut trouver c dans l'anneau des entiers de M tel que $tr_{M/K_\infty}(c) = \pi$. Soit T un système de représentants de J dans H_K. Posons

$$b = -\sum_{g \in T} f(g)g(c) \in \mathcal{O}_C \ .$$

Pour tout $h \in H_K$, on a

$$h(b) = -\sum_{g \in T} h(f(g))hg(c) = -\sum_{g \in T} f(hg).hg(c) + f(h)(\sum_{g \in T} g(c)) \ .$$

Pour tout $g \in H_K$, notons $t(g)$ le représentant, dans T, de son image dans J. Comme $f(g) \bmod \pi^2\mathcal{O}_C$ ne dépend que de l'image de g dans J, on a $\sum_{g\in T} f(hg)hg(c) \equiv \sum_{g \in T} f(t(hg)).t(hg) \equiv b \pmod{\pi^2\mathcal{O}_C}$. Par conséquent, pour tout $h \in H_K$, on a $h(b) - b \equiv \pi f(h) \pmod{\pi^2\mathcal{O}_C}$. □

LEMME 3.5. — *Pour tout* $\pi \in \mathfrak{m}_{K_\infty}$*, on a* $\pi.H^1_{cont}(K_\infty, \mathcal{O}_C) = 0$.

Preuve : On peut supposer π non nul. Le lemme précédent permet de construire une suite d'éléments $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{O}_C$ et une suite de 1-cocycles continus de H_K à valeurs dans $\mathcal{O}_C$ tels que $f_0 = f$ et $\pi^2 f_n = \pi f_{n-1} - db_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Si $b = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi^n b_n$, on a $db = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi^n db_n = \pi f$. □

Terminons alors la preuve de la proposition 3.3 : D'après la proposition 2.1, le C-espace vectoriel S admet une base formée d'éléments fixés par H_K, i.e. est isomorphe, en tant que C-représentation de H_K à C^d. Il existe donc un réseau $\mathcal{S}_0$ de S, stable par H_K qui est isomorphe à $\mathcal{O}_C^d$. D'après le lemme précédent $H^1_{cont}(K_\infty, \mathcal{S}_0)$ est tué par p et comme $\mathcal{S}$ est commensurable à $\mathcal{S}_0$, il existe un entier s_1 tel que p^{s_1} annule $H^1_{cont}(K_\infty, \mathcal{S})$.
Mais le fait que Γ_K et H_K sont de p-dimension cohomologique 1 implique que l'on a une suite exacte

$$0 \to H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma_K, \mathcal{S}^{H_K}) \to H^1_{\mathrm{cont}}(K, \mathcal{S}) \to H^1_{\mathrm{cont}}(K_\infty, \mathcal{S})^{G_K} \to 0$$

et que $H^2_{\mathrm{cont}}(K, \mathcal{S}) = H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma_K, H^1_{\mathrm{cont}}(K_\infty, \mathcal{S}))$. Il suffit donc pour achever la démonstration d'établir le résultat suivant :

LEMME 3.6. — *Soit* S *une* C*-représentation et soit* $\mathcal{T}$ *un réseau stable par* Γ_K *de* $T = S^{H_K}$*. Il existe un entier* s_0 *tel que* p^{s_0} *annule* $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma_K, \mathcal{T})_{\mathrm{tor}}$ *et les* $\mathbb{Z}_p$*-modules* $\mathcal{T}^{\mathcal{G}_\mathcal{K}}$ *et* $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma_K, \mathcal{T})/\mathcal{H}^\infty_{\mathrm{cont}}(-_\mathcal{K}, \mathcal{T})_{\mathrm{tor}}$ *sont de type fini.*

Preuve : Si γ est un générateur topologique de Γ_K, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{T}^{-_\mathcal{K}} \to \mathcal{T} \xrightarrow{\gamma - 1} \mathcal{T} \to \mathcal{H}^\infty_{\mathrm{cont}}(-_\mathcal{K}, \mathcal{T}) \to 0$$

Comme on a supposé S simple et K-petite, il existe (prop.2.12) un élément K-petit $\alpha \in K$ tel que $S = C\{\alpha\}$. Si L est le complété de K_∞ et si $u = \exp(\alpha \log \chi(\gamma))$, T s'identifie alors à L, γ agissant sur L par $c \mapsto u.\gamma(c)$.
Si $\alpha = 0$, $T = L$ avec son action naturelle. Soit $tr : K_\infty \to K$ l'application qui envoie $x \in K_N$ sur $\frac{1}{p^N} tr_{K_N/K}(x)$ (où K_N désigne l'unique extension de K de degré p^N contenue dans K_∞). Alors ([Ta67],prop.6) cette application est continue et se prolonge par continuité en une application encore notée tr de L dans K. Si $L_0 = \mathrm{Ker}\ tr$, on a $L = K \oplus L_0$. Quitte à changer de réseau, on peut supposer que $\mathcal{T} = \mathcal{O}_\mathcal{K} \oplus \mathcal{T}_0$ où $\mathcal{T}_0$ est un réseau de L_0. Sur $\mathcal{O}_K$, l'opérateur $\gamma - 1$ est nul et on a donc $\mathcal{O}_K^{\Gamma_K} = H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma_K, \mathcal{O}_K) = \mathcal{O}_K$ et c'est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini. Sur L_0, l'opérateur $\gamma - 1$ est bijectif avec un inverse continu (*loc.cit.*, prop.7,b). On en déduit que $\mathcal{T}_0^{-_\mathcal{K}} = 0$ tandis qu'il existe un entier s_0 tel que p^{s_0} annule $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma_K, \mathcal{T}_0)$.
Sinon, l'opérateur $\gamma - u^{-1}$ est bijectif sur L, avec un inverse continu (*loc.cit.*, prop7,c) ; il en est de même de $u.\gamma - 1$ et on en déduit que $\mathcal{T}^{-_\mathcal{K}} = 0$ tandis qu'il existe un entier s_0 tel que p^{s_0} annule $H^1_{\mathrm{cont}}(\Gamma_K, \mathcal{T})$. □

Corollaire. — *Pour toute presque-B_{dR}^+-représentation S, les $H^n_{\mathrm{cont}}(K,S)$ sont des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, nuls si $n \geq 3$. Si S est une B_{dR}^+-représentation, on a aussi $H^2_{\mathrm{cont}}(K,S) = 0$.*

3.2 – Calcul de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(S,V)$ via le corps de classes

Pour tout anneau commutatif A et tout A-module M, on note M^{*_A} le A-module des applications A-linéaires de M dans A.

Proposition 3.7. — *Soient V une représentation p-adique et S une presque B_{dR}^+-représentation. Il existe une dualité parfaite de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(S,V) \times H^1_{\mathrm{cont}}(K, S \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{*_{\mathbb{Q}_p}}(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

canonique et fonctorielle en S et V.

En fait, on va utiliser la théorie du corps de classes local (plus précisément la dualité de Tate) pour construire une telle dualité.

Lemme 3.8. — *Il existe une suite croissante*

$$\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1} \subset \ldots$$

de sous-$\mathbb{Z}_p$-modules de type fini de S, stables par G_K, telle que la réunion $\mathcal{S}_\infty$ des $\mathcal{S}_n$ est séparée pour la topologie p-adique et que l'inclusion de $\mathcal{S}_\infty$ dans S induise un homéomorphisme de $\widehat{\mathcal{S}}_\infty = \varprojlim \mathcal{S}_\infty/p^m\mathcal{S}_\infty$ sur un réseau $\mathcal{S}$ de S.

Preuve : Par dévissage on se ramène au cas où S est soit une représentation p-adique (auquel cas, c'est trivial, il suffit de choisir un réseau $\mathcal{S}$ stable par G_K et de prendre $\mathcal{S}_n = \mathcal{S}$ pour tout n), soit une C-représentation. Dans ce dernier cas, il existe une extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que S est petite en tant que B_{dR}^+-représentation de G_L. Avec les notations du §2.3, S_L^f est un sous-L-espace vectoriel stable par G_L de S tel que l'application naturelle $C \otimes_L S_L^f \to S$ (cf. lemme 2.11) est un isomorphisme.
Pour toute extension finie E de K, notons $\mathcal{O}_E$ l'anneau de ses entiers. On peut trouver un sous-$\mathcal{O}_L$-module $\mathcal{S}_L^f$ de S_L^f qui est un réseau de S_L^f et est stable par G_K. Il suffit alors de choisir une suite $L = L_1 \subset L_2 \subset \ldots L_n \subset L_{n+1} \subset \ldots$ d'extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\overline{K}$ telles que $\overline{K} = \cup_{n\geq 1} L_n$ et de prendre pour $\mathcal{S}_n$ le sous-$\mathcal{O}_{L_n}$-module de S engendré par $\mathcal{S}_L^f$. □

Lemme 3.9. — *Choisissons unréseau $\mathcal{V}$ de V stable par G_K et des $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}$ comme dans le lemme précédent. La flèche naturelle*

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_\infty, \mathcal{V}) \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_n, \mathcal{V})$$

est un isomorphisme.

Preuve : Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \varprojlim \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_n,\mathcal{V})$. Pour chaque n, choisissons une extension $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{S}_n$ par $\mathcal{V}$ représentant ε_n. Comme l'image de ε_{n+1} dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_n,\mathcal{V})$ est ε_n, on peut trouver une application $\mathbb{Z}_p$-linéaire continue G_K-équivariante $f_n : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_{n+1}$ qui induit l'identité sur $\mathcal{V}$ et l'inclusion naturelle $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S}_{n+1}$ sur les quotients. Alors la limite inductive des $\mathcal{E}_n$, avec les f_n comme applications de transition, est une extension de $\mathcal{S}_\infty$ par $\mathcal{V}$ dont la classe dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_\infty\mathcal{V})$ a pour image $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qui prouve la surjectivité.
Soit maintenant $\mathcal{E}$ une extension de $\mathcal{S}_\infty$ par $\mathcal{V}$ dont la classe est dans le noyau de la flèche qui nous intéresse. Cela veut dire, que si $\mathcal{E}_n$, désigne l'image inverse de $\mathcal{S}_n$ dans $\mathcal{E}$, l'ensemble X_n des sections continues G_K-équivariantes de la projection de $\mathcal{E}_n$ sur $\mathcal{S}_n$ est non vide. Mais, si $x \in X_n$, les autres éléments sont de la forme $x+\eta$, avec η un élément du $\mathbb{Z}_p$-module de type fini $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G_K]}(\mathcal{S}_n,\mathcal{V})$. Autrement dit X_n est un espace homogène principal sous ce groupe compact et devient ainsi un espace topologique compact non vide. L'application naturelle $X_{n+1} \to X_n$ est continue et la limite projective des X_n est donc non vide. Mais un élément de cette limite définit une section $\mathbb{Z}_p$-linéaire continue de la projection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{S}_\infty$, on a donc $\varepsilon = 0$ et l'application est bien injective. □

Preuve de la proposition 3.7 : Choisissons $\mathcal{V}$, $\mathcal{S}$ et des $\mathcal{S}_n$ comme cidessus. Avec des notations évidentes, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(S,V)$ s'identifie à $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S},\mathcal{V})$. Comme $\mathcal{S}$ s'identifie au séparé complété pour la topologie p-adique de $\mathcal{S}_\infty$, la flèche naturelle
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S},\mathcal{V}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_\infty,\mathcal{V})$$
est un isomorphisme. D'après le lemme précédent, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S},\mathcal{V})$ s'identifie donc à $\varprojlim \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_n,\mathcal{V})$. Pour tout $\mathbb{Z}_p$-module $\mathcal{M}$, notons $\mathcal{M}\check{}$ le $\mathbb{Z}_p$-module des applications $\mathbb{Z}_p$-linéaires de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{V}$ sont des $\mathbb{Z}_p$-modules libres de rang fini et
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_n,\mathcal{V}) &= \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathbb{Z}_p,(\mathcal{S}_n)^{*_{\mathbb{Z}_p}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V})\\ &= H^1_{\mathrm{cont}}(K,(\mathcal{S}_n)^{*_{\mathbb{Z}_p}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V})\end{aligned}$$
Par la dualité de Tate (cf. par exemple, [Se94], chap. II, th.2), ce dernier groupe s'identifie à $H^1(K,((\mathcal{S}_n)^{*_{\mathbb{Z}_p}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V})\check{}(1))\check{}$.
Comme $((\mathcal{S}_n)^{*_{\mathbb{Z}_p}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V})\check{} = \mathcal{S}_n \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}\check{}$, si l'on pose $\mathcal{M}_n = H^1(K,\mathcal{S}_n \otimes \mathcal{V}\check{}(1))$, on a $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_n,\mathcal{V}) = \mathcal{M}_n\check{}$.
On a alors $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\mathrm{cont}}(\mathcal{S}_\infty,\mathcal{V}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n\check{} = (\varinjlim_{\mathbb{N}\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n)\check{}$. Mais $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n = H^1(K, \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n \otimes \mathcal{V}\check{}(1)) = H^1(K,\mathcal{S}_\infty \otimes \mathcal{V}\check{}(1))$.
Posons $\mathcal{T} = \mathcal{S} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{V}^{*_{\mathbb{Z}_p}}(1)$. C'est un $\mathbb{Z}_p$-module séparé et complet pour la topologie p-adique, avec action semi-linéaire continue de G_K et on a une suite exacte
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{T} & \to & \mathcal{T}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p & \to & \mathcal{T}\otimes_{\mathbb{Z}_p}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) & \to & 0\\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \to & \mathcal{S}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{V}^{*_{\mathbb{Z}_p}}(1) & \to & S\otimes_{\mathbb{Q}_p}V^{*_{\mathbb{Q}_p}}(1) & \to & \mathcal{S}_\infty\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathcal{V}\check{}(1) & \to & 0\end{array}$$

Comme la topologie sur $\mathcal{S}_\infty \otimes \mathcal{V}\check{}(1)$ est la topologie discrète, toute section ensembliste de la projection de $S\otimes V^{*\mathbb{Q}_p}(1)$ sur $\mathcal{S}_\infty\otimes\mathcal{V}\check{}(1)$ est automatiquement continue et [Ta76] la suite exacte courte ci-dessus induit une suite exacte longue

$$0 \to (H^1_{\text{cont}}(K, \mathcal{S} \otimes \mathcal{V}^{*\mathbb{Z}_p}(1)))_{\text{tor}} \to H^1_{\text{cont}}(K, \mathcal{S} \otimes \mathcal{V}^{*\mathbb{Z}_p}(1)) \to$$
$$H^1_{\text{cont}}(K, S \otimes V^{*\mathbb{Q}_p}(1)) \to H^1(K, \mathcal{S}_\infty \otimes \mathcal{V}\check{}(1)) \to H^2_{\text{cont}}(K, \mathcal{S} \otimes \mathcal{V}^{*\mathbb{Z}_p}(1))_{\text{tor}} \to 0$$

Mais $H = H^1_{\text{cont}}(K, S \otimes V^{*\mathbb{Q}_p}(1))$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie (cor. à la prop.3.3). L'image de $H^1_{\text{cont}}(K, \mathcal{S} \otimes \mathcal{V}^{*\mathbb{Z}_p}(1))$ dans H est un réseau $\mathcal{H}$ de H. Si l'on pose $N = H^2_{\text{cont}}(K, \mathcal{S} \otimes \mathcal{V}^{*\mathbb{Z}_p}(1))_{\text{tor}}$, on a donc des suites exactes

$$0 \to H/\mathcal{H} \to H^1(K, \mathcal{S}_\infty \otimes \mathcal{V}\check{}(1)) \to N \to 0 \qquad \text{et}$$
$$0 \to N\check{} \to \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K],\text{cont}}(\mathcal{S}_\infty, \mathcal{V}) \to (H/\mathcal{H})\check{} \to \operatorname{Ext}^1(N, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$$

puisque $H^1(K, \mathcal{S}_\infty \otimes \mathcal{V}\check{}(1))\check{} = \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K]\text{cont}}(\mathcal{S}_\infty, \mathcal{V})$. Il existe (prop. 3.3) un entier s tel que p^s annule N ; le noyau et le conoyau de $\operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K]\text{cont}}(\mathcal{S}_\infty, \mathcal{V}) \to (H/\mathcal{H})\check{}$ sont donc tués par p^s. Alors

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(S, V) = \mathbb{Q}_p \otimes \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}_p[G_K]\text{cont}}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$$

s'identifie au $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie $H^{*\mathbb{Q}_p}$.
Enfin, il est clair que l'accouplement ainsi défini est indépendant des choix faits et est fonctoriel en S et en V. □

Corollaire. — *Soient V une représentation p-adique et W une B^+_{dR}-représentation de G_K. Alors $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W, V)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie égale à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre -1 de l'opérateur $\nabla_0(W \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{*\mathbb{Q}_p})$.*
Il existe une dualité parfaite de K-espaces vectoriels

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W, V) \times H^1_{\text{cont}}(K, W \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{*\mathbb{Q}_p}(1)) \to K$$

canonique et fonctorielle en W et V.

Preuve : Soit H un K-espace vectoriel de dimension finie. L'application, qui à $\eta \in H^{*K}$ associe $\operatorname{tr}_{K/\mathbb{Q}_p} \circ \eta \in H^{*\mathbb{Q}_p}$, induit un isomorphisme du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent à H^{*K} sur $H^{*\mathbb{Q}_p}$. La deuxième partie de l'assertion résulte donc de la proposition précédente ; comme $H^1_{\text{cont}}(K, W \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{*\mathbb{Q}_p}(1))$ s'identifie à $\operatorname{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(B^+_{dR}, W \otimes_{\mathbb{Q}_p} V^{*\mathbb{Q}_p}(1))$ (prop.3.1), la première résulte de l'assertion (iii) du théorème 2.14. □

3.3 – Théorèmes de pleine fidélité

Rappelons (§1.6) que $B_e = \{b \in B_{cris} \mid \varphi(b) = b\}$ contient $\mathbb{Q}_p$ et que la suite

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to B_e \to B_{dR}/B^+_{dR} \to 0$$

est exacte.
Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{Fil}^i B_{dR}$ l'idéal fractionnaire de B_{dR}^+, puissance i-ième de l'idéal maximal ; c'est donc le sous-B_{dR}^+-module libre de rang 1 de B_{dR} engendré par t^i. On pose aussi $\mathrm{Fil}^i B_e = B_e \cap \mathrm{Fil}^i B_{dR}$ de sorte que $\mathrm{Fil}^i B_e = 0$ si $i > 0$ et que, pour $m \geq 0$, on dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to \mathrm{Fil}^{-m} B_e \to B_m(-m) \to 0$$

(en particulier, $\mathrm{Fil}^0 B_e = \mathbb{Q}_p$). Pour tout $m \in \mathbb{N}$, si l'on pose $U_m = (\mathrm{Fil}^{-m} B_m)(m)$, U_m s'identifie au sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $B_{cris} \cap B_{dR}^+$ formé des b tels que $\varphi b = p^m b$ et la suite

$$0 \to \mathbb{Q}_p(m) \to U_m \to B_m \to 0$$

est exacte.

Proposition 3.10. — *Soit V une représentation p-adique extension non triviale de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p$.*
i) Le C-espace vectoriel $V_C = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ s'identifie à $C \oplus C(1)$. Il existe une et une seule application $\mathbb{Q}_p$-linéaire G_K-équivariante de V dans C qui prolonge l'inclusion de $\mathbb{Q}_p$ dans C mais cette application ne se relève pas en une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire G_K-équivariante de V dans B_2 ;
ii) on a $\dim_K (B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = 1$,
iii) la représentation V n'est pas de de Rham.

Preuve : La suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p(2) \to U_2 \to B_2 \to 0$$

induit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_2) & \xrightarrow{\delta_V} & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(V, \mathbb{Q}_p(2)) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, B_2) & \xrightarrow{\delta_{\mathbb{Q}_p}} & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(2)) \end{array}$$

On a $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(2)) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(2)) = H^1_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(2))$. Par ailleurs $H^0_{cont}(K, \mathbb{Q}_p(2)) = H^2_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(2)) = 0$ (le second parce que c'est le dual de $H^0_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(-1))$ qui est nul). Comme

$$\textstyle\sum_{n=0}^2 (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}_p} H^n_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(2)) = -[K : \mathbb{Q}_p],$$

la dimension du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(2))$ est égale au degré de K sur $\mathbb{Q}_p$.
On a $K_0 \cap U_2 = 0$ (puisque φ est le Frobenius absolu sur K_0 et la multiplication par p^2 sur U_2). Comme $B_{cris}^{G_K} = K_0$ [Fo88a], on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, U_2) = U_2^{G_K} = 0$ et l'application $\delta_{\mathbb{Q}_p}$ est injective. Mais $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, B_2) = B_2^{G_K} = K$ (*loc.cit.*) a la même dimension sur $\mathbb{Q}_p$ que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(2))$ et $\delta_{\mathbb{Q}_p}$ est un isomorphisme.

La suite exacte
$$0 \to \mathbb{Q}_p \to V \to \mathbb{Q}_p(1) \to 0$$
induit une suite exacte
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, \mathbb{Q}_p(2)) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Q}_p(2)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}_p(1), \mathbb{Q}_p(2)) \\ \to \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, \mathbb{Q}_p(2))\end{aligned}$$
On a $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, \mathbb{Q}_p(2)) = H^2_{\mathrm{cont}}(K, V^*(2)) = 0$ car c'est le dual de $H^0_{\mathrm{cont}}(K, V(-1)) = V(-1)^{G_K}$, qui est nul puisque $V(-1)$ est une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(-1)$. En revanche $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p(1), \mathbb{Q}_p(2)) = H^2_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(1))$ est non nul et β n'est pas surjective. Par conséquent α ne l'est pas non plus.
La suite exacte de C-représentations
$$0 \to C \to V_C \to C(1) \to 0$$
est scindée (prop.2.15), ce scindage est unique puisqu'il n'y a pas de morphisme non trivial de $C(1)$ dans C et V_C s'identifie bien à $C \oplus C(1)$. En particulier, le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, C) = \mathrm{Hom}_{C[G_K]}(V_C, C)$ est de dimension 1. On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p(1), C) = C(-1)^{G_K} = 0$ tandis que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, C) = C^{G_K} = K$. On en déduit que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, C)$ est bijective. Il existe donc bien un unique $\eta : V \to C$ qui prolonge l'inclusion de $\mathbb{Q}_p$ dans C.
On a une suite exacte de K-espaces vectoriels
$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p(1), B_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_2) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, B_2)$$
Comme $\dim_K \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p, B_2) = 1$ et comme α n'est pas surjective, α est nulle et la première flèche est un isomorphisme. Donc η ne se relève pas en un homomorphisme de V dans B_2,d'où (i). En outre, on a $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_2) = \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p(1), B_2) = 1$.
On a $(B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V^*(1), B_2)$ qui est bien de dimension 1 en appliquant (i) à $V^*(1)$, qui,comme V, est aussi une extension non scindée de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p$, d'où (ii).
Pour tout entier $i \neq 0$, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, C(i)) = 0$. On en déduit que, si $i \notin \{0, 1\}$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, C(i)) = 0$. Comme $\mathrm{Fil}^i B_{dR}/\mathrm{Fil}^{i+1} B_{dR} = C(i)$, il en résulte que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_{dR}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B^+_{dR})$ et que l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B^+_{dR}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_2)$ est injective. On a donc
$$\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_{dR}) \leq \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_2) = 1$$
alors que, si V était de de Rham, on aurait $\dim_K \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V, B_{dR}) = 2$. □

Remarque : Cette proposition résulte aussi facilement du fait que, dans la dualité de Tate entre $H^1_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(-1))$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(2))$ le $H^1_f(K, \mathbb{Q}_p(-1))$

est l'orthogonal du $H^1_f(K,\mathbb{Q}_p(2))$ ([BK90, prop.3.8). Comme toute extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(2)$ est cristalline ([PR88], th.1.5), on a $H^1_f(K,\mathbb{Q}_p(2)) = H^1_{\mathrm{cont}}(K,\mathbb{Q}_p(2))$, donc $H^1_f(K,\mathbb{Q}_p(-1)) = 0$ et V ne peut pas être de de Rham. Les deux autres assertions s'en déduisent immédiatement en utilisant la nullité des $H^r_{\mathrm{cont}}(K,C(i))$ pour $i \neq 0$.

On sait ([Fo00], th.6.1) que, si W_1 et W_2 sont deux C-représentations, toute application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante de W_1 dans W_2 est C-linéaire. Ce résultat s'étend aux B^+_{dR}-représentations :

Théorème 3.11. — *Soient W_1 et W_2 deux B^+_{dR}-représentations. L'inclusion naturelle* $\mathrm{Hom}_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1,W_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W_1,W_2)$ *est bijective tandis que l'application* $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1,W_2) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W_1,W_2)$ *est injective.*

Ce théorème nous permet d'identifier $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$ à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{B}(G_K)$.

Preuve : D'après le corollaire à la proposition 2.13, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour toute extension finie galoisienne L de K contenue dans $\overline{K}$, on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_L)}(W_1,W_2) = (\mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1,W_2))^{\mathrm{Gal}(L/K)}$. Pour prouver le théorème on peut donc remplacer K par une telle extension, ce qui nous permet de supposer que W_1 et W_2 sont petites.
Par dévissage, on est ramené à prouver ces deux assertions lorsque W_1 et W_2 sont simples et sont donc des C-espaces vectoriels de dimension 1. La première assertion a été prouvée dans [Fo00] (cor.6.3, où elle est en fait établie pour des C-espaces vectoriels de dimension quelconque).
Prouvons la deuxième. A isomorphisme près, on peut supposer que $W_1 = C\{\alpha\}$, avec α un élément K-petit convenable (prop. 2.12). Quitte à tordre l'action de G_K sur W_1 et W_2 par $\chi^{-(\alpha)}$, on peut supposer que $W_1 = C$. Il résulte de la proposition 2.15 que l'on a $\mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K]}(W_1,W_2) = 0$ sauf si W_2 est isomorphe à C ou à $C(1)$. On peut donc supposer que $W_2 = C$ ou $W_2 = C(1)$.
Dans le premier cas, si W est une extension non triviale de C par C dans la catégorie $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$, W est isomorphe au C-espace vectoriel C_2 (prop.2.12). S'il existait une section G_K-équivariante de la projection de C_2 sur C, il existerait en particulier un relèvement v dans C_2 de 1 fixe par G_K, mais alors l'application $c \mapsto cv$ de C dans C_2 serait une section C-linéaire G_K-équivariante, ce qui contredit le fait que la suite

$$0 \to C \to C_2 \to C \to 0$$

n'est pas scindée en tant que suite de C-représentations de G_K (prop.2.12).
Dans le second cas, si W est une extension non triviale de C par $C(1)$ dans $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$, W est isomorphe à B_2 (prop.2.12). Mais il ne peut exister de section G_K-équivariante de la projection de B_2 sur C car, sinon, pour toute représentation p-adique V de G_K, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V,B_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V,C)$ serait surjective, ce qui contredit la proposition 3.10. □

Corollaire. — *Soient W une B_{dR}^+-représentation et V une représentation p-adique de G_K. On a* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)=0$

Preuve : En effet si $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)$, le composé φ de f avec l'inclusion naturelle de V dans $C\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$ est B_{dR}^+-linéaire. Si f n'était pas nulle, φ ne le serait pas non plus et l'image de φ serait un sous-C-espace vectoriel non nul de $C\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$ et ne serait donc pas de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$.

3.4 – Construction "explicite" des extensions de W par V

On pose $U=U_1$. Soit R l'ensemble des suites $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_C$ de C vérifiant $(x^{(n+1)})^p=x^{(n)}$ pour tout n. Rappelons [Fo88a] que R est muni d'une structure d'anneau de valuation complet de caractéristique $p>0$ et que c'est un anneau parfait (son corps des fractions est même algébriquement clos) ; si $W(R)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R, l'anneau $W(R)[1/p]$ s'identifie à un sous-anneau de $B_{cris}^+\subset B_{cris}\cap B_{dR}^+$.
Soit $\mathfrak{m}_R$ l'idéal maximal de R. Alors $U_R=1+\mathfrak{m}_R$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif R^* des éléments inversibles de R. C'est de façon naturelle un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel topologique. C'est en fait un banach : pour tout $a\neq 0$ dans $\mathfrak{m}_R$, le sous-$\mathbb{Z}_p$-module $1+aR$ de U_R est un réseau. Rappelons (cf. par exemple, [CF00], prop.1.3) que, pour tout $u\in U_R$, si [u] désigne son représentant de Teichmüller dans $W(R)$, alors la série $\log[u]=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}([u]-1)^n/n$ converge dans B_{cris}^+. L'image de U_R par cette application est U ; on obtient ainsi un isomorphisme (de banach) de U_R sur U.

Soit alors V une représentation p-adique de G_K et soit $V_C=C\otimes_{\mathbb{Q}_p}V$. En tensorisant par $V(-1)$ la suite exacte

$$0\to\mathbb{Q}_p(1)\to U\to C\to 0$$

on obtient une autre suite exacte courte de $\mathcal{B}(G_K)$

$$0\to V\to U(-1)\otimes V\to V_C(-1)\to 0$$

Si W est une C-représentation, en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(-,W)$, on obtient un opérateur de cobord $\delta:\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V_C(-1))\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)$.

Proposition 3.12. — *Soient W une C-représentation et V une représentation p-adique de G_K. On a* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,U(-1)\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)=0$ *et l'application*

$$\delta:\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V_C(-1))\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)$$

définie ci-dessus est un isomorphisme.

Nous allons en fait prouver un résultat plus général. Notons, avec une définition évidente, $\mathcal{IB}(\mathcal{G}_\mathcal{K})$ la catégorie des *limites inductives de représentations banachiques.* Pour tout entier $m\in\mathbb{N}$, $\mathrm{Fil}^{-m}B_{dR}/B_{dR}^+$ s'identifie à $B_m(-m)$

de sorte que B_{dR}/B^+_{dR} est une limite inductive d'objets de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$: c'est la réunion croisssante des $B_m(-m)$, pour $m \in \mathbb{N}$.
Si maintenant V est une représentation p-adique et W une B^+_{dR}-représentation, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{IB}(\mathcal{G}_K)}(W, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W, B_m(-m) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ pour m assez grand (il suffit que t^m annule W ; en particulier, on peut prendre $m = 1$ si W est une C-représentation). Par conséquent si l'on considère la suite exacte

$$0 \to V \to B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0$$

en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{IB}(\mathcal{G}_K)}(-, W)$, on obtient une flèche

$$\delta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{IB}(\mathcal{G}_K)}(W, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W, V)$$

(parce que, si m est un entier suffisamment grand pour que
$\mathrm{Hom}_{\mathcal{IB}(\mathcal{G}_K)}(W, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W, B_m(-m) \otimes V)$,
on peut remplacer la suite exacte précédente par

$$0 \to V \to \mathrm{Fil}^{-m} B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to B_m(-m) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0$$

qui est une suite exacte courte de $\mathcal{B}(G_K)$).
La proposition 3.12 est un cas particulier de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3.13. — *Soient W une B^+_{dR}-représentation et V une représentation p-adique de G_K. On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W, B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = 0$. Si m est un entier tel que t^m annulle W, alors $\mathrm{Hom}_{\mathcal{IB}(\mathcal{G}_K)}(W, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W, B_m(-m) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$. L'application*

$$\delta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{IB}(\mathcal{G}_K)}(W, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W, V)$$

définie ci-dessus est un isomorphisme.

Preuve : On a déjà vu la deuxième assertion. Vérifions les deux autres. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W, V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(V^{*\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W, \mathbb{Q}_p) = 0$ (cor. au th.3.11), on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & \mathrm{Hom}(W, B_e \otimes V) & \to & \mathrm{Hom}(W, B_{dR}/B^+_{dR} \otimes V) & \to & \mathrm{Ext}^1(W, V) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(V^* \otimes W, B_e) & \to & \mathrm{Hom}(V^* \otimes W, B_{dR}/B^+_{dR}) & \to & \mathrm{Ext}^1(V^* \otimes W, \mathbb{Q}_p)
\end{array}$$

(on a posé $V^* = V^{*\mathbb{Q}_p}$) où les lignes sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes. Quitte à remplacer W par $V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} W$, on peut supposer $V = \mathbb{Q}_p$.
Soit $f : W \to B_e$. Si f était non nulle, le composé de f avec la projection de B_e sur B_{dR}/B^+_{dR} serait une application $\overline{f} : W \to B_{dR}/B^+_{dR}$ non nulle et serait donc B^+_{dR}-linéaire (th.3.11). Son image serait un sous-B^+_{dR}-module non nul de B_{dR}/B^+_{dR}, donc serait de la forme $B_m(-m)$ pour un entier $m \geq 1$ convenable,

et f serait une application de W dans $\mathrm{Fil}^{-m}B_e$. Le noyau W' de $\overline{f}$ serait une B_{dR}^+-représentation et comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W',\mathbb{Q}_p)=0$ (appliquer de nouveau le cor. au th.3.11), $\overline{f}$ induirait en fait une section de la projection de $\mathrm{Fil}^{-m}B_e$ sur $B_m(-m)$. Par restriction à $C(-1)$, on en déduirait une section de la projection de $U(-1)$ sur $C(-1)$. En tensorisant par $\mathbb{Q}_p(1)$ cela fournirait une section de la projection de U sur C. On aurait donc un isomorphisme de U sur $\mathbb{Q}_p(1)\oplus C$, ce qui contredit le fait que $U^{G_K}=0$, tandis que $(\mathbb{Q}_p(1)\oplus C)^{G_K}=C^{G_K}=K$. Donc $f=0$ et δ est injective.
On sait (th.3.11) que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,B_{dR}/B_{dR}^+)=\mathrm{Hom}_{B_{dR}^+[G_K]}(W,B_{dR}/B_{dR}^+)$. On sait (th.2.14, (iv)) que ce K-espace vectoriel est de dimension finie égale à la dimension du sous-espace propre associé à la valeur-propre -1 de l'opérateur $\nabla_0(W)$. Comme c'est aussi la dimension de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)$, l'injectivité de δ implique que c'est un isomorphisme. □

Remarques : i) Posons $V^*=V^{*\mathbb{Q}_p}$ et $X=W\otimes_{\mathbb{Q}_p}V^*(1)$. On a une dualité naturelle entre les K-espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,(B_{dR}/B_{dR}^+)\otimes V)=\mathrm{Hom}_{B_{dR}^+[G_K]}(W,(B_{dR}/B_{dR}^+)\otimes V)=$$
$$\mathrm{Hom}_{B_{dR}^+[G_K]}(X,(B_{dR}/B_{dR}^+)(1))=\mathrm{Hom}_{B_{dR}^+[G_K]}(X,B_{dR}/\mathrm{Fil}^1B_{dR})$$

et $H^1_{\mathrm{cont}}(K,W\otimes V^*(1))=\mathrm{Ext}^1_{B_{dR}^+[G_K],0}(C,X)$:
Soient $f\in\mathrm{Hom}_{B_{dR}^+[G_K]}(X,B_{dR}/\mathrm{Fil}^1B_{dR})$ et $\varepsilon\in\mathrm{Ext}^1_{B_{dR}^+[G_K],0}(C,X)$. Soit F une B_{dR}^+-représentation, extension de C par $B_{dR}/\mathrm{Fil}^1B_{dR}$ dont la classe est l'image par f de ε. Comme cette extension est scindée en tant qu'extension de B_{dR}^+-modules, le noyau F_0 de la multiplication par t dans F est une C-représentation extension de C par C. Il existe donc (propr.2.15) un unique $\lambda\in K$ tel que la classe de F_0 est λ fois la classe de l'extension C_2 et cette dualité est l'application $(f,\varepsilon)\mapsto\lambda$.
Compte-tenu de cette dualité, la proposition 3.7 définit un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,(B_{dR}/B_{dR}^+)\otimes_{\mathbb{Q}_p}V)$$

Il ne devrait pas être difficile de vérifier que δ est l'inverse (au signe près ?) de cette application.
ii) La construction de δ fonctionne encore lorsque l'on remplace K par un corps toujours de caractéristique 0 et complet pour une valuation discrète, à corps résiduel toujours parfait de caractéristique p, mais infini. Il est raisonnable de penser que la proposition 3.13 reste vraie dans ce contexte. Si c'est le cas, une grande partie des résultats de cet article s'étendent à un tel corps K.

3.5 – Extensions presque scindées

Soit

$$0\to S'\to S\to S''\to 0 \qquad (1)$$

une suite exacte courte de $\mathcal{B}(G_K)$. Un *presque supplémentaire* de S' dans S est un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel fermé E de S stable par G_K tel que $S = S' + E$ et $V = S' \cap E$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & E & \rightarrow & S'' & \rightarrow & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \rightarrow & S' & \rightarrow & S & \rightarrow & S'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

qui identifie S à $S' \oplus_V E$, somme amalgamée de S' et de E, au dessous de V et la suite exacte

$$0 \rightarrow S'/V \rightarrow S/V \rightarrow S'' \rightarrow 0$$

est scindée. On dit que la suite exacte (1) est *presque scindée* s'il existe un presque supplémentaire de S' dans S.

Soient $f : V \rightarrow W'$ un morphisme de $\mathcal{B}(G_K)$ avec V une représentation p-adique et W' une B_{dR}^+-représentation. On note $E(f)$ le B_{dR}^+-module somme amalgamée de W' et de $B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ au dessous de $B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, l'application de $B_{dR}^+ \otimes V$ dans W' étant déduite de f par extension des scalaires. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & B_{dR}^+ \otimes V & \rightarrow & B_{dR} \otimes V & \rightarrow & (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \rightarrow & W' & \rightarrow & E(f) & \rightarrow & (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. En outre, si, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $E_m(f)$ l'image inverse de $B_m(-m) \otimes V$ dans $E(f)$, chaque $E_m(f)$ est une B_{dR}^+-représentation et $E(f)$ est la réunion croissante de ces $E_m(f)$.

PROPOSITION 3.14. — *Soit*

$$0 \rightarrow W' \rightarrow W \rightarrow W'' \rightarrow 0$$

une suite exacte courte presque scindée de $\mathcal{B}(G_K)$. Si W' et W'' sont des B_{dR}^+-représentations, il en est de même de W.

Preuve : Par hypothèse, on a, dans $\mathcal{B}(G_K)$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & E & \rightarrow & W'' & \rightarrow & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \rightarrow & W' & \rightarrow & W & \rightarrow & W'' & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes et où V est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$.
D'après la proposition 3.13, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & E & \rightarrow & W'' & \rightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & V & \rightarrow & B_e \otimes V & \rightarrow & (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, comme le sont celles du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Q}_p & \to & B_e & \to & B_{dR}/B_{dR}^+ & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & B_{dR}^+ & \to & B_{dR} & \to & B_{dR}/B_{dR}^+ & \to & 0 \end{array}$$

Si f désigne l'inclusion de V dans W', on obtient alors un troisième diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V & \to & E & \to & W'' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & V & \to & B_e \otimes V & \to & (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & B_{dR}^+ \otimes V & \to & B_{dR} \otimes V & \to & (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & W' & \to & E(f) & \to & (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont tout autant exactes (la deuxième ligne de flèches verticales se déduit du diagramme précédent en tensorisant avec V).
Comme W est la somme amalgamée de W' et de E au dessous de V, on en déduit un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & W' & \to & W & \to & W'' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & W' & \to & E(f) & \to & (B_{dR}^+/B_{dR}) \otimes V & \to & 0 \end{array}$$

et W s'identifie au B_{dR}^+-module $E(f) \times_{(B_{dR}/B_{dR}^+)\otimes V} W''$ (qui est bien de longueur finie : si W'' est tué par t^m, on a aussi $W = E_m(f) \times_{B_m(-m)\otimes V} W''$). □

Remarque : On verra au §5 que, réciproquement, toute suite exacte courte de $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ est presque scindée.

4 – Structures analytiques

Le but de ce paragraphe est d'établir le théorème suivant :

Théorème 4.1. — *Soit E une représentation banachique extension d'une C-représentation de dimension 1 par une $\mathbb{Q}_p$-représentation V. Si $\eta : E \to C$ est un morphisme de représentations banachiques tel que $\eta(E) \neq \eta(V)$, alors η est surjective et son noyau est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie égale à celle de V.*

Pour cela, nous allons dabord définir *les espaces de Banach-Colmez* : ce sont des espaces de Banach p-adiques munis d'uns structure analytique sur C d'un type particulier. On montre ensuite que E et C sont munis d'une structure naturelle d'espaces de Banach-Colmez et que η est analytique. Le résultat

fondamental de Colmez [Co02] dans son travail sur ce qu'il appelle les *Espaces de Banach de dimension finie* permet alors de conclure.
Pour décrire ces espaces, nous adoptons ici un point de vue un peu plus algébrique (ou géométrique ?) que celui de Colmez : Les espaces de Banach-Colmez sont associés à certains objets en groupes commutatifs dans la catégorie des *variétés pro-analytiques rigides sur* C . Nous reviendrons sur l'étude de ces espaces dans un travail ultérieur [FP]. Remarquons dès à présent qu'une bonne partie de la théorie esquissée ci-dessous peut se développer en remplaçant C par n'importe quel corps valué complet de caractéristique 0 à corps résiduel parfait de caractéristique $p > 0$. En particulier, comme le suggère l'analyticité de l'application η du théorème 4.1, la théorie des espaces de Banach-Colmez sur K se ramène essentiellement à celle des presque C-représentations de G_K.

4.1 – Banach analytiques

Dans ce texte, une C*-algèbre* est un anneau commutatif A muni d'un homomorphisme de C dans A. Une C*-algèbre de Banach* est une C-algèbre normée complète. Si A est une telle algèbre, on note $\mathrm{Spm}_C A$ *le spectre maximal de* A, i.e. l'ensemble des sections continues $s : A \to C$ du morphisme structural. Si $f \in A$ et $s \in \mathrm{Spm}_C A$, on pose $f(s) = s(f)$.
On munit C de la valeur absolue normalisée par $|p| = p^{-1}$. Une C*-algèbre spectrale* est une C-algèbre de Banach A telle que la norme est la norme spectrale, i .e. telle que, pour tout $f \in A$, $||f|| = sup_{s\in \mathrm{Spm}_C A}|f(s)|$.
Par exemple, pour tout $d \in \mathbb{N}$, l'algèbre de Tate $C\{X_1, X_2, \dots, X_d\}$ des *séries formelles restreintes* en les X_i (i.e. des séries $\sum a_{i_1,i_2,\dots,i_d} X_1^{i_1} X_2^{i_2}, \dots, X_d^{i_d}$ telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, $|a_{i_1,i_2,\dots,i_d}| < \varepsilon$ pour presque tout d-uple $i_1, i_2, \dots, i_d$), est une algèbre spectrale avec la norme

$$||\sum a_{i_1,i_2,\dots,i_d} X_1^{i_1} X_2^{i_2}, \dots, X_d^{i_d}|| = \sup |a_{i_1,i_2,\dots,i_d}|$$

Pour toute C-algèbre spectrale A, si $f \in A$ est non nul, il existe $s \in \mathrm{Spm}_C A$ tel que $f(s) \neq 0$. Si $f \in A$ et $m \in \mathbb{N}$, on a $||f^m|| = ||f||^m$; en particulier, A est réduite.
Soient A une C-algèbre spectrale. On note $\mathcal{O}_A$ la boule-unité fermée de A, i.e. la sous-$\mathcal{O}_C$-algèbre des $f \in A$ tels que $||f|| \leq 1$. On a des identifications $C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_A[1/p] = A$ et $\mathcal{O}_A$ est un réseau de A. Pour $s, s' \in \mathrm{Spm}_C A$, on pose $d(s, s') = \sup_{f\in\mathcal{O}_A} |f(s) - f(s')|$. Cela fait de $\mathrm{Spm}_C A$ un espace (ultra-)métrique complet.
Avec comme morphismes les homomorphismes continus de C-algèbres, les C-algèbres spectrales forment une catégorie. La *catégorie des variétés spectrales affines sur* C est la catégorie opposée. Si A est une C-algèbre spectrale, on parle abusivement de la variété spectrale affine $\mathcal{S} = \mathrm{Spm}_C A$ et A s'appelle l'algèbre affine de la variété. Suivant un usage établi, le symbole $\mathrm{Spm}_C A$ désigne donc, suivant le contexte, soit la variété spectrale affine, soit son spectre maximal, i.e. l'espace topologique $\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{C-\mathrm{alg\grave{e}bres}}(A, C)$. On remarque que le foncteur

d'oubli évident de la catégorie des variétés spectrales affines sur C dans celle des espaces topologiques est fidèle.
Pour $i = 1, 2$, soit $\mathrm{Spm}_C A_i$ une variété spectrale sur C et $\mathcal{S}_i$ son spectre maximal. On dit qu'une application $f : \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ est *analytique* s'il existe un homomorphisme continu de C-algèbres, nécessairement unique, $f^* : A_2 \to A_1$ tel que $f(s) = s \circ f^*$, pour tout $s \in \mathcal{S}_1$. Ceci nous permet d'identifier les morphismes d'une variété spectrale affine dans une autre à l'ensemble des applications analytiques du spectre maximal de la première dans celui de la seconde.
La catégorie des variétés spectrales affines sur C admet des limites projectives finies. Par exemple, soient $\mathcal{S} = \mathrm{Spm}_C A$, $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Spm}_C A_1$ et $\mathcal{S}_2 = \mathrm{Spm}_C A_2$ trois variétés affines spectrales sur C et $\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}$ des morphismes. Le produit fibré $\mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_2$ est muni d'une structure de variété spectrale affine sur C d'algèbre affine le séparé complété $A_1 \hat{\otimes}_A A_2$ de $A_1 \otimes_A A_2$ pour la norme

$$||f|| = \sup_{(s_1,s_2) \in \mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}_2} |f(s_1, s_2)|$$

Un *groupe spectral commutatif affine sur* C est un objet en groupes commutatifs dans la catégorie des variétés spectrales affines sur C. C'est donc une variété spectrale affine $\mathrm{Spm}_C A$ sur C dont le spectre maximal $\mathcal{S}$ est équippé d'une loi de composition $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, associative, commutative et unitaire, induite par un morphisme de C-algèbres spectrales, le *co-produit* $m^* : A \to A \hat{\otimes}_C A$. En particulier la loi de compostion est continue et $\mathcal{S}$ est un groupe topologique.

Soit S un banach. Une *C-structure analytique*[(1)] *sur* S est la donnée d'un couple $(\mathrm{Spm}_C A, \alpha)$ formé d'un groupe spectral commutatif affine $\mathrm{Spm}_C A$ sur C et d'un homomorphisme de groupes continu α du spectre maximal $\mathcal{S}$ de A dans S induisant un homémomorphisme de $\mathcal{S}$ sur un réseau de S. Dans la pratique, on utilise cet homomorphisme pour identifier $\mathcal{S}$ a un réseau de S. Un *banach analytique sur* C est un triplet $(S, \mathrm{Spm}_C A, \alpha)$ formé d'un banach S et d'une C-structure analytique $(\mathrm{Spm}_C A, \alpha)$ sur S. S'il n'y a pas de risque de confusion, on dit *banach analytique* au lieu de *banach analytique sur* C.
Soient $(S_1, \mathrm{Spm}_C A_1, \alpha_1)$ et $(S_2, \mathrm{Spm}_C A_2, \alpha_2)$ des banach analytiques ; posons $\mathcal{S}_1 = \mathrm{Spm}_C A_1$ et $\mathcal{S}_2 = \mathrm{Spm}_C A_2$. Un *morphisme de banach analytiques* η : $(S_1, \mathrm{Spm}_C A_1, \alpha_1) \to (S_2, \mathrm{Spm}_C A_2, \alpha_2)$ est une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire de S_1 dans S_2 qui est *analytique* i.e. qui a la vertu qu'il existe un entier m et un homomorphisme continu $\nu : A_2 \to A_1$ de C-algèbres tels que $\eta(p^m \mathcal{S}_1) \subset \mathcal{S}_2$ et que la restriction de $p^m \eta$ à $\mathcal{S}_1$ est l'application $f \mapsto f \circ \nu$ (remarquer que, pour m fixé, l'application ν est uniquement déterminée par η). Si cette propriété est vraie pour m elle est vraie pour tout entier supérieur. Les applications analytiques de $(S_1, \mathrm{Spm}_C A_1, \alpha_1)$ dans $(S_2, \mathrm{Spm}_C A_2, \alpha_2)$ forment un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de l'espace des applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires continues de S_1 dans S_2.

(1) Dans [Fo02] et [FP] on donne une définition un peu plus générale afin de pouvoir faire des quotients par des $\mathbb{Z}_p$-modules de type fini. Nous n'en avons pas besoin ici.

Les banach analytiques forment une catégorie additive et même $\mathbb{Q}_p$-linéaire ; ce n'est pas une catégorie abélienne mais elle admet des limites projectives finies. Si S est un banach, on dit que deux C-structures analytiques $(\mathrm{Spm}_C A_1, \alpha_1)$ et $(\mathrm{Spm}_C A_2, \alpha_2)$ sur S sont équivalentes si l'identité sur S est analytique dans les deux sens (i.e. est un morphisme de banach analytiques de $(S, \mathrm{Spm}_C A_1, \alpha_1)$ dans $(S, \mathrm{Spm}_C A_2, \alpha_2)$, aussi bien que de $(S, \mathrm{Spm}_C A_2, \alpha_2)$ dans $(S, \mathrm{Spm}_C A_1, \alpha_1)$). L'identité sur S est alors un isomorphisme de ces deux banach analytiques que l'on utilise pour les identifier. Autrement dit, on peut aussi bien voir un banach analytique comme un banach muni d'une classe d'équivalence de C-structures analytiques. On parlera souvent abusivement du banach analytique S, la classe d'équivalence de structures anaytiques étant sous-entendue.

4.2 – Banach analytiques constants et vectoriels

Soit V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Choisissons un réseau $\mathcal{V}$ de V ; soit $\mathcal{F}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{V}, C)$ la C-algèbre des fonctions continues sur $\mathcal{V}$ à valeurs dans C. On la munit de la norme spectrale

$$||(f)|| = \sup_{s \in \mathcal{V}} |f(s)|$$

Alors $\mathcal{V} = \mathrm{Spm}_C \mathcal{F}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{V}, C)$, munie de l'inclusion de $\mathcal{V}$ dans V, est une structure analytique sur V dont la classe d'équivalence ne dépend pas du choix du réseau ; on l'appelle la *structure analytique constante* et on note V^c le banach analytique ainsi associé à V.
On obtient ainsi un foncteur $V \mapsto V^c$ de la catégorie des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie dans celle des banach analytiques. *Ce foncteur est pleinement fidèle*, i.e. si V_1 et V_2 sont deux $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, toute application $\mathbb{Q}_p$-linéaire de V_1 dans V_2 non seulement est continue, mais elle est analytique.
Les *banach analytiques constants* sont les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie munis de la structure analytique constante. On appelle alors *hauteur* de V^c (ou de V) la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$.

Soit $\mathcal{W}$ un $\mathcal{O}_C$-module libre de rang fini. Notons $\mathcal{W}'$ le $\mathcal{O}_C$-module dual. Notons $\mathcal{O}_C\{\mathcal{W}'\}$ la complétion p-adique de l'algèbre $\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_C}\mathcal{W}'$ et posons $C\{\mathcal{W}'\} = C \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C\{\mathcal{W}'\} = \mathcal{O}_C\{\mathcal{W}'\}[1/p]$. L'algèbre topologique $C\{\mathcal{W}'\}$ est une C-algèbre spectrale ; le choix d'une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ de $\mathcal{W}$ permet de l'identifier à l'algèbre des séries formelles restreintes $C\{X_1, X_2, \ldots, X_d\}$ (où $\{X_1, X_2, \ldots, X_d\}$ est la base de $\mathcal{W}'$ duale de $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$). Son spectre maximal s'identifie à $\mathcal{W}$, ce qui nous permet de considérer $\mathcal{W} = \mathrm{Spm}_C C\{\mathcal{W}'\}$ comme un groupe spectral commutatif affine.
Si maintenant W est un C-espace vectoriel de dimension finie, le choix d'un $\mathcal{O}_C$*-réseau* de W, i.e. d'un sous-$\mathcal{O}_C$-module libre $\mathcal{W}$ de W qui engendre W comme C-espace vectoriel, définit une structure analytique $\mathrm{Spm}_C C\{\mathcal{W}'\}$ sur

W. On voit que la classe d'équivalence de cette structure est indépendante du choix de $\mathcal{W}$, ce qui nous permet de considérer W comme le banach sous-jacent à un banach analytique que l'on note W^{an}.
Par exemple, pour $W = C$, on écrit aussi $\mathbb{G}_a^{\mathrm{an}} = C^{\mathrm{an}}$ et on l'appelle le *groupe additif* (sous-entendu dans la catégorie des banach analytiques sur C). L'élément 1 est une base du $\mathcal{O}_C$-réseau $\mathcal{O}_C$ de C et $\mathcal{O}_C$ s'identifie à $\mathrm{Spm}_C C\{X\}$, avec $m^*X = X\hat{\otimes}1 \oplus 1\hat{\otimes}X$.
L'application qui à W associe W^{an} est, de manière évidente, un foncteur de la catégorie des C-espaces vectoriels de dimension finie dans celle des banach analytiques.

Proposition 4.2. — *Le foncteur $W \mapsto W^{\mathrm{an}}$ de la catégorie des C-espaces vectoriels de dimension finie dans celle des banach analytiques est pleinement fidèle.*

Autrement dit, si W_1 et W_2 sont deux C-espaces vectoriels de dimension finie, toute application $\mathbb{Q}_p$-linéaire de W_1 dans W_2 qui est analytique est C-linéaire. Ce résultat est à rapprocher du théorème de pleine fidélité pour les C-représentations (cf. th.3.11).

Preuve : Si W est un C-espace vectoriel de dimension d, le choix d'une base de W définit un isomorphisme de W^{an} sur $(\mathbb{G}_a^{\mathrm{an}})^d$. Ceci nous ramène au cas où $W_1 = W_2 = C$. Si η est un endomorphisme analytique de C, il existe un entier m tel que $p^m\eta$ provient d'un endomorphisme continu ν de la C-algèbre $C\{X\}$ qui commute au coproduit. Se donner ν revient à se donner $\nu(X)$ qui doit être un élément $f \in \mathcal{O}_C\{X\}$ vérifiant $m^*(f) = f\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}f$. Mais ceci implique que f appartient au C-espace vectoriel engendré par X, comme on le voit par exemple en utilisant l'inclusion de $\mathcal{O}_C\{X\} \subset C\{X\}$ dans $C[[X]]$, celle de $C\{X\hat{\otimes}1, 1\hat{\otimes}X\}$ dans $C[[X\hat{\otimes}1, 1\hat{\otimes}X]]$ et le fait que le résultat correspondant est vrai pour le groupe formel additif sur un corps de caractéristique 0. On a donc $\nu(X) = \lambda X$ pour un $\lambda \in \mathcal{O}_C$ convenable. Mais alors l'endomorphisme de C induit par ν est la multiplication par λ et η est la multiplication par $p^{-m}\lambda$ qui est bien C-linéaire. □

On a donc une équivalence entre la catégorie des C-espaces vectoriels de dimension finie et celle des *banach analytiques vectoriels*, i.e. la sous-catégorie pleine de la catégorie des banach analytiques qui sont isomorphes à un W^{an} pour un C-espace vectoriel W de dimension finie convenable.

4.3 – Espaces de Banach-Colmez

Les Espaces de Banach-Colmez *présentables* sont les banach analytiques qui peuvent s'écrire comme une extension d'un banach analytique vectoriel par un banach analytique constant. Dans la définition qui suit et qui suffit pour ce que nous faisons ici, il semble que l'on ne considère que des extensions d'un type particulier. En fait ([Co02], [FP]) toutes les extensions d'un banach analytique vectoriel par un banach analytique constant sont de ce type là.

Rappelons (§3.4) que le groupe multiplicatif $U_R = 1 + \mathfrak{m}_R$ a une structure naturelle de banach. On a une structure analytique naturelle sur U_R : Soit $\pi \in R$ tel que $(\pi^{(0)}) = -p$; alors $\mathcal{U}_R = 1 + \pi R$ est un réseau de U_R. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{U}_n = 1 + \pi^{(n)}\mathcal{O}_C$ le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathcal{O}_C^*$ de $\mathcal{O}_C$ formé des a tels que $|a-1| \leq p^{-n}$. L'application de $\mathcal{O}_C$ dans $\mathcal{U}_n$ qui envoie y sur $1+\pi^{(n)}y$ est un homéomorphisme et on l'utilise pour munir $\mathcal{U}_n$ d'une structure de groupe spectral commutatif affine ; autrement dit on écrit $\mathcal{U}_\backslash = \mathrm{Spm}_C C\{Y_n\}$ et la loi de groupe est donnée par $m^*Y_n = Y_n\hat{\otimes}1+1\hat{\otimes}Y_n+\pi^{(n)}Y_n\hat{\otimes}Y_n$. On envoie $\mathcal{U}_{n+1}$ sur $\mathcal{U}_n$ via le morphisme analytique défini par l'homomorphisme continu de C-algèbres $C\{Y_n\} \to C\{Y_{n+1}\}$ qui envoie $1+\pi^{(n)}Y_n$ sur $(1+\pi^{(n+1)}Y_{n+1})^p$. Alors $\mathcal{U}_R$ s'identifie à la limite projective des $\mathcal{U}_n$ et on le munit de la structure de groupe spectral commutatif affine induite, i.e. on pose $\mathcal{U}_R = \mathrm{Spm}_C A_U$ où A_U est le complété pour la norme spectrale de $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} C\{Y_n\}$. D'où une C-structure analytique sur U_R. On note U^{an} le banach analytique $(U, \mathrm{Spm}_C A_U, \alpha_U)$ où $\alpha_U : \mathcal{U}_R \to U$ est l'application $u \mapsto \log[u]$.
La suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to U \to C \to 0$$

induit une suite exacte de banach analytiques

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1)^c \to U^{an} \to C^{an} \to 0 \tag{1}$$

En effet, l'application de U sur C qui envoie $\log[u]$ sur $\log(u^{(0)})$ est analytique (elle est induite par l'homomorphisme continu de C-algèbres $C\{X\} \to A_U$ qui envoie X sur $\log(1-pY_0)/p)$. L'inclusion de $\mathbb{Q}_p(1)$ dans U est induite par l'unique homomorphisme continu de la C-algèbre A_U dans celle des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p(1)$ dans C qui envoie $1+\pi^{(n)}Y_n$ sur la fonction $\varepsilon = (\varepsilon^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \mapsto \varepsilon^{(n)}$.

Soit S le banach sous-jacent à un banach analytique $S^{an} = (S, \mathrm{Spm}_C A, \alpha)$ et soit V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Le choix d'une base de V définit un isomorphisme de $S \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ sur S^d qui hérite donc de la structure analytique produit. La structure analytique ainsi définie sur $S \otimes V$ ne dépend pas du choix de la base et on note $S^{an} \otimes V$ le banach analytique ainsi défini. Par exemple, pour tout $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V de dimension fini, V^c s'identifie à $\mathbb{Q}_p^c \otimes V$ aussi bien qu'à $\mathbb{Q}_p(1)^c \otimes V(-1)$ et $V_C(-1)^{an}$ à $C^{an} \otimes V(-1)$. En tensorisant la suite exacte (1) avec $V(-1)$, on obtient une suite exacte de banach analytiques

$$0 \to V^c \to U^{an} \otimes V(-1) \to V_C(-1)^{an} \to 0$$

Pour tout triplet (V, W, f) formé d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension fini V, d'un C-espace vectoriel de dimension finie W et d'une application C-linéaire $f : W \to V_C(-1)$, on pose $E_{V,W,f} = (U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \times_{V_C(-1)} W$; c'est le banach sous-jacent au banach analytique $E^{an}_{V,W,f}$ défini comme le produit fibré de $U^{an} \otimes$

$V(-1)$ avec W^{an} au-dessus de $V_C(-1)^{an}$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V^c & \to & E^{an}_{V,W,f} & \to & W^{an} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & V^c & \to & U^{an}\otimes V(-1) & \to & V_C(-1)^{an} & \to & 0 \end{array}$$

de banach analytiques dont les lignes sont exactes.

Décrivons un peu plus explicitement la structure analytique : Rappelons que t est un générateur du $\mathbb{Z}_p$-module $\mathbb{Z}_p(1)$. Choisissons une base $\{v_1, v_2, \ldots, v_h\}$ de V sur $\mathbb{Q}_p$; les $v'_i = v_i \otimes t^{-1}$ forment une base de $V(-1)$ sur $\mathbb{Q}_p$. Choisissons une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_d\}$ de W sur C, de manière que si $f(e_j) = \sum_{i=1}^h c_{ij} v'_i$, alors les $c_{ij} \in \mathcal{O}_C$. Notons $\mathcal{V}$ le sous-$\mathbb{Z}_p$-module de V engendré par les v_i et $\mathcal{W}$ le sous-$\mathcal{O}_C$-module de W engendré par les e_j.

Soit $\mathcal{U} = \alpha_U(\mathcal{U}_R)$. Soit $A^0_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}(-\infty)}$ le quotient de l'anneau des polynômes à coefficients dans C en les variables $Y_{i,n}$, pour $1 \le i \le h$ et $n \in \mathbb{N}$, par l'idéal engendré par les $1 + \pi^{(n)} Y_{i,n} - (1 + \pi^{(n+1)} Y_{i,n+1})^p$. On l'identifie à une sous-algèbre de la C-algèbre des fonctions sur $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}(-\infty)$ en identifiant $Y_{r,n}$ à la fonction qui envoie $\sum u_i \otimes v'_i$ sur $\frac{u_r^{(n)}-1}{\pi^{(n)}}$. On note $A_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}(-\infty)}$ le complété de cette algèbre pour la norme $||f|| = \sup_{s\in\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}(-\infty)} |f(s)|$. C'est une algèbre spectrale dont le spectre maximal s'identifie au réseau $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}(-1)$ de $U \otimes V(-1)$ et définit la structure analytique sur ce banach.

Par ailleurs

$$W^{\mathrm{an}} = (W, \mathrm{Spm}_C C\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}, \alpha_{\mathcal{W}}) \quad \text{et}$$
$$V_C(-1)^{\mathrm{an}} = (V_C(-1), \mathrm{Spm}_C C\{X_1, X_2, \ldots, X_h\}, \alpha_{\mathcal{V}})$$

où l'algèbre de séries formelles restreintes $C\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}$ (resp. $C\{X_1, X_2, \ldots, X_h\}$) s'identifie à l'unique algèbre spectrale de fonctions continues sur $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{V}_C(-1)$) telle que $Z_s(\sum_{j=1}^s \lambda_j e_j) = \lambda_s$ (resp. $X_r(\sum_{i=1}^h \mu_i \otimes v'_i) = \mu_r$) et où $\alpha_{\mathcal{W}}$ et $\alpha_{\mathcal{V}}$ sont les applications évidentes.

En outre f est induit par l'unique homomorphisme continu de C-algèbres

$$C\{X_1, X_2, \ldots, X_h\} \to C\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}$$

qui envoie X_i sur $\sum_{j=1}^d c_{ij} Z_j$ tandis que la projection de $U^{\mathrm{an}} \otimes V(-1)$ sur $V_C(-1)^{\mathrm{an}}$ est induite par l'unique homomorphisme continu de C-algèbres $C\{X_1, X_2, \ldots, X_h\} \to \mathcal{F}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{V}, C)$ qui envoie X_r sur $\log(1 - pY_{r,0})/p$. Enfin $E^{\mathrm{an}}_{V,W,f} = (E_{V,W,f}, \mathrm{Spm}_C A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}, \alpha)$ où $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}$ est le séparé complété du produit tensoriel de $A_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}(-\infty)}$ et de $C\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_d\}$ au-dessus de $C\{X_1, X_2, \ldots, X_h\}$ pour la norme évidente, son spectre maximal est $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}(-1)) \times_{\mathcal{O}_C\otimes\mathcal{V}(-1)} \mathcal{W}$ et α est l'application évidente. Remarquons que $A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}$ est aussi le séparé complété, pour la norme évidente, de la C-algèbre engendrée par des éléments $(Y_{i,n})_{1\le i\le h, n\in\mathbb{N}}$ et des éléments $Z_1, Z_2, \ldots, Z_d$ avec les relations $1 + \pi^{(n)} Y_{i,n} = (1 + \pi^{(n+1)} Y_{i,n+1})^p$ et $\log(1 - pY_{i,0})/p = \sum_{j=1}^d c_{ij} Z_j$.

Quant à la loi de groupe elle est caractérisée par $m^*Y_{n,i} = Y_{n,i}\hat{\otimes}Y_{n,i}$ et $m^*Z_j = Z_j\hat{\otimes}1 + 1\hat{\otimes}Z_j$.

Une *présentation* d'un banach analytique E^{an} consiste en la donnée d'un quadruplet (W, V, f, ι) formé d'un C-espace vectoriel de dimension finie W, d'un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie V, d'une application C-linéaire $f : W \to V_C(-1)$ et d'un isomorphisme de banach analytiques $\iota : E^{\mathrm{an}}_{W,V,f} \to E^{\mathrm{an}}$. On appelle *dimension de la présentation* la dimension du C-espace vectoriel W et *hauteur de la présentation* la dimension du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel V.
Enfin, on appelle *espace de Banach-Colmez présentable (sur C)* tout banach analytique qui admet une présentation.
Les principaux résultats du travail de Colmez sur les *Espaces de Banach de dimension finie* [Co02] peuvent se réinterpréter (cf. [FP], voir aussi[Fo02]) en disant que la sous-catégorie pleine $\mathcal{BC}_{\mathcal{C}}^+$ de la catégorie des banach analytiques dont les objets sont les espaces de Banach-Colmez présentables s'identifie de façon naturelle à une sous-catégorie pleine d'une catégorie abélienne, la catégorie $\mathcal{BC}_{\mathcal{C}}$ des *espaces de Banach-Colmez (sur C)*, tout objet de $\mathcal{BC}_{\mathcal{C}}$ étant isomorphe au quotient d'un objet de $\mathcal{BC}_{\mathcal{C}}^+$ par un autre. Il existe en outre des fonctions additives $d : \mathrm{Ob}\ \mathcal{BC}_{\mathcal{C}} \to \mathbb{N}$ et $h : \mathrm{Ob}\ \mathcal{BC}_{\mathcal{C}} \to \mathbb{Z}$ uniquement déterminées par le fait que si E^{an} est un banach analytique muni d'une présentation, alors $d(E^{\mathrm{an}})$ (resp. $h(E^{\mathrm{an}})$) est la dimension (resp. la hauteur) de la présentation.
Nous verrons aussi que toute presque C-représentation de G_K est munie de façon naturelle d'une structure d'espace de Banach-Colmez. Pour le moment, nous n'avons pas besoin de ces résultats. Mais nous allons utiliser le résultat crucial de [Co02] (prop.5.19 et cor.5.11, voir aussi [FP]) qui peut s'énoncer ainsi :

PROPOSITION 4.3 (lemme de Colmez). — *Soit E^{an} un banach analytique admettant une présentation (W, V, ρ, ι) de dimension 1. Soit $\eta : E \to C$ un morphisme analytique tel que $\eta(E) \neq f(\iota(V))$. Alors η est surjective et son noyau est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie égale à la hauteur de la présentation.*

Remarque : C'est essentiellement la version forte du lemme fondamental de [CF00] ; le lemme fondamental ([CF00],§2) énoncé sous une autre forme, disait seulement que l'application η est surjective.

4.4 – UNE APPLICATION AUX PRESQUE-C-REPRÉSENTATIONS

Soit E une représentation banachique de G_K extension d'une C-représentation W par une représentation p-adique V. D'après la proposition 3.12, on dispose d'une application C-linéaire G_K-équivariante $f : W \to V_C(-1)$ et d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & V & \to & E & \to & W & \to & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow f & & \\
0 & \to & V & \to & U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V & \to & V_C(-1) & \to & 0
\end{array}$$

Ceci nous permet d'identifier E au banach sous-jacent à $E^{\mathrm{an}}_{W,V,f}$. Comme C est le banach sous-jacent à $E^{\mathrm{an}}_{C,0,0}$, cela donne un sens à l'énoncé suivant :

Proposition 4.4. — *Soient V un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie de C stable par G_K et E une représentation banachique extension d'une C-représentation W de dimension 1 par V. Si $\eta : E \to C$ est une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante induisant l'identité sur V, alors η est analytique.*

Preuve : Reprenons les conventions et notations du §4.3 avec $d = 1$. Posons $e = e_1$, $Z = Z_1$, $c_i = c_{i1}$ et $\mathcal{E} = (\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}(-1))\times_{\mathcal{O}_C\otimes\mathcal{V}(-1)}\mathcal{W}$. Quitte à remplacer e par pe, on peut supposer que $c_i \in p\mathcal{O}_C$ pour tout i. Posons encore $A = A_{\mathcal{V},\mathcal{W},f}$ et notons $\mathcal{O}_A$ la boule unité de A. Soit R^A l'ensemble des suites $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_A$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ pour tout n. On en fait un anneau commutatif unitaire en posant

$$(x+y)^{(n)} = \lim_{m\mapsto+\infty}(x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m} \text{ et } (xy)^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$$

C'est un anneau de caractéristique p. Il contient l'anneau R formé des x tels que $x^{(n)} \in \mathcal{O}_C$ pour tout n comme sous-anneau. Il est parfait (i.e. le Frobenius $x \mapsto x^p$ est bijectif).
Soit $W(R^A)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R^A. Comme R^A est parfait, c'est un anneau séparé et complet pour la topologie p-adique, sans p-torsion. Pour tout $x \in R^A$, notons $[x] = (x, 0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in W(R^A)$ son représentant de Teichmüller. Pour tout $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in W(R^A)$, on a $(x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n[x_n^{p^{-n}}]$.
L'application $\theta : W(R^A) \to \mathcal{O}_A$ qui envoie $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ sur $\sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)}$ est un homomorphisme d'anneaux.

Lemme 4.5. — *Soit $\pi = (\pi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R$ un élément vérifiant $\pi^{(0)} = -p$. Pour tout $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R^A$, posons $||x|| = ||x^{(0)}||$. Pour que x appartienne à l'idéal engendré par π, il faut et il suffit que $||x|| \leq |p|$.*

Preuve : Si $x = \pi y$ avec $y \in R^A$, on a $||x|| = ||x^{(0)}|| = ||-py^{(0)}|| = |p|||y^{(0)}|| \leq |p|$ et la condition est nécessaire. Réciproquement, si $||x|| \leq |p|$, cela veut dire que $||x^{(0}|| \leq |p|$, donc que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $||x^{(n)}|| \leq (|p|)^{p^{-n}} = |\pi^{(n)}|$ puisque $||x^{(0)}|| = (||x^{(n)}||)^{p^n}$. L'élément $y^{(n)} = x^{(n)}/\pi^{(n)}$ de A vérifie donc $||y||^{(n)} \leq 1$. Donc $y = (y^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_A$ et $x = \pi y$. □

Lemme 4.6. — *Soient π comme ci-dessus et $\xi = [\pi] + p$. Dans $W(R^A)$, la multiplication par ξ est injective et le noyau de θ est l'idéal principal engendré par ξ.*

Preuve : Remarquons d'abord que la multiplication par π est injective dans R^A. En effet, si $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in R^A$ est non nul, $x^{(0)} \neq 0$. On a $\pi x = (\pi^{(n)}x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\pi^{(0)}x^{(0)} = -px^{(0)}$ est non nul, puisque p est inversible dans C et A est une C-algèbre.

Soit maintenant $x \in W(R^A)$ non nul. Si r est le plus grand entier tel que p^r divise x, on peut écrire $x = p^r y$ avec $y = (y_0, y_1, \dots, y_n, \dots) \in W(R^A)$ et $y_0 \neq 0$. Alors $\xi y = (\pi y_0, \dots,)$ est non nul puisque $\pi y_0 \neq 0$ et donc aussi $\xi x = p^r \xi y$, puisque $W(R^A)$ est sans p-torsion.
On a $\theta(\xi) = \pi^{(0)} + p = 0$ et l'idéal engendré par ξ est bien contenu dans le noyau de θ. Pour prouver la réciproque, comme $W(R^A)$ est séparé et complet pour la topologie p-adique, il suffit de vérifier que Ker $\theta \subset (\xi) + p$Ker θ. Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) \in \mathrm{Ker}\ \theta$. On a $x_0^{(0)} + p(\sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} x_n^{(n)}) = 0$ donc $x_0^{(0)} \in p\mathcal{O}_A$ et $||x|| = ||x^{(0)}|| \leq |p|$. D'après le lemme précédent, il existe $y_0 \in R^A$ tel que $x_0 = \pi y_0$. Si $z = (z_0, z_1, \dots, z_n, \dots) = x - \xi[y_0]$, on a $z_0 = 0$ donc $z = pz'$ avec $z' \in W(R^A)$. Mais $\theta(pz') = 0$, donc aussi $\theta(z') = 0$ et on a bien $x \in (\xi) + p\mathrm{Ker}\ \theta$. □

Notons $\mathcal{O}_{A^\theta}$ le sous-anneau de $\mathcal{O}_A$ image de $W(R^A)$ par θ et $\mathcal{O}_{B_2^A}$ le quotient de $W(R^A)$ par l'idéal $(\mathrm{Ker}\ \theta)^2$ qui est aussi l'idéal principal engendré par ξ^2. L'anneau $\mathcal{O}_{B_2^A}$ est donc une extension de $\mathcal{O}_{A^\theta}$ par un idéal de carré nul qui est le $\mathcal{O}_{A^\theta}$-module libre de base l'image $\bar{\xi}$ de ξ.
Pour $1 \leq i \leq h$, soit $U_i^{(n)} = 1 + \pi^{(n)} Y_{i,n}$. Alors $U_i = (U_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \in R^A$. On a $U_i^{(0)} - 1 = \exp(c_i Z) - 1$ qui, comme $c_i Z$, appartient à $p\mathcal{O}_A$. On a $(U_i - 1)^{(0)} \equiv U_i^{(0)} - 1 \bmod p\mathcal{O}_A$ et $||U_i - 1|| \leq |p|$. D'après le lemme 4.5, il existe $V_i \in R^A$ tel que $U_i - 1 = \pi V_i$.
Soit $[U_i] = (U_i, 0, 0, \dots, 0, \dots)$ le représentant de Teichmüller de U_i dans $W(R^A)$. Il existe $\alpha_i \in W(R^A)$ tel que $[U_i] - 1 = [U_i - 1] + p\alpha_i$. On peut donc écrire $[U_i] - 1 = [\pi V_i] + p\alpha_i = [\pi][V_i] + p\alpha_i = \xi[V_i] + p(\beta_i - V_i)$. L'anneau $\mathcal{O}_{B_2^A}$ est séparé et complet pour la topologie p-adique et l'idéal engendré par $\bar{\xi}$ est de carré nul ; on en déduit une structure d'idéal à puissances divisées sur l'idéal engendré par $\bar{\xi}$ et p. Par conséquent, si l'on note $\tilde{U}_i$ l'image de $[U_i]$ dans $\mathcal{O}_{B_2^A}$, la série $\log \tilde{U}_i = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\tilde{U}_i - 1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n-1)! \gamma_n(\tilde{U}_i - 1)$ converge dans cet anneau.
Celui-ci est sans p-torsion et $\mathcal{O}_{B_2^A}$ s'identifie à un sous-anneau de $B_2^A = \mathcal{O}_{B_2^A}[1/p]$. Ce dernier est une extension de l'anneau $A^\theta = \mathcal{O}_{A^\theta}[1/p]$ - que l'on peut voir comme un sous-anneau de A - par le A^θ-module libre de rang 1 de base $\bar{\xi}$.
Notons $\mathcal{O}_{B_2}$ le quotient de l'anneau $W(R)$ par l'idéal engendré par ξ^2. On sait ([Fo88a], §1.5) que B_2 s'identifie à $\mathcal{O}_{B_2}[1/p]$ et que l'image $\bar{t}$ de t dans B_2 est un élément non nul de $\mathcal{O}_{B_2}\bar{\xi} = \mathcal{O}_C \bar{\xi}$; il existe donc $c_0 \in \mathcal{O}_C$ non nul tel que $\bar{t} = c_0 \bar{\xi}$. On voit donc que B_2^A est de façon naturelle une B_2-algèbre, que ξ et $\bar{t}$ engendre le même idéal dans B_2^A et que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C(1) & \to & B_2 & \to & C & \to & 0 \\ & & \cap & & \downarrow & & \cap & & \\ 0 & \to & A^\theta(1) & \to & B_2^A & \to & A^\theta & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. En particulier l'application $B_2 \to B_2^A$ est injective et B_2^A est une B_2-algèbre fidèlement plate.

Pour tout B_2-module W, on pose $W^A = B_2^A \otimes_{B_2} W$. Si W est annulé par t, c'est un C-espace vectoriel et $W^A = A^\theta \otimes_C W$. Remarquons que, si $s \in \mathcal{E}$, alors s induit un homomorphisme de $\mathcal{O}_C$-algèbres de $\mathcal{O}_A$ dans $\mathcal{O}_C$, donc un morphisme de R-algèbres de R^A dans R, un morphisme de $W(R)$-algèbres de $W(R^A)$ dans $W(R)$, donc un morphisme de B_2-algèbres $s_{B_2} : B_2^A \to B_2$. Pour tout B_2-module W, on note encore $s_{B_2} : W^A \to W$ l'application définie par $s_{B_2}(b \otimes w) = s_{B_2}(b)w$ si $b \in B_2^A$ et $w \in W$.

Lemme 4.7. — *Soient W un B_2-module de type fini et W_1 un sous-B_2-module de W. Soit $\alpha \in W^A$. Pour que $\alpha \in W_1^A$, il faut et il suffit que $s_{B_2}(\alpha) \in W_1$ pour tout $s \in \mathcal{E}$.*

Preuve : On peut trouver $m_1 \leq m_2 \leq m$ et $n_1 \leq n$ dans $\mathbb{N}$ et des éléments $(a_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans W tels que, avec des notations évidentes,

$$W = (\bigoplus_{i=1}^{m} B_2 a_i) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{n} C b_j) \text{ et } W_1 = (\bigoplus_{i=1}^{m_1} B_2 a_i) \oplus (\bigoplus_{i=m_1+1}^{m_2} C \bar{t} a_i) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{n_1} C b_j)$$

On peut alors écrire $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes a_i + \sum_{j=1}^n \mu_j \otimes b_j$, avec les $\lambda_i \in B_2^A$ et les $\mu_j \in A^\theta$ uniquement déterminés. Pour tout $s \in \mathcal{E}$, on a $s_{B_2}(\alpha) = \sum s_{B_2}(\lambda_i) a_i + \sum s(\mu_j) b_j$; c'est un élément de W_1 si et seulement si $\theta(s_{B_2}(\lambda_i)) = 0$ pour $m_1 < i \leq m_2$, $s_{B_2}(\lambda_i) = 0$ pour $m_2 < i \leq m$ et $s(\mu_j) = 0$ pour $n_1 < j \leq n$. L'assertion résulte alors de ce que, comme A est spectrale, pour tout $\mu \in A$ non nul, il existe $s \in \mathcal{E}$ tel que $s(\mu) \neq 0$, ce qui implique aussi que, si $\lambda \in B_2^A$ vérifie $\theta(\lambda) \neq 0$, alors il existe $s \in \mathcal{E}$ tel que $\theta(s_{B_2}(\lambda)) \neq 0$ et que, si $\lambda \in B_2^A$ est non nul, alors il existe $s \in \mathcal{E}$ tel que $s_{B_2}(\lambda) \neq 0$. □

Fin de la preuve de la proposition 4.4 : On a $E \subset U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = U \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1)$. L'inclusion $U \subset B_2$ permet d'identifier E à un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel du B_2-module $W_1 = B_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1)$ et on a une suite exacte

$$0 \to V_C \to W_1 \to V_C(-1) \to 0$$

Soit V_C^0 le noyau de la projection $\varpi : V_C \to C$ induite par l'inclusion de V dans C (on a $\varpi(\sum \lambda_i \otimes v_i) = \sum \lambda_i v_i$). C'est un sous-$C$-espace vectoriel de V_C et le quotient $W_2 = W_1/V_C^0$ est un B_2-module extension de $V_C(-1)$ par C.
L'application composée $E \to U \otimes V(-1) \to W_1 \to W_2$ est injective et on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V & \to & E & \to & W & \to & 0 \\ & & \cap & & \downarrow \varphi & & \downarrow f & & \\ 0 & \to & C & \to & W_1 & \to & V_C(-1) & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Soit $E_C = C \oplus_V E$ la somme amalgamée de C et de E au-dessous de V. L'application $\varphi : E \to W_1$ s'étend de manière unique en une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante $\varphi_C : E_C \to W_1$ qui est l'identité sur C. L'image W_2 de φ_C est l'image inverse dans W_1 du sous-C-espace vectoriel $f(W)$ de $V_C(-1)$ et est donc un sous-B_2-module de W_1. En outre, φ_C est un homéomorphisme de E_C sur W_2.

L'application $\eta : E \to C$ s'étend de manière unique en une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante de E_C sur C qui est l'identité sur C. Par transport de structure, on en déduit un morphisme $\eta'_C : W_2 \to C$ de $\mathcal{B}(G_K)$ qui est l'identité sur C. D'après le théorème de pleine fidélité (th.3.11), cette application est B_2-linéaire. Autrement dit, W_2 est en fait un C-espace vectoriel de dimension 2 somme directe de C et du noyau N de η'_C. On a donc une décomposition en somme directe $W_2^A = C^A \oplus N^A = A^\theta \oplus N^A$.

Considérons l'élément $\alpha_1 = \sum_{i=1}^h \log \tilde{U}_i \otimes v'_i$ de W_1^A et notons α_2 son image dans W_2^A. Pour tout $s \in \mathcal{E}$, $s_{B_2}(\alpha_1)$ appartient à l'image de E dans W_1, donc $s_{B_2}(\alpha_2) \in W_2$. D'après le lemme 4.7, ceci implique que $\alpha_2 \in W_2^A$ et on peut écrire $\alpha_2 = \beta_2 + \gamma_2$, avec $\beta_2 \in A^\theta \subset A$ et $\gamma_2 \in N^A$. Quitte à remplacer η par $p^m\eta$, et donc aussi f par $p^m f$, avec m entier suffisamment grand, on peut supposer que $\beta_2 \in \mathcal{O}_A$.

On voit alors que $\eta(\mathcal{E}) \subset \mathcal{O}_C$ et que, pour tout $s \in \mathcal{E}$, on a $\eta(s) = s \circ \nu$, où $\nu : C\{X\} \to A$ est l'unique homomorphisme continu de C-algèbres qui envoie X sur β_2. □

Montrons alors le théorème 4.1 : Soit V' le noyau de la restriction de η à V. Quitte à remplacer E par E/V', on peut supposer $V' = 0$ et utiliser la restriction de η à V pour identifier V à un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de C. D'après la proposition précédente, η est analytique. Il suffit alors d'appliquer le lemme de Colmez (prop.4.3). □

Corollaire. — *Soit V un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, stable par G_K, de C. Soit W une C-représentation de dimension 1. Si $g : W \to C/V$ est un morphisme non nul de représentations banachiques, alors g est surjective et son noyau est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie égale à celle de V.*

En effet, si $E = C \times_{C/V} W$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V & \to & E & \to & W & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow \eta & & \downarrow g & & \\ 0 & \to & V & \to & C & \to & C/V & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme $g \neq 0$, $\eta(V) \neq \eta(E)$; mais alors η est surjectif donc aussi g et le noyau de g s'identifie au noyau de η et sa dimension sur $\mathbb{Q}_p$ est bien égale à celle de V. □

5 – La catégorie des presque C-représentations

5.1 – Le théorème de structure

On reprend les notations et conventions des §1.2 et 1.4.

Théorème 5.1. — *La catégorie $\mathcal{C}(G_K)$ est une sous-catégorie stricte de $\mathcal{B}(G_K)$. En outre, il existe deux fonctions additives sur les objets de $\mathcal{C}(G_K)$*

$$d : \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}(G_K) \to \mathbb{N} \ \textit{et}\ h : \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}(G_K) \to \mathbb{Z}$$

uniquement déterminées par $d(C) = 1$, $h(C) = 0$ et $d(V) = 0$, $h(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ pour toute représentation p-adique V.

Remarque : Nous appellerons $d(X)$ la *dimension de* X et $h(X)$ sa *hauteur.* Il est parfois commode d'utiliser la fonction additive dh : Ob $\mathcal{C}(G_K) \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ définie par $dh(X) = (d(X), h(X))$.

Preuve : Appelons *présentation* d'un objet X de $\mathcal{B}(G_K)$ un quadruplet formé d'une C-représentation triviale W, de sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie V de X et V' de W, stables par G_K, et d'un isomorphisme $\alpha : X/V \to W/V'$ (dans $\mathcal{B}(G_K)$). Un objet de $\mathcal{B}(G_K)$ admet donc une présentation si et seulement s'il est dans $\mathcal{C}(G_K)$. Appelons *objet présenté* un quintuplet $\underline{X} = (X, W, V, V', \alpha)$, où X est un objet de $\mathcal{C}(G_K)$ et (W, V, V', α) une présentation de X. On écrit aussi $\underline{X} = (\alpha : X/V \simeq W/V')$. On pose $dh(\underline{X}) = (\dim_C W, \dim_{\mathbb{Q}_p} V - \dim_{\mathbb{Q}_p} V')$; on appelle aussi X l'objet sous-jacent à $\underline{X}$.
Un *morphisme* d'objets présentés est un morphisme des objets sous-jacents. On dit qu'un morphisme $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ est *admissible* s'il est strict et s'il existe des présentations $\underline{N}$ du noyau N, $\underline{J}$ du conoyau J et $\underline{I}$ de l'image I de f telles que $dh(\underline{X}) = dh(\underline{N}) + dh(\underline{I})$ et $dh(\underline{Y}) = dh(\underline{I}) + d(h\underline{J})$.
Le théorème équivaut au résultat suivant :

Proposition 5.2. — *Tout morphisme d'objets présentés est admissible.*

Preuve : Si $\underline{X} = (X, W, V, V', \alpha)$ est un objet présenté et si U est une sous-représentation de X de dimension finie, on note $\underline{X}/U$ l'objet présenté $(X/U, W, \tilde{V}, \tilde{V}', \tilde{\alpha})$, où $\tilde{V} = U + V/U$, $\tilde{V}' = \{w \in W \mid w \bmod V' \in \alpha(U + V)\}$ et $\tilde{\alpha}$ est l'application déduite de α par passage au quotient.

Lemme 5.3. — *Soient $f : \underline{X} \to \underline{Y}$ un morphisme d'objets présentés, U une sous-représentation de dimension finie de X, U' une sous-représentation de dimension finie de Y contenant $f(U)$ et $\tilde{f} : \underline{X}/U \to \underline{Y}/U'$ le morphisme d'objets présentés déduit de f par passage aux quotients. Alors f est admissible si et seulement si $\tilde{f}$ est admissible.*

Preuve : Exercice. □

Lemme 5.4. — *Soient $m, h, d \in \mathbb{N}$. Soient E une représentation banachique extension d'une C-représentation triviale X de dimension m par une représentation p-adique V de dimension h, W une C-représentation triviale de dimension d et $f : E \to W$ un morphisme de $\mathcal{C}(G_K)$. Alors f est strict et il existe des présentations $\underline{N}$ du noyau N, $\underline{J}$ du conoyau J et $\underline{I}$ de l'image I de f telles que $dh(\underline{N}) + dh(\underline{I}) = (m, h)$ et $dh(\underline{I}) + dh(\underline{J}) = (d, 0)$.*

Montrons d'abord comment la proposition résulte des lemmes 5.3 *et* 5.4 : Soit f : $(X_1, W_1, V_1, V_1', \alpha_1) \to (X_2, W_2, V_2, V_2', \alpha_2)$ un morphisme d'objets présentés. Pour $i \in \{1,2\}$, soit $\underline{W}_i = (W_i, W_i, 0, 0, \mathrm{id}_{W_i})$. Posons $E_1 = W_1 \times_{X_2/f(V_1)} X_2$. On a une suite exacte

$$0 \to f(V_1) \to E_1 \to W_1 \to 0$$

et on pose $\underline{E}_1 = (E_1, W_1, f(V_1), 0, \mathrm{proj.can.})$. Posons $F_1 = E_1 \times_{X_2/V_2} W_2$. On a des suites exactes

$$0 \to V_2' \to F_1 \to E_1 \to 0$$

et, si l'on note V' l'image inverse de $f(V_1)$ dans F_1,

$$0 \to V' \to F_1 \to W_1 \to 0$$

et on pose $\underline{F}_1 = (F_1, W_1, V', 0, \mathrm{proj.can.})$.
On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\underline{X}_1 & \to & \underline{X}_1/V_1 & \leftarrow & \underline{W}_1 & \leftarrow & \underline{E}_1 & = & \underline{E}_1 & \leftarrow & \underline{F}_1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\underline{X}_2 & \to & \underline{X}_2/f(V_1) & = & \underline{X}_2/f(V_1) & \leftarrow & \underline{X}_2 & \to & \underline{X}_2/V_2 & \leftarrow & \underline{W}_2
\end{array}$$

La flèche verticale de droite est admissible d'après le lemme 5.4. En appliquant cinq fois de suite le lemme 5.3, on en déduit que toutes les flèches verticales le sont. □

Prouvons alors le lemme 5.4 : On va procéder par induction sur d, le cas $d = 0$ étant trivial. Supposons donc $d \geq 1$.
Considérons une suite finie

$$W = F^0W \supset F^1W \supset \ldots \supset F^iW \supset F^{i+1}W \supset \ldots \supset F^rW$$

de sous-C-espaces vectoriels de W, stables par G_K, avec F^iW de codimension i. Pour chaque entier i, notons F^iE l'image inverse par f de F^iW, $f_i : F^iE \to F^iW$ la restriction de f, et, lorsque $i < r$, $gr_iW = F^iW/F^{i+1}W$ et $\overline{f}_i : F^iE \to gr^iW$ le composé de f_i avec la projection de F^iW sur gr^iW.
On se propose de construire une telle suite, ainsi que de se donner pour chaque i, une suite exacte de $\mathcal{C}(G_K)$

$$0 \to V_i \to F^iE \to X_i \to 0$$

où V_i est une représentation p-adique de dimension h et X_i une C-représentation triviale de dimension $m - i$ (ceci implique a posteriori que l'on aura $r \leq m$).
On procède inductivement :
a) On doit avoir $F^0W = W$ et $F^0E = E$; on prend $V_0 = V$ et $X_0 = X$.
b) Soit $i \geq 0$ et supposons F^iW, F^iE, V_i et X_i construits :

– si $f_i(F^iE)$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, on prend $r = i$ (remarquer que c'est nécessairement le cas si $i = m$ ou si $i = d$) ;
– sinon, soient $e_1, e_2, \ldots, e_{d-i}$ une base de F^iW formée d'éléments fixes par G_K. Pour $s = 1, 2, \ldots, d-i$, soit H_s l'hyperplan de de F^iW engendré par les e_j avec $j \neq s$. Comme $f_i(F^iE)$ s'injecte dans $\oplus_{s=1}^{d-i} F^iW/H_s$, il existe un entier s tel que l'image de $f_i(F^iE)$ dans F^iW/H_s n'est pas de dimension finie. On choisit pour $F^{i+1}W$ un tel H_s. Avec les notations qui précèdent, on a $\overline{f}_i(F^iE) \neq \overline{f}_i(V_i)$. Décomposons X_i en une somme directe $X_i = \oplus_{j=1}^{m-i} L_j$ de C-droites stables par G_K et notons E_j l'image inverse de L_j dans F^iE. On a $F^iE = \sum_{j=1}^{m-i} E_j$, donc $\overline{f}_i(F^iE) = \sum \overline{f}_i(E_j)$ et il existe j tel que $\overline{f}_i(E_j) \neq \overline{f}_i(V_i)$. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer $j = 1$. Le choix d'une base de $L_1^{G_K}$ et d'une base de $(gr^iW)^{G_K}$ permet d'identifier le sous-espace fermé E_1 de F^iE à une extension de C par V_i et le quotient gr^iW à C. En appliquant le théorème 4.1 à la restriction g_i de $\overline{f}_i$ à E_1, on voit que g_i *est surjective* et que le noyau V_{i+1} de g_i est une représentation p-adique de dimension h.
Soit X_{i+1} la C-représentation de dimension $m - i - 1$ qui est le quotient de X_i par L_1. Dans $\mathcal{C}(G_K)$, on a une suite exacte

$$0 \to E_1 \to F^iE \to X_{i+1} \to 0$$

Comme g_i est surjective, $\overline{f}_i$ l'est aussi et est donc un épimorphisme strict. Comme $F^{i+1}E$ est le noyau de $\overline{f}_i$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & V_{i+1} & \to & F^{i+1}E & \to & X_{i+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & E_1 & \to & F^iE & \to & X_{i+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_i} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{f}_i} & & & & \\
 & & \mathrm{gr}^iW & = & \mathrm{gr}^iW & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes, ce qui achève la construction au rang $i + 1$.
Soient V'_r le noyau de la restriction de f_r à V_r et $V''_r = f_r(V_r)$. Si $h' = \dim_{\mathbb{Q}_p} V'_r$ et $h'' = \dim_{\mathbb{Q}_p} V''_r$, on a $h = h' + h''$.
Comme $f_r(F^rE)$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, l'application f_r induit un morphisme de $\mathcal{C}(G_K)$ de la C-représentation X_r sur la représentation p-adique $f_r(F^rE)/V''_r$. D'après le corollaire au théorème 3.11, ce morphisme est nul et on a $f_r(F^rE) = V''_r$.
En particulier, on peut considérer f_r comme un épimorphisme strict de F^rE sur V''_r. Par construction le noyau (en tant qu'application linéaire) de f est aussi le noyau N de f_r et a donc une structure naturelle d'objet de $\mathcal{C}(G_K)$.

Dans cette dernière catégorie, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & V_r' & \to & N & \to & W_r & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & V_r & \to & F^rE & \to & W_r & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & V_r'' & = & V_r'' & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes. Ceci nous permet aussi de munir N d'une structure d'objet de $\mathcal{C}(G_K)$ muni d'une présentation $\underline{N}$ vérifiant $dh(\underline{N}) = (m-r, h')$.

Par construction l'application de E dans W/F^rW composée de f avec la projection de W sur W/F^rW est surjective et, si I désigne l'image ensembliste de l'application f, on a donc une suite exacte

$$0 \to V_r'' \to I \to W/F^rW \to 0$$

Si l'on munit I de la topologie induite par celle de W, on voit que I est fermé dans W et que la suite exacte ci-dessus donne à I une structure d'objet de $\mathcal{C}(G_K)$ muni d'une présentation $\underline{I}$ vérifiant $dh(\underline{I}) = (r, h'')$.

De même, comme f induit un isomorphisme de E/F^rE sur W/F^rW, le conoyau (au sens des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels) J de f s'identifie à celui de f_r donc au quotient de F^rW par V_r'' et est donc aussi muni d'une présentation $\underline{J}$ vérifiant $dh(\underline{J}) = (d-r, -h'')$.

Dans $\mathcal{C}(G_K)$, on a des suites exactes courtes

$$0 \to N \to E \to I \to 0$$

$$\text{et } 0 \to I \to W \to J \to 0$$

ce qui montre que f est strict et, comme $(m,h) = (m-r,h') + (r,h'')$ et $(d,0) = (r,h'') + (d-r,-h'')$ que f est admissible. □

5.2 – Toute suite exacte courte de presque C-représentations est presque scindée

Proposition 5.5. — *Soit W une C-représentation triviale et X un sous-objet de W dans $\mathcal{C}(G_K)$. Alors il existe un presque supplémentaire W' de X dans W qui est un sous-C-espace vectoriel.*

Preuve : Comme W est une C-représentation triviale, tout sous-C-espace vectoriel de W stable par G_K est encore une C-représentation triviale.

Soit W' un sous-C-espace vectoriel de W stable par G_K tel que l'application composée $X \subset W \to W/W'$ est surjective et qui est minimal pour cette propriété. Alors X est une extension de $W'' = W/W'$ par $X' = X \cap W'$. Si H est un hyperplan de W' stable par G_K, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & X' & \to & X & \to & W'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & W'/H & \to & W/H & \to & W'' & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Comme l'application $X \to W/H$ n'est pas surjective, $X' \to W'/H$ ne l'est pas non plus. comme $W'/H \simeq C$, l'image I de cette application est isomorphe à un sous-objet de C dans la catégorie $\mathcal{B}(G_K)$, distinct de C ; on a donc $d(I) = 0$ et I est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Si l'on choisit une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ de W' sur C formée d'éléments fixes par G_K et si, pour $1 \leq i \leq r$, on note H_i l'hyperplan de W' de base les e_j avec $j \neq i$, la projection X'_i de X' sur W'/H_i est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Comme X' s'injecte dans la somme directe des X'_i, c'est aussi un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. □

Corollaire. — *Soit*

$$0 \to S' \to S \to S'' \to 0$$

une suite exacte courte de représentations banachiques avec S' et S'' des presque-C-représentations. Pour que S soit une presque C-représentation, il faut et il suffit que cette suite soit presque scindée.

Preuve : Il est clair que la condition est suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire : Si S est une presque C-représentation, on peut trouver un isomorhisme $S/V_0 \simeq W/V$ avec W une C-représentation triviale et V_0 et V des représentations p-adiques de dimension finie. Quitte à remplacer S par S/V_0 et S' et S'' par les quotients correspondants, on peut supposer $V_0 = 0$. Quitte à remplacer S par W et S' par le produit fibré $S' \times_S W$, on peut supposer $S = W$. D'après la proposition, il existe un sous-C-espace vectoriel W' de W tel que $S = W = W' + S'$ tandis que $V' = S' \cap W'$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Autrement dit W' est un presque-supplémentaire de S' dans S et la suite est presque scindée.

5.3 – Toute suite exacte courte de B_{dR}^+-représentations est presque scindée

Pour prouver cette affirmation, nous aurons besoin de pouvoir tordre l'action de G_K par des caractères à valeurs dans K^*. C'est pourquoi nous allons établir un resultat apparemment plus fort.

Si W est une B_{dR}^+-représentation et Y un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel fermé de X, stable par G_K, un *K-presque supplémentaire de Y dans X* est un presque supplémentaire qui est un sous-K-espace vectoriel. On dit qu'une suite exacte courte

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

de B_{dR}^{+}-représentations est *K-presque scindée* si W' admet un K-presque supplémentaire dans W. Il revient au même de dire qu'il existe un sous-K-espace vectoriel de dimension finie V de W' stable par G_K et une section K-linéaire G_K-équivariante de la projection de W/V sur W''.

THÉORÈME 5.6. — *Soit*

$$(*) \qquad 0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

une suite exacte courte de $\mathcal{B}(G_K)$ avec W' et W'' des B_{dR}^{+}-représentations de G_K. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) la suite (1) *est presque scindée,*
ii) la suite (1) *est K-presque scindée,*
iii) la représentation W est une B_{dR}^{+}-représentation.

Commençons par établir quelques lemmes.

LEMME 5.7. — *Soit*

$$\begin{array}{lcccccccccc}
 & & & & & (1) & & (2) & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(3) & 0 & \to & Y' & \to & X & \to & X'' & \to & 0 \\
 & & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(4) & 0 & \to & Y' & \to & Y & \to & Y'' & \to & 0 \\
 & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & Z & = & Z & & \\
 & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

un diagramme commutatif de B_{dR}^{+}-représentations dont les lignes et les colonnes sont exactes.
i) Si les suites (2) et (4) sont K-presque scindées, alors (1) l'est aussi,
ii) Si (1) et (3) sont K-presque scindées, alors (4) l'est aussi.

Preuve : i) Soient E'' un K-presque supplémentaire de X'' dans Y'' et F un K-presque supplémentaire de Y' dans Y. L'image inverse de E'' dans F est un K-presque supplémentaire de Y dans X.
ii) Soient E_1 un K-presque supplémentaire de X dans Y et E_2 un K-presque supplémentaire de Y' dans X. Alors $E_1 + E_2$ somme est un K-presque supplémentaire de Y dans X. □

LEMME 5.8. — *Supposons qu'il existe une extension finie L de K contenue dans $\overline{K}$ telle que $(*)$ est L-presque scindée en tant que suite exacte de B_{dR}^{+}-représentation de G_L. Alors $(*)$ est K-presque scindée.*

Preuve : Soient $g_1, g_2, \ldots, g_n$ des représentants dans G_K des classes à gauche de G_K suivant G_L. Par hypothèse, il existe un sous-L-espace vectoriel V de W' stable par G_L et de dimension finie et une section L-linéaire $s_0 : W'' \to W/V$

de la projection de W/V sur W'' qui commute à l'action de G_L. Quitte à remplacer V par $\sum_{i=1}^n g_i(V)$, on peut supposer que V est stable par G_K. On voit que l'application $s : W'' \to W/V$ définie par

$$s(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i(s_0(g_i^{-1}(x))$$

est une section K-linéaire G_K-équivariante de la projection de W sur W''. $\square$

Lemme 5.9. — *Pour tout entier $m \geq 1$ la suite exacte*

$$0 \to B_{m-1}(1) \to B_m \to C \to 0$$

est K-presque scindée.

Preuve : Soient T_K le module de Tate d'un groupe formel de Lubin-Tate pour K (cf., par exemple [Se67b], §3.3) et $V_K = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_K$. C'est un K-espace vectoriel de dimension 1 sur lequel G_K opère via un caractère dont la restriction à l'inertie est l'inverse de celui donné par la théorie du corps de classes. La représentation V_K est de Hodge-Tate ([Se89], chap.III, §1 et appendice) : si W_0 désigne le noyau de l'application $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_K \to C \otimes_K V_K$, la suite exacte

$$0 \to W_0 \to C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_K \to C \otimes_K V_K \to 0$$

est canoniquement scindée, $C \otimes_K V_K \simeq C(1)$ et $W_0 \simeq C^{[K:\mathbb{Q}_p]-1}$. Le choix d'un isomorphisme de $C \otimes_K V_K$ sur $C(1)$ définit une application K-linéaire injective G_K-équivariante $\iota_0 : V_K \to C(1)$. Celle-ci se relève de façon unique en une application K-linéaire G_K-équivariante $\iota : V_K \to \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$: cela résulte de ce que la représentation V_K est de de Rham, mais aussi, plus simplement, de ce que, pour $n = 0, 1$,

$$\mathrm{Ext}^n(V_K, C(m)) = H^n_{\mathrm{cont}}(K, V_K^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(m)) \simeq \\ H^n_{\mathrm{cont}}(K, C(m-1) \oplus C(m)^{[K:\mathbb{Q}_p]-1}) = 0$$

pour tout entier $m \geq 2$, ce qui montre que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(V_K, B_{m+1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(V_K, B_m)$$

est bijective. En tensorisant la suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \to U(-1) \to C(-1) \to 0$$

avec V_K, on obtient une suite exacte

$$0 \to V_K \to U(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_K \to C(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_K \to 0$$

Notons U_K l'image inverse de $C(-1) \otimes_K V_K$ dans $U(-1) \otimes_K V_K$.

Soit $\hat{\iota} : U_K \to B_{dR}^+$ le composé de l'inclusion de U_K dans $U(-1) \otimes V_K$ avec l'application $ut^{-1} \otimes v \mapsto ut^{-1}\iota(v)$ et soit $\iota_C(-1) : C(-1) \otimes_K \to C$ l'application $ct^{-1} \mapsto c\iota(v) \otimes t^{-1}$. Dans $\mathcal{C}(G_K)$ a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_K & \to & U_K & \to & C \otimes_K V_K & \to & 0 \\ & & \downarrow \iota & & \downarrow \hat{\iota} & & \downarrow \iota_C(-1) & & \\ 0 & \to & \mathrm{Fil}^1 B_{dR}^+ & \to & B_{dR}^+ & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

dans lequel toutes les applications sont K-linéaires. Comme la flèche verticale de droite est un isomorphisme, pour tout entier $m \geq 1$, l'image de U_K dans $B_m = B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^m B_{dR}$ est un K-presque supplémentaire de $B_{m-1}(1)$ dans B_m. □

Lemme 5.10. — *La suite*

$$0 \to C \to C_2 \to C \to 0$$

est K-presque scindée.

Preuve : Choisissons une extension non triviale V_1 de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p$. Rappelons (prop.3.10) que $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ s'identifie à $C \oplus C(1)$ de sorte que la suite exacte

$$0 \to C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \to B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \to C(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \to 0$$

peut se réécrire

$$0 \to C \oplus C(1) \to B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \to C(-1) \oplus C \to 0$$

Soit $\widehat{W}_1$ l'image inverse de C dans $B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ Le quotient W_1 de $\widehat{W}_1$ par $C(1)$ est une B_{dR}^+-représentation, extension de C par C.
Pour $n = 0, 1$, on a $H^n_{\mathrm{cont}}(K, C(1)) = 0$, et la suite exacte

$$0 \to C(1) \to \widehat{W}_1 \to W_1 \to 0$$

induit un isomorphisme $\widehat{W}_1^{G_K} \to W_1^{G_K}$. Si l'extension W_1 de C par C était scindée, on aurait donc $\dim_K \widehat{W}_1^{G_K} = 2$, ce qui, comme $\widehat{W}_1 \subset B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ contredit le fait que $\dim_K (B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1)^{G_K} = 1$ (prop.3.10). La proposition 2.15 implique alors que $W_1 \simeq C_2$ et il suffit de vérifier que la suite exacte

$$0 \to C \to W_1 \to C \to 0$$

est K-presque scindée.
D'après le lemme 5.9, la suite exacte

$$0 \to C(1) \to B_2 \to C \to 0$$

est K-presque-scindée. Si U_K est un K-presque supplémentaire de $C(1)$ dans B_2, alors $U_K(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ est un presque K-supplémentaire de $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ dans $B_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$, donc $\widehat{E}_1 = (U_K(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1) \cap \widehat{W}_1$ est un presque K-supplémentaire de $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ dans $\widehat{W}_1$ et l'image de $\widehat{E}_1$ dans W_1 est un presque-K-supplémentaire de C dans W_1. □

Lemme 5.11. — *Pour tout entier $r \geq 2$, la suite*

$$0 \to C_{r-1} \to C_r \to C \to 0$$

est K-presque scindée.

Preuve : Pour $r = 2$, c'est le lemme précédent et la démonstration pour $r \geq 3$ est très voisine. Rappelons (§2.5) que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $C_m = C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_m$ où T_m est le $\mathbb{Z}_p$-espace vectoriel des polynômes de degré $< m$ en l'indéterminée $\log t$. En particulier $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_1 = \mathbb{Q}_p$ et on a une suite eaxcte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes T_{r-2} \to \mathbb{Q}_p \otimes T_{r-1} \to \mathbb{Q}_p \to 0$$

(où $(\log t)^{r-2}$ s'envoie sur 1).
Soit V_1 comme dans la preuve du lemme précédent. Comme le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p(1), \mathbb{Q}_p)) = H^2_{\mathrm{cont}}(G_K, \mathbb{Q}_p(-1))$ est le dual de $H^0(G_K, \mathbb{Q}_p(2))$ (cf. §3.1), il est nul ; par dévissage, on en déduit que $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p(1), \mathbb{Q}_p \otimes T_{r-2})) = 0$. Par conséquent, l'application naturelle

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p(1), \mathbb{Q}_p \otimes T_{r-1}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p(1), \mathbb{Q}_p)$$

est surjective, ce qui nous permet de choisir une extension V de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p \otimes T_{r-1}$ qui relève V_1, i.e. qui est munie d'une identification de $V/(\mathbb{Q}_p \otimes T_{r-2})$ à V_1.
La suite exacte

$$0 \to \mathbb{Q}_p \otimes T_{r-1} \to V \to \mathbb{Q}_p(1) \to 0$$

induit, par extension des scalaires à C, une suite exacte de C-représentations

$$0 \to C_{r-1} \to V_C \to C(1) \to 0$$

On a $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C(1), C) = \mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C(1), C) = 0$, on en déduit par dévissage que $\mathrm{Hom}_{C[G_K]}(C(1), C_{r-1}) = \mathrm{Ext}^1_{C[G_K]}(C(1), C_{r-1}) = 0$, la suite exacte précédente est canoniquement scindée ce qui nous permet d'identifier V_C à $C_{r-1} \oplus C(1)$ et $V_C(-1)$ à $C_{r-1}(-1) \oplus C$. La suite exacte

$$0 \to C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to C(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0$$

peut donc se réécrire

$$0 \to C_{r-1} \oplus C(1) \to B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to C_{r-1}(-1) \oplus C \to 0$$

Soient $\widehat{W}$ l'image inverse de C dans $B_2(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et W le quotient de $\widehat{W}$ par $C(1)$. C'est une B^+_{dR}-représentation extension de C par C_{r-1}. Cette extension est non scindée car le quotient de W par C_{r-2} s'identifie à l'extension, non scindée, W_1 de C par C considérée dans la preuve du lemmme précédent. L'assertion (Bi) du théorème 2.14 montre que le K-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1_{B_{dR}^+[G_K]}(C, C_{r-1})$ est de dimension 1. Il en résulte que W est isomorphe à C_r et il suffit de vérifier que la suite exacte

$$0 \to C_{r-1} \to W \to C \to 0$$

est presque scindée.

Si U_K est comme dans la preuve du lemme précédent, $U_K(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ est un presque K-supplémentaire de $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ dans $B_2 \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$, donc $\widehat{E} = (U_K(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) \cap \widehat{W}$ est un presque K-supplémentaire de $C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ dans $\widehat{W}$ et l'image de $\widehat{E}$ dans W est un presque-K-supplémentaire de C_{r-1} dans W. □

Pour $m, r \in \mathbb{N}$, posons $B_{m,r} = B_m \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_r$. C'est une B_{dR}^+-représentation et, si $m \geq 1$, en tensorisant avec T_r la suite exacte

$$0 \to B_{m-1}(1) \to B_m \to C \to 0$$

on obtient une autre suite exacte

$$0 \to B_{m-1,r}(1) \to B_{m,r} \to C_r \to 0$$

Lemme 5.12. — *Soient m et n des entiers > 0 et soit $B'_{m,r}$ le noyau du composé de la projection de $B_{m,r}$ sur C_r avec la projection de C_r sur C. Les suites exactes*

$$0 \to B_{m-1,r}(1) \to B_{m,r} \to C_r \to 0$$
$$0 \to B'_{m,r} \to B_{m,r} \to C \to 0$$

sont K-presque scindées.

Preuve : On peut supposer $m \geq 2$. On peut (lemme 5.9) trouver un K-presque supplémentaire U_K de $B_{m-1}(1)$ dans B_m ; si $V_K = B_{m-1}(1) \cap U_K$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_K \otimes T_r & \to & U_K \otimes T_r & \to & C_r & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & B_{m-1,r}(1) & \to & B_{m,r} & \to & C_r & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes et $U_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_r$ est un K-presque supplémentaire de $B_{m-1,r}(1)$ dans $B_{m,r}$.

On a un diagramme commutatif de B_{dR}^+-représentations

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B_{m-1,1}(1) & \to & B'_{m,r} & \to & C_{r-1} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B_{m-1,1}(1) & \to & B_{m,r} & \to & C_r & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & C & = & C & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes. On vient de voir que

$$0 \to B_{m-1,r}(1) \to B_{m,r} \to C_r \to 0$$

est K-presque scindée et

$$0 \to C_{r-1} \to C_r \to C \to 0$$

l'est aussi (lemme 5.11). Donc (lemme 5.7, (i))

$$0 \to B'_{m,r} \to B_{m,r} \to C \to 0$$

l'est aussi. □

Prouvons alors le théorème : L'implication (ii)⇒(i) est triviale et on sait (prop.3.14) que (i)⇒(iii). Il suffit donc de prouver que, si

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

est une suite exacte courte de $\mathcal{B}(G_K)$, alors W' admet un K-presque supplémentaire dans W.

Quitte à remplacer K par une extension finie convenable (ce qui est possible grâce au lemme 5.8), on peut supposer que W est petite, ce qui implique que W' et W'' le sont aussi. La décomposition $W = \oplus_{A \in \overline{\mathfrak{a}}_K} W_A$ de W suivant les orbites de $\mathfrak{a}_K$ sous l'action de $\mathbb{Z}$ (cf. remarque à la fin du §2.3) induit une décomposition en somme directe de la suite exacte, ce qui nous permet de supposer que tous les W_A sauf l'un d'entre eux sont nuls. Autrement dit, il existe $\alpha \in \mathfrak{a}_K$ tel que les valeurs propres de ∇_0 agissant sur W^f sont dans $\alpha + \mathbb{Z}$. Quitte à tordre l'action de W sur G_K par le caractère $\chi^{(-\alpha)}$ qui est à valeurs dans K^*, on peut supposer que $\alpha = 0$, i.e. que W est un objet de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},\mathbb{Z}}(G_K)$.

On procède alors par récurrence sur la longeur d'' de la B^+_{dR}-représentation W'' qui, puisque W'' est petite, est aussi sa longeur en tant que B^+_{dR}-module.

Si $d'' = 1$, W'' objet simple de la catégorie $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR},\mathbb{Z}}(G_K)$ est isomorphe à $C(i)$ pour $i \in \mathbb{Z}$ un entier convenable. Quitte à tordre l'action de G_K sur W par le caractère χ^{-i}, on peut supposer que $W'' = C$.

Avec les notations du §2.5 on a $W_{(\mathbb{Z})} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}} W_{(i)}$, $W = B^+_{dR} \otimes_{K[[\underline{t}]]} W_{(\mathbb{Z})}$. En outre $W_{(\mathbb{Z})}$ est stable par ∇_0, de même que chaque $W_{(i)}$ et la restriction de ∇_0 à $W_{(0)}$ est nilpotente. On voit aussi que $1 \in C$ a un relèvement e dans $W_{(0)}$. Il existe alors des entiers m et r tels que $t^m e = \nabla_0^r e = 0$. Il est alors facile de voir qu'il existe un unique homomorphisme de B^+_{dR}-représentations $\eta : B_{m,r} \to C$ qui envoie $1 \otimes (\log t)^{r-1}$ sur e. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B'_{m,r} & \to & B_{m,r} & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & W' & \to & W & \to & C & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. D'après le lemme 5.12, celle du haut est K-presque scindée ; celle du bas l'est a fortiori.

On peut maintenant appliquer l'hyopthèse de récurrence et supposer $d'' \geq 2$. Il existe donc une suite exacte courte non triviale de B_{dR}^{+}-représentations

$$0 \to W_1'' \to W'' \to W_2'' \to 0$$

Si W_1 désigne l'image inverse de W_1'' dans W, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & W' & \to & W_1 & \to & W_1'' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & W' & \to & W & \to & W'' & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & W_2'' & = & W_2'' & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

de B_{dR}^{+}-représentations dont les lignes et les colonnes sont exactes. Par hypothèse de récurrence, les suites exactes

$$0 \to W_1 \to W \to W_2'' \to 0$$
et
$$0 \to W' \to W_1 \to W_1'' \to 0$$

sont K-presque scindées. L'assertion (ii) du lemme 5.7 implique que

$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$

l'est aussi. □

5.4 – Toute B_{dR}^{+}-représentation est presque triviale

THÉORÈME 5.13. — *Soient $d \in \mathbb{N}$ et W une B_{dR}^{+}-représentation de G_K de longueur d en tant que B_{dR}^{+}-module. Alors W est presque isomorphe à C^d.*

Preuve : Soit
$$0 \to W' \to W \to W'' \to 0$$
une suite exacte courte de B_{dR}^{+}-représentations. Comme cette suite est presque scindée, il existe un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie V, stable par G_K, tel que $W/V \simeq (W'/V) \oplus W''$ et W est presqu'isomorphe à $W' \oplus W''$. Si W' et W'' sont presque triviales, il en est donc de même de W et il suffit de prouver le théorème lorsque W est un objet simple de la catégorie des B_{dR}^{+}-représentations.

Supposons d'abord que W est petite. On peut supposer (prop.2.5) que $W = C\{\alpha\}$, avec α un élément K-petit convenable.

Il s'agit de montrer que W est presqu'isomorphe à C. On peut supposer $\alpha \notin \{0,-1\}$ (dans le premier cas, parce qu'alors, il n'y a rien à prouver, dans le second, parce que, si le théorème est vrai pour $\alpha = 1$, cela veut dire qu'il existe des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie V de $C(1)$ et V' de C, stables par G_K et un isomorphisme $C(1)/V \to C/V'$; en tensorisant par $\mathbb{Q}_p(-1)$, on obtient un isomorphisme $C/V(-1) \to C(-1)/V'(-1)$, donc $C(-1)$ et C sont presqu'isomorphes).

Appelons *K-représentation* la donnée d'un K-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire et continue de G_K. Autrement dit, c'est une représentation p-adique muni d'un plongement de K dans la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de ses endomorphismes. Le sous-K-espace vectoriel $K\{\alpha\}$ de $C\{\alpha\}$ est une K-représentation. Soit V une K-représentation, extension non triviale de $K\{\alpha+1\}$ par K (muni de l'action triviale de G_K). En tensorisant, au dessus de K, la suite exacte

$$0 \to K \to V \to K\{\alpha+1\} \to 0$$

avec C, on obtient une suite exacte de C-représentations

$$0 \to C \to C \otimes_K V \to C\{\alpha+1\} \to 0$$

Cette suite est scindée. En effet, comme $\alpha \neq -1$, $C\{\alpha+1\}$ est un objet simple de $\mathrm{Rep}_C(G_K)$ qui n'est pas isomorphe à C et il n'y a donc pas de C-représentation extension non triviale de $C\{\alpha+1\}$ par C (prop.2.15). Ceci nous permet en particulier d'étendre l'inclusion $K \subset C$ en un K-plongement de V dans C et de définir un plongement $\iota : W \to C(-1)\otimes_K V$. Comme $C(-1)\otimes_K V$ est un facteur direct de $C(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V = V_C(-1)$, on peut aussi voir ι comme un homomorphisme non nul de W dans $V_C(-1)$.

La suite exacte

$$0 \to V \to C \to C/V \to 0$$

induit une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,C/V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,C)$$

Comme W est un objet simple de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$ qui n'est isomorphe ni à C ni à $C(-1)$, pour $i = 0,1$, on a $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{B}(G_K)}(W,C) = \mathrm{Ext}^i_{B^+_{dR}[G_K]}(W,C) = 0$ (prop.2.15) et l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,C/V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)$ est bijective. Comme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(G_K)}(W,V_C(-1))$ (prop.3.12), l'application ι induit un morphisme non nul de W dans C/V. D'après le corollaire au théorème 4.1, cette application est surjective et son noyau est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Par conséquent, W et C sont presqu'isomorphes.

Passons maintenant au cas général. Choisissons une extension finie L de K contenue dans $\bar{K}$ telle que W soit petite en tant que B^+_{dR}-représentation de $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Soit S un facteur simple de W (en tant que B^+_{dR}-représentation de G_L).

Pour tout objet X de $\mathcal{B}(G_L)$, on note $IX = \mathbb{Q}_p[G_K] \otimes_{\mathbb{Q}_p[G_L]} X$ l'objet de $\mathcal{B}(G_K)$ induit. Si X est une C-représentation de G_L, IX est de façon naturelle une C-représentation de G_K. La simplicité de W implique que W est isomorphe à un facteur direct de IS. On fixe un plongement de W dans IS.
D'après la première partie, S est presqu'isomorphe à C. On peut donc trouver une représentation banachique X de G_L extension de S par une représentation p-adique V_0 de dimension finie et un morphisme surjectif $X \to C$ de $\mathcal{B}(G_L)$ dont le noyau V_1 est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Les suites exactes

$$0 \to V_0 \to X \to S \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to V_1 \to X \to C \to 0$$

induisent des suites exacte

$$0 \to IV_0 \to IX \to IS \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to IV_1 \to IX \to IC \to 0$$

de $\mathcal{B}(G_K)$ et IC est une C-représentation triviale de G_K. Soit E l'image inverse de W dans X. Alors W est presqu'isomorphe à E qui est presqu'isomorphe à son image Y dans IC et il suffit, pour achever la démonstration, d'établir le lemme suivant :

Lemme 5.14. — *Soit $d = \dim_C W$. L'image Y de E dans IC est isomorphe à une extension d'une C-représentation triviale de dimension d par une représentation p-adique de dimension finie.*

Preuve : C'est essentiellement la même que celle de la proposition 5.1 Pour plus de clarté, nous la reproduisons avec les modifications nécessaires.
Soit W' un sous-C-espace vectoriel de IC stable par G_K tel que l'application composée $Y \subset IC \to IC/W'$ est surjective et qui est minimal pour cette propriété. Alors Y est une extension de $W'' = IC/W'$ par $Y' = Y \cap W'$. Si H est un hyperplan de W' stable par G_K, comme l'application composée $Y \subset IC \to IC/H$ n'est pas surjective, l'application $j_H : Y' \subset W' \to W'/H$ ne l'est pas non plus.
Comme S est presqu'isomorphe à C, c'est un objet de $\mathcal{C}(G_L)$. Considérés comme des objets de $\mathcal{B}(G_L)$, IS, W, E, Y et Y' sont des objets de $\mathcal{C}(G_L)$. Comme $W'/H \simeq C$, l'image de j_H est isomorphe, dans la catégorie $\mathcal{C}(G_L)$, à un sous-objet de C distinct de C et est donc de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Si l'on choisit une base $\{e_1, e_2, \ldots, e_r\}$ de W' sur C formée d'éléments fixes par G_K et si, pour $1 \leq i \leq r$, on note H_i l'hyperplan de W' de base les e_j avec $j \neq i$, la projection Y'_i de Y' sur W'/H_i est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Comme Y' s'injecte dans la somme directe des Y'_i, c'est aussi un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Par conséquent Y s'identifie à une extension de la C-représentation triviale W'' par la représentation p-adique de dimension finie Y'. Pour vérifier que $\dim_C W'' = d$, il suffit de restreindre l'action de G_K à G_L et cela résulte de ce que le théorème est déjà prouvé pour les petites représentations. □

Corollaire. — *Soit X une représentation banachique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) la représentation X est presqu'isomorphe à une C-représentation triviale,
ii) la représentation X est presqu'isomorphe à une C-représentation,
iii) la représentation X est presqu'isomorphe à une B_{dR}^+-représentation.

6 – Calcul des groupes d'extensions

Rappelons que, si W' et W'' sont deux objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}}(W'', W')$ le groupe des classes de n-extensions de Yoneda de W'' par W'.
Les objectifs essentiels de ce paragraphe sont :
i) La preuve du théorème suivant :

Théorème 6.1. — *Soient X et Y deux objets de $\mathcal{C}(G_K)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriel $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) = 0$ est de dimension finie et est nul si $n \geq 3$. On a*

$$\sum_{i=0}^{2} \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) = -[K:\mathbb{Q}_p]h(X)h(Y)$$

ii) La construction d'une dualité entre $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$ et $\mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(Y,X(1))$ (prop.6.8 et 6.10 ci-dessous).

6.1 – Propriétés d'invariance des Ext^n

On dit qu'un complexe de $\mathcal{C}(G_K)$

$$(X) \qquad \ldots \to X^{i-1} \xrightarrow{\delta_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{\delta_X^i} X^{i+1} \to \ldots$$

est *presque trivial* si, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ l'image de δ^i_X est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie.
Par ailleurs, pour toute catégorie abélienne $\mathcal{A}$ et tout entier $n \geq 1$, on note $C_n(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les complexes (X) de $\mathcal{A}$ vérifiant $X^i = 0$ si $i < 0$ ou si $i \geq n$ et les flèches les morphismes de complexes.

Proposition 6.2. — *Soit n un entier ≥ 1.*
i) Si (X) est un complexe de $C_n(\mathcal{C}(G_K))$, il existe un couple $((E),\eta)$ formé d'un complexe (E) presque trivial de $C_n(\mathcal{C}(G_K))$ et d'un morphisme $\eta : (E) \to (X)$ qui est un quasi-isomorphisme.
ii) Pour tout morphisme $\alpha : (X) \to (Y)$ de $C_n(\mathcal{C}(G_K))$, on peut trouver un diagramme commutatif de $C_n(\mathcal{C}(G_K))$

$$\begin{array}{ccc} (E) & \to & (X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (F) & \to & (Y) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes et où (E) et (F) sont presque triviaux.

Lemme 6.3. — *Soient* (X) *un complexe de* $\mathcal{C}(G_K)$ *et* $i \in \mathbb{Z}$. *Il existe un sous-complexe* (Y) *de* (X) *tel que*
i) l'inclusion de (Y) *dans* (X) *induit un quasi-isomorphisme,*
ii) on a $Y^j = X^j$ *pour tout entier* $j \notin \{i-1, i\}$,
iii) le $\mathbb{Q}_p$*-espace vectoriel image de l'application* $Y^{i-1} \to Y^i$ *est de dimension finie.*

Preuve du lemme : Avec des notations évidentes, on a, dans $\mathcal{C}(G_K)$, des suites exactes courtes

$$0 \to Z^i \to X^i \to B^{i+1} \to 0 \text{ et } 0 \to B^i \to Z^i \to H^i \to 0$$

D'après le corollaire à la proposition 5.5, elles sont presque scindées et on peut trouver des sous-objets X_0^i de X^i et Z_1^i de Z^i tels que les applications $X_0^i \to B^{i+1}$ et $Z^i \to H^i$ sont surjectives et que leurs noyaux respectifs Z_0^i et B_1^i sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Soit alors $Y^i = Z_1^i + X_0^i \subset X^i$. On a une suite exacte

$$0 \to Z_0^i + Z_1^i \to Y^i \to B^{i+1} \to 0$$

Si B_2^i désigne le noyau de la restriction à $Z_0^i + Z_1^i$ de la projection de Z^i sur H^i et si $\overline{Z}_0^i = Z_0^i / Z_0^i \cap Z_1^i$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \to & B_1^i & \to & Z_1^i & \to & H^i & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & B_2^i & \to & Z_0^i + Z_1^i & \to & H^i & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & \overline{Z}_0^i & = & \overline{Z}_0^i & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Commme $\overline{Z}_0^i$ et B_1^i sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, il en est de même de B_2^i et il suffit de prendre pour Y^{i-1} l'image inverse de B_2^i dans X^{i-1}. □

Prouvons maintenant la proposition : Montrons d'abord (i) : Le lemme nous permet de construire une suite décroissante de sous-complexes $(X) = (X_n) \supset (X_{n-1}) \supset \dots (X_r) \supset \dots (X_2) \supset (X_1)$ de X tel que l'inclusion induit un quasi-isomorphisme et que l'image de X_r^{i-1} dans X_r^i soit de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ pour $i \geq r$. Il suffit de prendre $(E) = (X_1)$.
ii) D'après (i), on peut trouver des morphismes de $C_n(\mathcal{C}(G_K))$

$$(E_0) \to (X) \text{ et } (F) \to (Y)$$

qui sont des quasi-isomorphismes, avec (E_0) et (F) presque triviaux. Si l'on prend pour (E) le produit fibré $(E_0) \times_{(Y)} (F)$, on voit que (E) est encore presque trivial et que l'on a un diagramme comme on veut. □

Proposition 6.4. — *Soient V' et V'' des représentations p-adiques de G_K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V'', V') \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V'', V')$ est bijective.*

Preuve : C'est clair si $n = 0$ ou 1. Le cas $n \geq 2$ résulte de la proposition précédente grâce au fait qu'un complexe de $\mathcal{C}(G_K)$ dont les groupes de cohomologie sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ et qui est presque trivial est un complexe de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$. Soyons un peu plus explicite :
Soit

$$0 \to V' \to X^0 \to X^1 \to \ldots \to X^{i-1} \to X^i \to \ldots \to X^{n-1} \to V'' \to 0$$

une suite exacte de $\mathcal{C}(G_K)$ représentant un élément ε de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V'', V')$. Si

$$E^0 \to E^1 \to \ldots X^{i-1} \to E^i \to \ldots \to E^{n-1}$$

est un sous-complexe de

$$X^0 \to X^1 \to \ldots \to X^{i-1} \to X^i \to \ldots \to X^{n-1}$$

qui lui est quasi-isomorphe et est presque trivial,

$$0 \to V' \to E^0 \to E^1 \to \ldots \to E^{i-1} \to E^i \to \ldots \to E^{n-1} \to V'' \to 0$$

est une suite exacte courte de $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ dont la classe dans $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V'', V')$ a pour image ε dans $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V'', V')$. L'application est bien surjective.
L'assertion (ii) de la proposition 6.2 permet de montrer que, si deux complexes de $C_n(\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K))$ sont quasi-isomorphes dans $\mathcal{C}(G_K)$, alors ils sont aussi quasi-isomorphes dans $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$, ce qui montre l'injectivité. □

Proposition 6.5. — *Soient W' et W'' des B^+_{dR}-représentations de G_K. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la flèche $\mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(W'', W') \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(W'', W')$ est bijective.*

Preuve : C'est clair pour $n = 0$ et la conjonction du corollaire à la prop.5.5 et du th.5.6 montre que c'est vrai pour $n = 1$. Supposons donc $n \geq 2$. La proposition 6.5 résulte de la proposition 6.2 et du fait que tout objet de $C_n(\mathcal{C}(G_K))$ qui est presque trivial et dont les groupes de cohomologie sont des B^+_{dR}-représentations est quasi-isomorphe à un complexe de $C_n(\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K))$. Soyons plus précis.
Pour prouver la surjectivité, il s'agit de vérifier que si

$$0 \to W' \to X^0 \to \ldots \to X^i \to X^{i+1} \to \ldots X^{n-1} \to W'' \to 0$$

est une suite exacte de $\mathcal{C}(G_K)$, avec W' et W'' des objets de $\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)$, alors il existe un complexe de $C_n(\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K))$ qui est quasi-isomorphe à

$$(X) \qquad X^0 \to \ldots \to X^i \to X^{i+1} \to \ldots X^{n-1}$$

La proposition 6.2 nous permet de supposer que (X) est presque trivial. On a donc des suites exactes courtes

$$\begin{array}{cl} 0 \to W' \to X^0 \to B^1 \to 0 & \\ 0 \to B^i \to X^i \to B^{i+1} \to 0 & \quad \text{pour } 1 \le i \le n-2 \\ 0 \to B^{n-1} \to X^{n-1} \to W'' \to 0 & \end{array}$$

où les B^i sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Ceci implique que, pour $1 \le i \le n-2$ le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel X^i est aussi de dimension finie.
Pour $1 \le i \le n-1$, posons $B^i_C = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} B^i$. On a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(B^1, W') = H^1_{\mathrm{cont}}(K, (B^1)^{*_{\mathbb{Q}_p}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} W') = \\ H^1_{\mathrm{cont}}(K, (B^1_C)^{*_C} \otimes_C W') = \mathrm{Ext}^1_{B^+_{dR}[G_K],0}(B^1_C, W')$$

groupe des extensions de B^1_C par W' qui sont scindées en tant que suites exactes de B^+_{dR}-modules, de sorte que, si E^0 désigne une extension de B^1_C par W' dont la classe est celle de X^0, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & W' & \to & X^0 & \to & B^1 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & W' & \to & E^0 & \to & B^1_C & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.
Pour $1 \le i \le n-1$, posons $E^i = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} X^i$ de sorte que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B^i & \to & X^i & \to & B^{i+1} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B^i_C & \to & E^i & \to & B^{i+1}_C & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes.
Enfin, notons E^{n-1} la somme amalgamée de B^{n-1}_C et de X^{n-1} au-dessous de B^{n-1}. On a un un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & B^{n-1} & \to & X^{n-1} & \to & W'' & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & B^{n-1}_C & \to & E^{n-1} & \to & W'' & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. D'après la proposition 3.14, E^{n-1}, extension presque scindée de W'' par B^{n-1}_C, est une B^+_{dR}-représentation.
Le complexe

$$(E) \qquad E^0 \to \ldots \to E^i \to E^{i+1} \to \ldots E^{n-1}$$

est formé de B^+_{dR}-représentations et on a un morphisme naturel $(E) \to (X)$ qui induit un quasi-isomorphisme.

Pour prouver l'injectivité, il suffit de montrer que si

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 0 & \to & W' & \to & X^0 & \to & \dots & \to & X^i & \to & \dots & \to & X^{n-1} & \to & W'' & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & W' & \to & Y^0 & \to & \dots & \to & Y^i & \to & \dots & \to & Y^{n-1} & \to & W'' & \to & 0 \end{array}$$

est un diagramme commutatif de $\mathcal{C}(G_K)$ dont les lignes sont exactes et si W' et W'' sont des B_{dR}^+-représentations, alors, avec des notations évidentes, on peut trouver un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} (X) & \to & (E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (Y) & \to & (F) \end{array}$$

dans $C_n(\mathcal{C}(G_K))$ tel que (E) et (F) sont dans $C_n(B_{dR}^+)$ et que les flèches horizontales induisent un quasi-isomorphisme. La proposition 6.2 nous permet de supposer que (X) et (Y) sont presque triviaux. Si l'on prend pour (E) le complexe défini à partir de (X) comme plus haut et pour (F) le complexe associé à (Y) par la même recette, la flèche de (X) dans (Y) induit, de manière évidente une flèche de (E) dans (F) qui convient. $\square$

6.2 – Le cas où X est de dimension finie

Proposition 6.6. — *Soient $n \in \mathbb{N}$, X et Y des presque C-représentations. Pour tout $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$, il existe un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie V de Y, stable par G_K tel que ε appartient à l'image de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,V)$.*

Preuve : Soit

$$0 \to Y \to E^0 \to E^1 \to \dots E^{n-1} \to X \to 0$$

une suite exacte de $\mathcal{C}(G_K)$ représentant ε. Si N désigne l'image de $E^0 \to E^1$, on a une suite exacte de $\mathcal{C}(G_K)$

$$0 \to Y \to E^0 \to N \to 0$$

qui (corollaire à la proposition 5.5) est presque scindée. Si F^0 désigne un sous-objet de E^0 qui s'envoie surjectivement sur N tel que $V = F^0 \cap Y$ est de dimension finie, la suite exacte

$$0 \to V \to F^0 \to E^1 \to \dots E^{n-1} \to X \to 0$$

définit un élément de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,V)$ dont l'image dans $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$ est ε. $\square$

Soit V une représentation p-adique fixée. Les $(\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V,-))_{n\in\mathbb{N}}$ et les $H^n_{\mathrm{cont}}(K, V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} -))_{n\in\mathbb{N}}$ forment des δ-foncteurs de la catégorie $\mathcal{C}(G_K)$ dans celle des groupes abéliens, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(V,-) = H^0_{\mathrm{cont}}(K, V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} -)$ et, pour $n \geq 1$, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V,-)$ est effaçable. On a donc des morphismes naturels de foncteurs $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V,-) \to H^n_{\mathrm{cont}}(K, V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} -)$.

Proposition 6.7. — *Soient V une représentation p-adique de G_K et S une presque-C-représentation.*
i) Toute représentation banachique E extension de V par S est une presque C-représentation.
ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V,S)$ est de dimension finie, nulle si $n \geq 3$.
iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application naturelle
$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(V,S) \to H^n_{\mathrm{cont}}(K, V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} S)$$
est un isomorphisme.

Preuve : a) Quitte à remplacer S par $V^* \otimes_{\mathbb{Q}_p} S$, on peut supposer que $V = \mathbb{Q}_p$. Mais (i) signifie que l'inclusion $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, S) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, S)$ est une bijection. Comme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, S)$ s'identifie à $H^1_{\mathrm{cont}}(K,S)$, (i) résulte de (iii). Compte tenu du corollaire à la proposition 3.3, (iii) implique aussi (ii).

b) *Prouvons (ii) lorsque S est une représentation p-adique* : D'après la proposition 6.4, on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, S) = \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(\mathbb{Q}_p, S)$. Il suffit donc de vérifier que, pour $n \geq 1$, la restriction à la catégorie des représentations p-adiques du foncteur $H^n_{\mathrm{cont}}(K, -)$ est effaçable. Ces foncteurs sont nuls pour $n \geq 3$ et c'est évident pour $n = 1$. Pour $n = 2$, il s'agit de vérifier que l'on peut plonger toute représentation p-adique S de G_K dans une autre $\widehat{S}$ de manière que la flèche $H^2_{\mathrm{cont}}(K,S) \to H^2_{\mathrm{cont}}(K,\widehat{S})$ soit nulle. Par dualité cela revient à vérifier que toute représentation p-adique V_2 (prendre $V_2 = S^*(1)$) est isomorphe au quotient d'une représentation p-adique $\widehat{V}_2$ telle que l'application $\widehat{V}_2^{G_K} \to V_2^{G_K}$ est nulle.
Soient $V_1 = V_2^{G_K}$ et $V_3 = V_2/V_1$. Pour tout entier $r \in \mathbb{Z}$, $H^2_{\mathrm{cont}}(K, V_3^* \otimes V_1(r))$ s'identifie au dual de $(V_3 \otimes V_1^*)(1-r))^{G_K}$ et est nul pour presque tout r. Choisissons r ainsi. Choisissons aussi une extension non triviale V_0 de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(r)$.
Dans le carré commutatif
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(V_2, V_1(r)) & \to & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{B}(G_K)}(V_1, V_1(r)) \\ \| & & \| \\ H^1_{\mathrm{cont}}(K, V_2^* \otimes V_1(r)) & \to & H^1_{\mathrm{cont}}(K, V_1^* \otimes V_1(r)) \end{array}$$
la flèche inférieure est surjective, donc aussi la flèche supérieure. On peut donc construire un diagramme commutatif, dont les lignes et les colonnes sont exactes
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & V_1(r) & \to & V_1 \otimes V_0 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & V_1(r) & \to & \widehat{V}_2 & \to & V_2 & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & V_3 & = & V_3 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

On a alors $\widehat{V}_2^{G_K} = (V_1 \otimes V_0)^{G_K} = 0$.

c) *Prouvons (iii) lorsque S est une C-représentation* : Le groupe $H^1_{\text{cont}}(K, S)$ classifie aussi bien les extensions de $\mathbb{Q}_p$ par S dans la catégorie des représentations banachiques que les extensions de C par S dans la catégorie des C-représentations. Ceci implique que pour toute représentation banachique E extension de $\mathbb{Q}_p$ par S, on peut trouver une C-représentation E_C et un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & S & \rightarrow & E & \rightarrow & \mathbb{Q}_p & \rightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & S & \rightarrow & E_C & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & C/\mathbb{Q}_p & = & C/\mathbb{Q}_p & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

dont les lignes et les colonnes sont exactes. Mais alors S et $C/\mathbb{Q}_p$ sont des presque-C-représentations, donc aussi E qui s'identifie au noyau du morphisme $E_C \rightarrow C/\mathbb{Q}_p$. La flèche $\text{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, S) \rightarrow H^1_{\text{cont}}(K, S)$ est donc bien un isomorphisme.
On a $H^2_{\text{cont}}(K, S) = 0$ (cor. à la prop.3.3). Pour finir de prouver (c), il suffit donc de vérifier que $\text{Ext}^2_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, S) = 0$. Soit

$$0 \rightarrow S \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow 0$$

une suite exacte presque triviale (cf. prop.6.2) de $\mathcal{C}(G_K)$ représentant un élément $\varepsilon \in \text{Ext}^2_{\mathcal{B}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, S)$. Alors $V = dX^0$ est de dimension finie et on a deux suites exactes courtes :

$$0 \rightarrow S \rightarrow X^0 \rightarrow V \rightarrow 0$$
$$0 \rightarrow V \rightarrow X^1 \rightarrow \mathbb{Q}_p \rightarrow 0$$

Comme $\text{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(V, S) = H^1_{\text{cont}}(K, V^* \otimes S) = \text{Ext}^1_{C[G_K]}(C \otimes V, S)$ on peut plonger X^0 dans un C-espace vectoriel X^0_C extension de $C \otimes V$ par S. Les deux suites exactes

$$0 \rightarrow S \rightarrow X^0_C \rightarrow C \otimes V \rightarrow 0$$
$$0 \rightarrow C \otimes V \rightarrow C \otimes X^1 \rightarrow C \rightarrow 0$$

définissent un élément $\varepsilon_C \in \text{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(C, S)$. Comme ce groupe est nul (prop.2.17), il existe un diagramme commutatif de C-représentations

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \rightarrow & S & \rightarrow & X^0_C & \rightarrow & C \otimes X^1 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & S & \rightarrow & Y^0 & \rightarrow & Y^1 & \rightarrow & C & \rightarrow & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes et qui a la vertu que la projection de Y^1 sur C admet une section s. Si Y_0^1 désigne l'image inverse de $\mathbb{Q}_p$ dans Y^1, ε est la classe de la 2-extension

$$0 \to S \to Y^0 \to Y_0^1 \to \mathbb{Q}_p \to 0$$

La restriction de s à $\mathbb{Q}_p$ fournit une trivialisation de cette 2-extension et $\varepsilon = 0$.

d) *Fin de la preuve* : Si

$$0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$$

est une suite exacte de presque-C-représentations et si le résultat est vrai pour Y' et Y, il l'est aussi pour Y''. S'il est vrai pour Y' et Y'', il l'est aussi pour Y. La proposition s'en déduit puisque le fait que S soit une presque C-représentation implique que l'on peut trouver des suites exactes de $\mathcal{C}(G_K)$

$$0 \to V' \to W \to X \to 0 \text{ et } 0 \to V'' \to S \to X \to 0$$

avec V', V'' des représentations p-adiques et W une C-représentation. □

6.3 – Le cas où Y est de dimension finie

Si V est une représentation p-adique, $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(V, V(1)) = H^2_{\mathrm{cont}}(K, V^* \otimes V(1))$ s'envoie dans $H^2_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(1)) = \mathbb{Q}_p$.

Proposition 6.8. — *Soient V une représentation p-adique et S une presque-C-représentation.*
i) Les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(S, V(1))$ sont de dimension finie, nulle si $n \geq 3$.
ii) Pour $n = 0, 1, 2$, l'application bilinéaire

$$\mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(V, S) \times \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(S, V(1)) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(V, V(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

est non dégénérée.

Preuve : Quitte à remplacer S par $V^* \otimes S$, on peut supposer $V = \mathbb{Q}_p$.
Remarquons d'abord que la proposition est vraie si S est une représentation p-adique : compte-tenu de la proposition précédente, cela résulte des résultats classiques sur la cohomologie continue (§3.1).
Si W est une C-représentation, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(W, \mathbb{Q}_p(1)) = 0$ (cor. au th.3.11) et $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, W) = H^2_{\mathrm{cont}}(K, W) = 0$ (prop.6.7). Si en outre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(W, C) = 0$, on a aussi $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(W, \mathbb{Q}_p(1)) = 0$ (pro.3.12) et $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, W) = H^1_{\mathrm{cont}}(K, W) = 0$ (prop.3.1).
La presque-C-représentation $S(-1)$ est presqu'isomorphe à une C-représentation triviale. Il existe donc un entier d, des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie V' de S et V'' de $C(1)^d$, stables par G_K et un isomorphisme

$S/V' \simeq C(1)/V''$. Posons $X = S/V'$ que l'on identifie via cet isomorphisme à $C(1)^d/V''$.
On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \to & \mathrm{Ext}^n(X,\mathbb{Q}_p(1)) & \to & \mathrm{Ext}^n(C(1)^d,\mathbb{Q}_p(1)) & \to & \mathrm{Ext}^n(V'',\mathbb{Q}_p(1)) & \to \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots \to & \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,X)^* & \to & \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,C(1)^d)^* & \to & \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,V'')^* & \to \dots \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Or $\mathrm{Ext}^n(V'',\mathbb{Q}_p(1)) \to \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,V'')^*$ est un isomorphisme pour tout n et $\mathrm{Ext}^n(C(1)^d,\mathbb{Q}_p(1)) = \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,C(1)^d)$ pour $n = 0,1$. On en déduit que $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{Q}_p(1)) = \mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}_p,X) = 0$ et que $\mathrm{Ext}^1(X,\mathbb{Q}_p(1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}_p,X)^*$ est un isomorphisme.
On a aussi le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots \to & \mathrm{Ext}^n(X,\mathbb{Q}_p(1)) & \to & \mathrm{Ext}^n(S,\mathbb{Q}_p(1)) & \to & \mathrm{Ext}^n(V',\mathbb{Q}_p(1)) & \to \dots \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \dots \to & \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,X)^* & \to & \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,S)^* & \to & \mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,V')^* & \to \dots \end{array}$$

dont les lignes sont aussi exactes. Mais $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{Q}_p(1)) = \mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}_p,X) = 0$. Comme $\mathrm{Hom}(V'',\mathbb{Q}_p(1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}_p,V'')^*$ et $\mathrm{Ext}^1(X,\mathbb{Q}_p(1)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Q}_p,X)^*$ sont des isomorphismes, on en déduit que $\mathrm{Hom}(S,\mathbb{Q}_p(1)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathbb{Q}_p,S)$ est aussi un isomorphisme.
Il suffit alors pour achever la preuve de vérifier que, pour $n = 1,2$, le foncteur contravariant $F^n : \mathcal{C}(G_K)^{\mathrm{op}} \to \underline{\mathrm{Vect}}_{\mathbb{Q}_p}$ qui envoie S sur $\mathrm{Ext}^{2-n}(\mathbb{Q}_p,S)^*$ est effaçable, i.e. que pour tout S, on peut trouver un épimorphisme $X \to S$ tel que l'application $F^n(X) \to F^n(S)$ est nulle. Par dévissage, on voit qu'il suffit de le prouver lorsque S est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ ou lorsque $S = C(1)$. Dans le premier cas cela provient de ce que l'on sait déjà que l'application $\mathrm{Ext}^n(S,\mathbb{Q}_p(1)) \to F^n(S)$ est un isomorphisme. Dans le second de ce que $F^n(S) = 0$. $\square$

6.4 – Preuve du théorème 6.1

Disons que la propriété $P(X,Y)$ est vraie si le théorème 6.1 est vrai pour X et Y. On voit que si

$$0 \to X' \to X \to X'' \to 0 \text{ et } 0 \to Y' \to Y \to Y'' \to 0$$

sont des suites exacte courtes de $\mathcal{C}(G_K)$, alors
– si deux des trois propriétés $P(X',Y), P(X,Y), P(X'',Y)$ sont vraies, la troisième aussi,
– si deux des trois propriétés $P(X,Y'), P(X,Y), P(X,Y'')$ sont vraies, la troisième aussi.
En utilisant le fait que pour toute presque C-représentation X, il existe un isomorphisme $X/V \simeq W/V'$ avec V et V' des $\mathbb{Q}_p$-représentations et W une C-représentation, on est ramené à prouver que $P(X,Y)$ est vrai dans chacun des quatre cas suivants :

i) X et Y sont des $\mathbb{Q}_p$-représentations,
ii) X et Y sont des C-représentations,
iii) X est une $\mathbb{Q}_p$-représentation et Y est une C-représentation
iv) X est une C-représentation et Y est une $\mathbb{Q}_p$-représentation.
Dans le cas (ii), on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) = \mathrm{Ext}^n_{B^+_{dR}[G_K]}(X,Y)$ (prop.6.5) et c'est l'assertion (a) du théorème 2.14.
Dans les trois autres cas, les propositions 6.7 et 6.8 impliquent que les $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$ sont de dimension finie, nulle si $n \geq 3$.
Dans les cas (i) et (iii), on a en outre $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) = H^n_{\mathrm{cont}}(K, X^* \otimes Y)$ (prop.6.7). L'égalité

$$\sum_{i=0}^{2} \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) = -[K:\mathbb{Q}_p]h(X)h(Y)$$

résulte alors
– dans le cas (i), de ce que (§3.1)

$$\sum_{n=0}^{2} (-1)^n \dim_{\mathbb{Q}_p} H^n_{\mathrm{cont}}(K, X^* \otimes Y) = -[K:\mathbb{Q}_p].\dim_{\mathbb{Q}_p}(X^* \otimes Y)$$

– dans le cas (iii), de ce que, comme $X^* \otimes Y$ est une C-représentation, $H^0(K, X^* \otimes Y)$ et $H^1_{\mathrm{cont}}(K, X^* \otimes Y)$ sont de même dimension (prop.3.1) tandis que $H^2_{\mathrm{cont}}(K, X^* \otimes Y) = 0$ (cor.à la prop.3.3).
Enfin, la proposition 6.8 permet de déduire le cas (iv) du cas (iii). $\square$

6.5 – Dualité

Pour toute représentation p-adique V, on note c_V la flèche naturelle

$$\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(V, V(1)) \simeq H^2_{\mathrm{cont}}(K, V^* \otimes V(1)) \to H^2_{\mathrm{cont}}(K, \mathbb{Q}_p(1)) = \mathbb{Q}_p$$

Soient X une presque C-représentation et $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(X, X(1))$. Choisissons un complexe presque trivial de $C_2(\mathcal{C}(G_K))$

$$X^0 \xrightarrow{d} X^1$$

représentant ε. Alors dX^0 est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$, la suite exacte

$$0 \to X(1) \to X^0 \to dX^0 \to 0$$

est presque scindée et on peut choisir un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie Y^0 de X^0, stable par G_K, tel que la restriction de d à Y^0 soit surjective. Notons V le sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de X défini par $V(1) = X(1) \cap \mathrm{Ker}\, d\,|_{Y^0}$ et Y^1 l'image inverse de V dans X^1. On a un diagramme commutatif de presque-C-représentations

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & V(1) & \to & Y^0 & \to & Y^1 & \to & V & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & X(1) & \to & X^0 & \to & X^1 & \to & X & \to & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes, les objets de la première étant tous de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$.

Proposition 6.9. — *Soient X une presque C-représentation et $\varepsilon \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(X, X(1))$. Choisissons un diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V(1) & \to & Y^0 & \to & Y^1 & \to & V & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & X(1) & \to & X^0 & \to & X^1 & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

comme ci-dessus et soit $\varepsilon_V \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(V, V(1))$ l'élément défini par la ligne supérieure. Alors $c_V(\varepsilon_V)$ ne dépend pas des choix faits. Si l'on pose $c_X(\varepsilon) = c_V(\varepsilon_V)$, l'application $c_X : \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(X, X(1)) \to \mathbb{Q}_p$ ainsi définie est $\mathbb{Q}_p$-linéaire.

Lemme 6.10. — *Soit*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_1(1) & \to & Y_1^0 & \to & Y_1^1 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & V_2(1) & \to & Y_2^0 & \to & Y_2^1 & \to & V_2 & \to & 0 \end{array}$$

un diagramme commutatif de représentation p-adiques dont les lignes sont exactes. Pour $i = 1, 2$, soit $\varepsilon_{V_i} \in \mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_i, V_i(1))$ l'élément défini par la i-ième ligne. On a, avec des conventions évidentes

$$c_{V_2}(\varepsilon_{V_2}) = c_{V_1}(\varepsilon_{V_1})$$

Preuve : Pour $i = 1, 2$, on a, avec des notations évidentes $V_i^* \otimes V_i = sl(V_i) \oplus \mathbb{Q}_p$ et $c_{V_i}(\varepsilon_{V_i})$ est la classe de

$$0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to E_i^0 \to E_i^1 \to \mathbb{Q}_p \to 0$$

où E_i^0 est le quotient de $V_i^* \otimes Y_i^0$ par $sl(V_i)(1)$ tandis que E_i^1 est l'image inverse de $\mathbb{Q}_p$ dans $V_i^* \otimes Y_i^1$.

On voit que le noyau de l'application composée naturelle

$$V_2^* \otimes (V_2(1) \oplus Y_1^0) = (V_2^* \otimes V_2(1)) \oplus (V_2^* \otimes Y_1^0) \to \mathbb{Q}_p(1) \oplus (V_1^* \otimes Y_1^0) \to E_1^0$$

contient le noyau de la projection $V_2^* \otimes (V_2(1) \oplus Y_1^0) \to V_2^* \otimes Y_2^0 \to E_2^0$ d'où, par passage au quotient, une application de E_2^0 dans E_1^0.

On a $E_1^1 \subset V_1^* \otimes Y_1^1 \subset V_1^* \otimes Y_2^1$. On voit que l'image de l'application composée $E_2^1 \subset V_2^* \otimes Y_2^1 \to V_1^* \otimes Y_2^1$ est contenue dans E_2^1, d'où une application de E_2^1 dans E_1^1. On vérifie alors que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{Q}_p(1) & \to & E_1^0 & \to & E_1^1 & \to & \mathbb{Q}_p & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \mathbb{Q}_p(1) & \to & E_2^0 & \to & E_2^1 & \to & \mathbb{Q}_p & \to & 0 \end{array}$$

est commutatif et on a donc $c_{V_1}(\varepsilon_{V_1}) = c_{V_2}(\varepsilon_{V_2})$. □

Prouvons maintenant la proposition : Commençons par vérifier que, le complexe presque trivial

$$X^0 \xrightarrow{d} X^1$$

étant fixé, $c_V(\varepsilon_V)$ ne dépend pas du choix de la représentation p-adique $Y^0 \subset X^0$ telle que $dY^0 = dX^0$: Si Y_1^0 et Y_2^0 sont deux choix, on peut quitte à remplacer Y_2^0 par $Y_1^0 + Y_2^0$, supposer qe $Y_1^0 \subset Y_2^0$. Si, pour $i = 1, 2$, on pose $V_i(1) = X(1) \cap Y_i^0$, on a $V_1 \subset V_2$ et on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_1(1) & \to & Y_1^0 & \to & Y_1^1 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \to & V_2(1) & \to & Y_2^0 & \to & Y_2^1 & \to & V_2 & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. D'après le lemme précédent, on a bien, avec des notations évidentes $c_{V_1}(\varepsilon_{V_1}) = c_{V_2}(\varepsilon_{V_2})$.

Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que si

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & V(1) & \to & Y^0 & \to & Y^1 & \to & V & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & X(1) & \to & X_1^0 & \to & X_1^1 & \to & X & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & X(1) & \to & X_2^0 & \to & X_2^1 & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

est un diagramme commutatif de presque C-représentations, dont les lignes sont exactes, la première étant constituée de représentations p-adiques, alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & V_2(1) & \to & Y_2^0 & \to & Y_2^1 & \to & V_2 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & X(1) & \to & X_2^0 & \to & X_2^1 & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, la première étant formée de représentations p-adiques, telle que $c_{V_2}(\varepsilon_{V_2}) = c_V(\varepsilon_V)$. Il suffit de prendre $V_2 = V$ et pour Y_2^0 (resp. Y_2^1) l'image de Y^0 (resp. Y^1) dans X_2^0 (resp. X_2^1). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & V(1) & \to & Y^0 & \to & Y^1 & \to & V & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & V_2(1) & \to & Y_2^0 & \to & Y_2^1 & \to & V_2 & \to & 0 \end{array}$$

et, dans $\mathrm{Ext}^2_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V, V(1))$, les deux 2-extensions considérées définissent le même élément. Donc $c_{V_2}(\varepsilon_{V_2}) = c_V(\varepsilon_V)$. $\square$

Si X et Y sont deux presque-C-représentations, on dispose alors de deux applications bilinéaires

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X, Y) \times \mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(Y, X(1)) \to \mathbb{Q}_p$$

La première envoie (a, b) sur $c_X(a \cup b)$ et la deuxième sur $c_Y(b \cup a)$ (on a identifié, de manière évidente, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X(1), Y(1))$ à $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X, Y)$).

Proposition 6.11. — *Soient X et Y des presque C-représentations et soit $n \in \{0,1,2\}$.*
i) Si $a \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y)$ et $b \in \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(Y,X(1))$, on a $c_Y(b \cup a) = (-1)^n c_X(a \cup b)$.
ii) L'application bilinéaire

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(X,Y) \times \mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(Y,X(1)) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}(G_K)}(X,X(1)) \xrightarrow{c_X} \mathbb{Q}_p$$

qui envoie (a,b) sur $c_X(a \cup b)$, est non dégénérée.

Preuve : Montrons (i) :
Supposons d'abord $n = 0$, de sorte que a est un morphisme de X dans Y et que b est la classe d'une 2-extension

$$0 \to X(1) \to E^0 \xrightarrow{d} E^1 \to Y \to 0$$

avec $Z = d(E^0)$ de dimension finie. Si $E^1_X = E^1 \times_Y X$, le cup-produit $a \cup b$ est la classe de la 2-extension

$$0 \to X(1) \to E^0 \to E^1_X \to X \to 0$$

Si $E^0_Y = Y(1) \oplus_{X(1)} E^0$ (où $X(1) \to Y(1)$ est $a \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p(1)}$), le cup-produit $b \cup a$ est la classe de

$$0 \to Y(1) \to E^0_Y \to E^1 \to Y \to 0$$

Choisissons $F^0 \subset E^0$ de dimension finie telle que $d(F^0) = d(E^0)$, posons $V_1(1) = F^0 \cap X(1)$ et notons F^1 l'image inverse de V_1 dans E^1_X. On a deux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_1(1) & \to & F^0 & \to & Z & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & X(1) & \to & E^0 & \to & Z & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & Y(1) & \to & E^0_Y & \to & Z & \to & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z & \to & F^1 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \cap & & \\ 0 & \to & Z & \to & E^1_X & \to & X & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & Z & \to & E^1 & \to & Y & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Soient $V_2 = a(V_1)$, G^0 l'image de F^0 dans E^0_Y et G^1 l'image de F^1 dans E^1. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \to & V_1(1) & \to & F^0 & \to & F^1 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & V_2(1) & \to & G^0 & \to & G^1 & \to & V_2 & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Notons ε_1 (resp. ε_2) la classe de la 2-extension de V_1 par $V_1(1)$ (resp. V_2 par $V_2(1)$) définie par la première (resp. la seconde). On voit que $c_X(a \cup b) = c_{V_1}(\varepsilon_1)$ tandis que $c_Y(b \cup a) = c_{V_2}(\varepsilon_2)$. D'après le lemme 6.10, on a bien $c_{V_1}(\varepsilon_1) = c_{V_2}(\varepsilon_2)$.

Supposons maintenant $n = 1$. Soient

$$0 \to Y \to E^1 \to X \to 0 \;\text{ et }\; 0 \to X(1) \to E^0 \to Y \to 0$$

deux suites exactes courtes représentant a et b. Le choix d'un presque-scindage de chacune d'elles nous donnent des diagrammes commutatifs de presque-C-représentations

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_2 & \to & G^1 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \| & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \to & V_2 & \to & F^1 & \to & X & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & Y & \to & E^1 & \to & X & \to & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_1(1) & \to & G^0 & \to & V_2 & \to & 0 \\ & & \| & & \cap & & \cap & & \\ 0 & \to & V_1(1) & \to & F^0 & \to & Y & \to & 0 \\ & & \cap & & \cap & & \| & & \\ 0 & \to & X(1) & \to & E_0 & \to & Y & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, avec V_1 et V_2 de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$ (on choisit les F^i, puis on pose $V_2 = F^1 \cap Y$, $V_1(1) = F^0 \cap X(1)$, $G^1 = F^1 \times_X V_1$ et $G^0 = F^0 \times_Y V_2$). On dispose alors d'un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & V_1(1) & \to & G^0 & \to & G^1 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & V_1(1) & \to & F^0 & \to & E^1 \times_X V_1 & \to & V_1 & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & X(1) & \to & E^0 & \to & E^1 & \to & X & \to & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes. Si l'on note $a' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_1, V_2)$ la classe de G^1 et $b' \in \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_2, V_1(1))$ celle de G^0, on en déduit que $c_X(a \cup b) = c_{V_1}(a' \cup b')$. Un calcul similaire montre que $c_Y(b \cup a) = c_{V_2}(b' \cup a')$.
Mais, si $V = V_1^* \otimes V_2$, on a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_1, V_2) = H^1_{\mathrm{cont}}(K, V) \text{ et } \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Q}_p[G_K]}(V_2, V_1(1)) = H^1_{\mathrm{cont}}(K, V^*(1))$$

Lorsque l'on identifie $V \otimes V^*(1)$ à $V^*(1) \otimes V$, on a $b \cup a = -a \cup b$. Par conséquent $c_Y(b \cup a)$, qui est l'image de $b' \cup a'$ dans $H^2(K, \mathbb{Q}_p(1)) = \mathbb{Q}_p$ est l'opposé de $c_X(a \cup b)$ qui est l'image de $a' \cup b'$.

Pour $n = 2$, la preuve est entièrement analogue au cas $n = 0$.

Montrons alors (ii) : Pour X fixé, les $F^n_X(Y) = \mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(Y, X(1))^*$ forment un δ-foncteur. On voit que l'application

$$\mathrm{Ext}^n(X, Y) \to F^n_X(Y)$$

induite par l'accouplement $(a, b) \to c_X(a \cup b)$ est un δ-foncteur.
De même, pour Y fixé, les $G^n_Y(X) = \mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(Y, X(1))^*$ forment un δ-foncteur contravariant tandis que l'application

$$\mathrm{Ext}^n(X, Y) \to F^n_X(Y)$$

induite par l'accouplement $(a,b) \to c_Y(b \cup a) = -(1)^n c_X(a \cup b)$ est aussi un δ-foncteur.

Mais, toute presque-C-représentation X est presque isomorphe à C^d pour un entier d convenable, et toute presque C-représentation Y est presqu'isomorphe à un $C(1)^{d'}$ pour un entier d' convenable. Par dévissage, on est alors ramené à vérifier la proposition dans chacun des trois cas suivants

a) X est une $\mathbb{Q}_p$-représentation,

b) Y est une $\mathbb{Q}_p$-représentation,

c) $X = C(1)$ et $Y = C$.

Le cas (a) n'est autre que la proposition 6.8 et l'assertion (i) ramène le cas (b) au cas (a). Dans le cas (c), on a $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{C}(G_K)}(C(1), C) = \mathrm{Ext}^{2-n}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C(2)) = 0$ et il n'y a rien à démontrer. □

7 – Presque C-représentations à presqu'isomorphismes près

Nous renvoyons par exemple à [Iv87], §XI et à [KS90], §1.6 pour tout ce qui concerne la notion de localisation dans une catégorie additive.

Disons qu'un morphisme f de presque-C-représentations est un *presqu'isomorphisme* si son noyau et son conoyau sont tous deux de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Les presqu'isomorphismes forment un système multiplicatif dans la catégorie $\mathcal{C}(G_K)$. On peut donc parler de la catégorie additive $\mathcal{C}_{PI}(G_K)$ localisée de $\mathcal{C}(G_K)$ par rapport aux presqu'isomorphismes.

Proposition 7.1. — *La catégorie quotient $\mathcal{C}_{PI}(G_K)$ des* presque-C-représentations à presqu'isomorphismes près *est une catégorie abélienne semi-simple. Tout objet simple de $\mathcal{C}_{PI}(G_K)$ est isomorphe à C.*

Preuve : Dire que deux objets de $\mathcal{C}_{PI}(G_K)$ sont isomorphes revient à dire qu'ils sont presqu'isomorphes en tant qu'objets de $\mathcal{C}(G_K)$. C'est le cas si et seulement s'ils ont la même dimension. Par conséquent, pour tout objet S de $\mathcal{C}_{PI}(G_K)$, il existe un unique $d \in \mathbb{N}$ tel que S est isomorphe à C^d. On voit aussi que tout endomorphisme non nul de C vu comme objet de $\mathcal{C}_{PI}(G_K)$ est un automorphisme. La proposition en résulte. □

Déterminer complètement - à équivalence de catégories près - la catégorie $\mathcal{C}_{PI}(G_K)$ revient à donc à déterminer le corps gauche $\mathcal{D}_K$ des endomorphismes de C dans cette catégorie. On va décrire sa structure en tant que K-espace vectoriel.

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de C stables par G_K et C_f la réunion (filtrante) des $V \in \mathcal{V}$.

Proposition 7.2. — *Soit* $\mathcal{D}_K = \mathrm{End}_{\mathcal{C}_{PI}(G_K)}(C)$.
i) En tant que K*-espace vectoriel,* $\mathcal{D}_K$ *s'identifie à* $\varinjlim_{V\in\mathcal{V}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C/V)$.
ii) Pour tout $V \in \mathcal{V}$*, on dispose d'une suite exacte de* K*-espaces vectoriels*

$$0 \to K \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C/V) \to (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1))^{G_K} \to K$$

et l'application de droite est surjective dès que V *est assez grand.*
iii) On dispose d'une suite exacte de K*-espaces vectoriels*

$$0 \to K \to \mathcal{D}_K \to (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} C_f((-1))^{G_K} \to K \to 0$$

Preuve : La première assertion paraît claire. Si l'on veut être rigoureux, il est peut-être nécessaire de procéder ainsi : Un élément de $\mathcal{D}_K$ est la classe d'un couple

$$C \xleftarrow{\pi} E \xrightarrow{\varphi} C$$

de morphismes de $\mathcal{C}(G_K)$, où π est un presqu'isomorphisme. Ceci implique (th.5.1) que $d(E) = 1$, que π est surjective et que son noyau V' est de dimension finie sur $\mathbb{Q}_p$. Ceci permet de voir E comme une extension de C par V' et π comme la projection de E sur C. Si $V = \varphi(V')$, l'application φ induit par passage au quotient un morphisme $f : C \to C/V$. Si maintenant $C \xleftarrow{\pi_1} E \xrightarrow{\varphi_1} C$ et $C \xleftarrow{\pi_2} E \xrightarrow{\varphi_2} C$ sont des diagrammes de $\mathcal{C}(G_K)$ avec π_1 et π_2 des presqu'isomorphismes, ils définissent, par la recette précédente des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, stables par G_K, de C et des morhismes $f_1 : C \to C/V_1$ et $f_2 : C \to C/V_2$. On voit facilement que la classe de (π_1, φ_1) est égale à celle de (π_2, φ_2) si et seulement le carré

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & C/V_1 \arrow[d, "\text{proj.can.}"] \\ C/V_2 \arrow[r, "\text{proj.can.}"'] & C/(V_1+V_2) \end{tikzcd}$$

est commutatif. D'où (i).

Soit $V \in \mathcal{V}$. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, V) = 0$ (cor. au th.3.11) et $\mathrm{End}_{\mathcal{C}(G_K)}(C) = K$ (th.3.11), la suite exacte

$$0 \to V \to C \to C/V \to 0$$

induit une suite exacte

$$0 \to K \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C/V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(C, V)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C)$$

Rappelons (prop.3.12) que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(C, V)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1)) \simeq (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1))^{G_K}$. Comme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C)$ est un K-espace vectoriel de dimension 1 de base la classe c_2 de C_2, l'application $K \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C)$

qui envoie λ sur λc_2 identifie K à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(C,C)$. On a donc bien une suite exacte

$$0 \to K \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C/V) \to (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1))^{G_K} \to K$$

Dans le cas particulier où V est une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p$, on voit (prop.3.10) que l'application $(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1))^{G_K} \to K$ est un isomorphisme. Si $V_1 \subset V_2$ sont dans $\mathcal{V}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & & \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C/V_1) & \to & (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1(-1))^{G_K} & \to & K & \to 0 \\ \| & & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\ 0 \to & K & \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, C/V_2) & \to & (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2(-1))^{G_K} & \to & K & \to 0 \end{array}$$

est commutatif. Par conséquent, pour que l'application $(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1))^{G_K} \to K$ soit surjective, il suffit que V contienne une extension non triviale de $\mathbb{Q}_p(1)$ par $\mathbb{Q}_p$.

Compte-tenu de la commutativité du diagramme ci-dessus, l'assertion (iii) résulte de (ii) par passage à la limite. □

Remarques : i) J'ignore si l'inclusion $(C \otimes_{\mathbb{Q}_p} C_f(-1))^{G_K} \subset (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} C(-1))^{G_K}$ est stricte. ii) On comparera ce théorème avec le résultat analogue dans le contexte des espaces de Banach-Colmez ([Co02], th.9.5).

ii) Pour toute presque-C-représentation X de dimension 1, le K-espace vectoriel $\mathcal{D}_K$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_{PI}(G_K)}(C, X)$. Notons $\mathcal{V}_X$ l'ensemble des sous-$\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de X stables par G_K et X_f la réunion (filtrante) des $V \in \mathcal{V}_X$. Le même raisonnement que précédemment montre que $\mathcal{D}_K = \varinjlim_{V \in \mathcal{V}_X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, X/V)$. Si X n'est isomorphe ni à C, ni à $C(1)$, pour tout $V \in \mathcal{V}_X$, l'application $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(C, X/V) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(C, V) \simeq (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V(-1))^{G_K}$ est un isomorphisme. Par passage à la limite, on en déduit un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\mathcal{D}_K \to (C \otimes_{\mathbb{Q}_p} X_f)^{G_K} .$$

8 – Extensions universelles

8.1 – B^+_{dR}–représentations triviales

Proposition 8.1. — *Soit W une B^+_{dR}-représentation de G_K. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) l'application B^+_{dR}-linéaire $B^+_{dR} \otimes_K W^{G_K} \to W$ déduite par extension des scalaires de l'inclusion de W^{G_K} dans W est surjective,
ii) le sous-$\overline{K}$-espace vectoriel W^{disc} de W formé des $w \in W$ dont le fixateur $G_w = \{g \in G_K \mid g(w) = w\}$ est ouvert dans G_K est dense dans W,

iii) il existe une suite d'entiers $r_1, r_2, \ldots, r_m, \ldots$ naturels, presque tous nuls, et un isomorphisme de B_{dR}^+-représentations $\oplus_{m\geq 1} B_m^{r_m} \simeq W$.

Preuve : Pour tout $\overline{K}$-espace vectoriel X muni d'une action semi-linéaire discrète de G_K, l'application $\overline{K}$-linéaire

$$\overline{K} \otimes_K X^{G_K} \to X$$

déduite par extension des scalaires de l'inclusion de X^{G_K} dans X est un isomorphisme : lorsque X est de dimension finie, cela résulte de ce que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, $H^1(G_K, GL_d(\overline{K}))$ est trivial. Le cas général s'en déduit par passage à la limite.
Ceci implique que W^{disc} s'identifie à $\overline{K} \otimes_K W^{G_K}$. L'équivalence de (i) et (ii) résulte alors de ce que $\overline{K}$ est dense dans B_{dR}^+ (c'est un résultat de Colmez, cf. [Fo88a], appendice).
L'implication (iii)$\Rightarrow$(i) est immédiate. Montrons la réciproque : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, notons $F_m W^{G_K}$ le sous-K-espace vectoriel de W^{G_K} formé des x tels que $t^m x = 0$. On a $F_{m-1}W^{G_K} \subset F_m W^{G_K}$ pour tout m, $F_0 W^{G_K} = 0$ et $F_m W^{G_K} = W^{G_K}$ pour m assez grand. Pour chaque $m \geq 1$, choisissons des $(e_{m,i})_{1\leq i\leq r_m}$ dans $F_m W^{G_K}$ qui relèvent une base de $F_m W^{G_K}/F_{m-1}W^{G_K}$. Si W vérifie (i), l'application $\oplus_{m\leq 1} B_m^{r_m} \to W$ qui envoie $(b_{m,i})_{m\geq 1, 1\leq i\leq r_m}$ sur $\sum b_{m,i} e_{m,i}$ est un isomorphisme. □

On dira qu'une B_{dR}^+-représentation W est *triviale* si elle vérifie les propriétés équivalentes de la proposition précédente. Lorsque W est une C-représentation, on retrouve la définition donnée au §1.3.

8.2 – Extensions universelles par des représentations p-adiques

Reprenons les notations du §3.4. Pour toute représentation p-adique V, posons $E_e(V) = B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $E_m(V) = \mathrm{Fil}^{-m} B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. On a des suites exactes

$$0 \to V \to E_e(V) \to (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0$$
$$\text{et} \quad 0 \to V \to E_m(V) \to B_m(-m) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \to 0$$

Chaque $E_m(V)$ est une presque C-représentation, extension d'une B_m*-représentation* (i.e. une B_{dR}^+-représentation tuée par t^m) par V tandis que $E_e(V)$ est la réunion croissante des $E_m(V)$. En particulier $E_e(V)$ a une structure naturelle de $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel topologique (c'est une limite inductive de banach) et l'action de G_K est continue.
La proposition 3.13 signifie que $E_m(V)$ est l'*extension universelle d'une B_m-représentation par V*, i.e. qu'étant donnée une suite exacte

$$0 \to V \to E \to W \to 0$$

de $\mathcal{B}(G_K)$, avec W une B_m-représentation, il existe un et un seul morphisme de $\mathcal{B}(G_K)$ (ou un morphisme de B_m-représentations, cela revient au même d'après le théorème 3.11)

$$f : W \to B_m(-m) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$$

tel que $E = E_m(V) \times_{B_m(-m)\otimes V} W$. Autrement dit, $E_m(V)$ est solution du *problème universel des extensions de B_m-représentations par V* : étant donnée une telle extension il existe une et une seule application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante de E dans $E_m(V)$ qui est l'identité sur V. Par passage à la limite on voit que $E_e(V)$ est une limite inductive de représentations banachiques caractérisée à isomorphisme unique près par le fait qu'étant donné une représentation banachique E, extension d'une B_{dR}^+-représentation par V, il existe une et une seule application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante de E dans $E_e(V)$ qui est l'identité sur V.

Pour toute représentation p-adique V de G_K, on appelle *espace tangent de V* le K-espace vectoriel $t_V = ((B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Posons $\mathrm{Fil}^m t_V = 0$ si $m \geq 0$ et $\mathrm{Fil}^m t_V = ((\mathrm{Fil}^m B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ sinon. Si $\mathrm{Gr}^m t_V = \mathrm{Fil}^m t_V/\mathrm{Fil}^{m+1} t_V$, on a $\mathrm{Gr}^m t_V = 0$ pour $m \geq 0$ tandis que, pour $m < 0$, $\mathrm{Gr}^m t_V$ s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $(C(m) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Par conséquent, $\mathrm{Gr}\, t_V = \oplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Gr}^m t_V$ s'identifie à un sous-K-espace vectoriel de $D_{HT}(V) = \oplus_{m\in\mathbb{Z}}(C(m) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$. Comme $D_{HT}(V)$ est un K-espace vectoriel de dimension finie inférieure ou égale à la dimension h de V sur $\mathbb{Q}_p$, il en est de même de t_V. Lorsque V est de de Rham, c'est-à-dire lorsque le K-espace vectoriel $D_{dR}(V) = (B_{dR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ est de dimension h, on voit, pour des raisons de dimension, que la suite

$$0 \to (B_{dR}^+ \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K} \to D_{dR}(V) \to t_V \to 0$$

est exacte, ce qui fait que l'on retrouve la définition habituelle de l'espace tangent ([FPR94], §2.2).

Pour toute K-algèbre Λ, notons $t_V(\Lambda)$ le Λ-module $\Lambda \otimes_K t_V$. L'inclusion de t_V dans $(B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V$ induit une application $\overline{K}$-linéaire $t_V(\overline{K}) \to (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ et une application B_{dR}^+-linéaire $t_V(B_{dR}^+) \to (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. On voit que la première est injective - ce qui nous permet d'identifier $t_V(\overline{K})$ à un sous-$\overline{K}$-espace vectoriel de $(B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V$ stable par G_K - et que l'image de la seconde, que nous notons $\widehat{t}_V(\overline{K})$ s'identifie à l'adhérence de $t_V(\overline{K})$ dans $(B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V$; c'est aussi la plus grande sous-B_{dR}^+-représentation triviale de $(B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V$.

On note $E_+(V)$ (resp. $E_{\mathrm{disc}}(V)$) l'image inverse de $\widehat{t}_V(\overline{K})$ (resp. $t_V(\overline{K})$) dans $E_e(V)$ de sorte que l'on a un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & V & \to & E_{\mathrm{disc}}(V) & \to & t_V(\overline{K}) & \to & 0 \\
 & & \| & & \cap & & \cap & & \\
0 & \to & V & \to & E_+(V) & \to & \widehat{t}_V(\overline{K}) & \to & 0 \\
 & & \| & & \cap & & \cap & & \\
0 & \to & V & \to & E_e(V) & \to & (B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes V & \to & 0
\end{array}$$

On voit aussi que $E_+(V)$ est, en un sens évident, *l'extension universelle* d'une B_{dR}^+-représentation triviale par V.

Enfin, en prenant les éléments fixe par G_K, chacune de ces trois suites exactes donne la même suite exacte

$$0 \to V^{G_K} \to E_e(V)^{G_K} \to t_V \to H^1_{\mathrm{cont}}(K,V)$$

L'application $\exp_{BK} : t_V \to H^1_{\mathrm{cont}}(K,V)$ ainsi définie n'est autre, lorsque V est une représentation de de Rham, que *l'exponentielle de Bloch-Kato* ([BK90], def.3.10) et son image est le sous-K-espace vectoriel $H^1_e(K,V)$.

Exercice : Soit $m \in \mathbb{Z}$. Alors, si $m \leq 0$, $E_+(\mathbb{Q}_p(m)) = \mathbb{Q}_p(m)$. Si $m > 0$, $E_+(\mathbb{Q}_p(m))$ est une extension de B_m par $\mathbb{Q}_p(m)$ et s'identifie au sous-espace de B_{cris} formé des b tels que $\varphi(b) = p^m b$.

Remarque : Soient V une représentation p-adique et posons

$$\mathrm{Hom}(B^+_{dR}, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(B_m, B_n(-n) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$$

On a $\mathrm{Hom}(B^+_{dR}, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(G_K)}(B_m, B_n(-n) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ pour m et n suffisamment grands et le théorème de pleine fidélité implique que tout $f \in \mathrm{Hom}(B^+_{dR}, (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)$ est une application B^+_{dR}-linéaire. Elle est donc déterminée par l'image de 1 qui doit être fixe par G_K. Ce K-espace vectoriel s'identifie donc à l'espace tangent t_V.
En utilisant l'inclusion de $\mathbb{Q}_p$ dans B^+_{dR}, on obtient en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(B^+_{dR}, --)$ et le foncteur $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p, --)$ à la suite exacte

$$0 \to V \to B_e \otimes V \to (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes V \to 0$$

un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} t_V & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Ext}^1(B^+_{dR}, V) \\ \| & & \downarrow \\ t_V & \xrightarrow{\exp_{BK}} & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, V) \end{array}$$

Donc $H^1_e(K,V)$ *s'identifie au sous-groupe de* $H^1(K,V) = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}(G_K)}(\mathbb{Q}_p, V)$ *formé des extensions de* $\mathbb{Q}_p$ *par* V *qui proviennent d'une extension de* B^+_{dR} *par* V.

Appelons $K_0[\varphi, N]$*-module* (ou (φ, N)*-module sur* k) la donnée d'un K_0-espace vectoriel D muni de deux applications $\varphi : D \to D$, $N : D \to D$, la première semi-linéaire relativement au Frobenius absolu σ agissant sur K_0, la deuxième K_0-linéaire, vérifiant $N\varphi = p\varphi N$. Rappelons ([Fo86a],§3) que B_{st} est une sous-K_0-algèbre de B_{dR} contenant B_{cris}, stable par G_K, que l'endomorphisme φ de B_{cris} s'étend en un endomorphisme, encore noté φ,toujours G_K équivariant, de B_{st} et que B_{st} est équippé d'une B_{cris}-dérivation $N : B_{st} \to B_{st}$ également G_K-équivariante et vérifiant $N\varphi = p\varphi N$.

Pour toute représentation p-adique V de G_K, $D_{st}(V) = (B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{G_K}$ est de façon naturelle un $K_0[\varphi, N]$-module. Sa dimension en tant que K_0-espace vectoriel est inférieure ou égale à la dimension de V sur $\mathbb{Q}_p$; on dit que V est *semi-stable* si l'on a l'égalité ([Fo86b], §5).

Appelons *B_e-représentation* (*de* G_K) la donnée d'un B_e-module libre de rang fini muni d'une action semi-linéaire continue de G_K.

Proposition 8.2. — *Soient V_1 et V_2 deux représentations p-adiques de même dimension sur $\mathbb{Q}_p$. Supposons V_1 semi-stable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) les (φ, N)-modules $D_{st}(V_1)$ et $D_{st}(V_2)$ sont isomorphes,
ii) les B_e-représentations $E_e(V_1) \to E_e(V_2)$ sont isomorphes.

Remarquons que (i) implique que V_2 est aussi semi-stable.

Preuve : Pour $i = 1, 2$, $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_i$ est muni d'une structure de (φ, N)-module en posant $\varphi(b \otimes v) = \varphi(b) \otimes v$ et $N(b \otimes v) = N(b) \otimes v$ si $b \in B_{st}$ et $v \in V_i$ et $D_{st}(V_i)$ est le sous-(φ, N)-module $(B_{st} \otimes V_i)^{G_K}$ de $B_{st} \otimes V_i$. On a $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_i = B_{st} \otimes_{B_e} (B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_i) = B_{st} \otimes_{B_e} E_e(V_i))$. Comme $\varphi(b) = b$ et $Nb = 0$ pour tout $b \in B_e$, on a $\varphi(x) = x$ et $N(x) = 0$ pour tout $x \in E_e(V_i)$. Comme l'action de φ sur B_{st} est un endomorphisme de la structure d'anneau tandis que celle de N est une dérivation, on a

$$\varphi(b \otimes x) = \varphi(b) \otimes x \text{ et } N(b \otimes x) = Nb \otimes x \text{ quelque soient } b \in B_{st} \text{ et } x \in E_e(V_i)$$

Par conséquent, toute application B_e-linéaire G_K-équivariant bijective de $E_e(V_1)$ sur $E_e(V_2)$ induit, par extension des scalaires à B_{st} un isomorphisme de B_{st}-modules de $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ sur $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$ compatible avec l'action de G_K, celle de φ et celle de N. En prenant les invariants sous G_K, on en déduit un isomorphisme (de (φ, N)-modules) de $D_{st}(V_1)$ sur $D_{st}(V_2)$.
Réciproquement, si les (φ, N)-modules $D_{st}(V_1)$ et $D_{st}(V_2)$ sont isomorphes, on a $\dim_{K_0} D_{st}(V_2) = \dim_{K_0} D_{st}(V_1) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V_1 = \dim_{\mathbb{Q}_p} V_2$ et V_2 est aussi semi-stable. Pour $i = 1, 2$, $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_i$ s'identifie donc à $B_{st} \otimes_{K_0} D_{st}(V_i)$ ([Fo86b], th.5.3.5) et on dispose donc d'un isomorphisme de B_{st}-modules de $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1$ sur $B_{st} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$ compatible avec l'action de G_K, celle de φ et celle de N. En prenant la partie sur laquelle $\varphi = 1$ et $N = 0$, on trouve un isomorphisme de $E_e(V_1)$ sur $E_e(V_2)$. □

Remarque : Il serait intéressant d'étudier plus en détail les B_e-représentations. En particulier, on peut se demander si le foncteur d'oubli de la catégorie des B_e-représentations dans celle des $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques avec action linéaire et continue de G_K n'est pas pleinement fidèle. On a en tout cas le résultat suivant (en se fatigant un peu plus, on devrait pouvoir éviter d'avoir à remplacer K_0 par K_0' et G_K par $G_{K'}$) :

PROPOSITION 8.3. — *Soient V_1 et V_2 deux représentations p-adiques. Supposons V_1 semi-stable et $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_2 \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V_1$. Supposons qu'il existe une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire G_K-équivariante injective $E_e(V_1) \to E_e(V_2)$. Alors*
i) les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels V_1 et V_2 ont la même dimension et V_2 est semi-stable ;
ii) il existe une extension finie non ramifiée K_0' de K_0 telle que les $K_0'[\varphi, N]$-modules $K_0' \otimes_{K_0} D_{st}(V_1)$ et $K_0' \otimes_{K_0} D_{st}(V_2)$ sont isomorphes ;
iii) il existe un sous-groupe ouvert $G_{K'}$ de G_K contenant le groupe d'inertie et une application B_e-linéaire bijective $G_{K'}$-équivariante de $E_e(V_1)$ dans $E_e(V_2)$.

Preuve : Soit h le ppcm des dénominateurs des pentes de $D_{st}(V_1)$ (vu comme un φ-isocristal). Rappelons les propriétés dont nous allons avoir besoin du sous-anneau B_{st}^h de B_{st} introduit dans [Fo00], §5.5 : Notons P_0 le corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel de $\overline{K}$; c'est un sous-corps de B_{cris}, stable par G_K et par l'action de φ (qui opère via le Frobenius absolu) ; l'homomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-algèbres $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e \to B_{cris}$ est injectif et identifie $P_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e$ à un sous-anneau de B_{cris} noté B_0. Soit t_h un élément de B_{cris} vérifiant $t_h \in \mathrm{Fil}^1 B_{dR}$, $\varphi^n t_h \in B_{dR}^+$ pour $1 \leq n \leq h-1$ et $\varphi^h(t_h) = pt_h$. Alors t_h est inversible dans B_{cris}, on a $g(t_h)/t_h \in P_0$ pour tout $g \in G_K$ et la sous-B_0-algèbre de B_{cris} engendrée par t_h et $1/t_h$ s'identifie à l'algèbre des polynômes de Laurent en t_h à coefficients dans B_0. Notons u l'élément de B_{st} noté $\log[\pi]$ dans *loc.cit.* ; on a $g(u) - u \in \mathbb{Z}_p(1) = \mathbb{Z}_p t$, pour tout $g \in G_K$, $\varphi(u) = pu$ et $Nu = -1$. Alors B_{st}^h s'identifie à l'anneau des polynômes en u à coefficients dans B_0, donc aussi à $P_0[t_h, 1/t_h, u] \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_e$. Enfin le fait que $h\alpha \in \mathbb{Z}$ pour toute pente α de $D_{st}(V_1)$ implique que $D_{st}(V_1) = (B_{st}^h \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1)^{G_K}$.
Pour $i = 1, 2$, on a $B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_i = E_e(V_i)$ et on dispose donc d'une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire injective G_K-équivariante $B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \hookrightarrow B_e \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$. D'où par extension des scalaires une application $P_0[t_h, 1/t_h, u]$-linéaire injective $B_{st}^h \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_1 \hookrightarrow B_{st}^h \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2$. Comme le sous-anneau $P_0[t_h, 1/t_h, u]$ de B_{st} est stable par G_K, cette application est aussi G_K-équivariante. Pour les mêmes raisons, elle commute aussi à l'action de φ^h et à celle de N. En prenant les invariants sous Galois, on obtient une application K_0-linéaire injective

$$D_{st}(V_1) \to (B_{st}^h \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_2)^{G_K} \subset D_{st}(V_2)$$

Comme $\dim_{K_0} D_{st}(V_2) \leq \dim_{K_0}$, on en déduit que V_1 et V_2 ont la même dimension sur $\mathbb{Q}_p$, que V_2 est semi-stable et que l'application ci-dessus est une bijection. D'où (i).
Ceci implique aussi qu'il existe un isomorphisme de $K_0[\varphi^h, N]$-modules de $D_{st}(V_1)$ sur $D_{st}(V_2)$.
Supposons d'abord que h divise $[K_0 : \mathbb{Q}_p]$ et montrons qu'alors il existe aussi un isomorphisme de $K_0[\varphi, N]$-modules de $D_{st}(V_1)$ sur $D_{st}(V_2)$. Cela résulte de la conjonction des deux faits suivants (on a noté $\mathbb{Q}_{p^h}$ l'unique extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré h contenue dans K_0) :
a) la flèche évidente $\mathbb{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{Hom}_{K_0[\varphi,N]}(D_1, D_2) \to \mathrm{Hom}_{K_0[\varphi^h,N]}(D_1, D_2)$ est surjective (bien sûr elle est aussi injective) ;

b) si L est un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_{p^h}}(D_1, D_2)$ tel que le sous-$\mathbb{Q}_{p^h}$-espace vectoriel de $\mathcal{L}_{\mathbb{Q}_{p^h}}(D_1, D_2)$ engendré par L contient un isomorphisme, alors L aussi.

Pour le premier, on remarque que, si $f \in \mathrm{Hom}_{K_0[\varphi^h,N]}(D_1, D_2)$, l'application $\theta(f) : D_1 \to D_2$ définie par $\theta(f) = \sum_{i=0}^{h-1} \varphi^i f \varphi^{-i}$ est en fait dans $\mathrm{Hom}_{K_0[\varphi,N]}(D_1, D_2)$; si $b_1, b_2, \ldots, b_h$ est une base de $\mathbb{Q}_{p^h}$ sur $\mathbb{Q}_p$, la matrice des $(\sigma^i(b_r))_{0\leq i<h, 1\leq r\leq h}$ est inversible, il existe donc $a_1, a_2, \ldots, a_h \in \mathbb{Q}_{p^h}$ tels que

$$\sum a_r b_r = 1 \text{ et } \sum a_r \sigma^i(b_r) = 0 \text{ pour} 1 \leq i < h$$

On a $f = \sum_{r=1}^h a_r \theta(b_r f)$.

L'assertion (b) qui n'utilise que le fait que le corps $\mathbb{Q}_p$ a une infinité d'éléments, que $\mathbb{Q}_{p^h}$ est une extension finie sur $\mathbb{Q}_p$ et que D_1 et D_2 sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}_{p^h}$ est bien connue (cf., par exemple [Fo00], lemme 2.7).

Dans le cas général enfin, il suffit de prendre pour K_0' la plus petite extension non ramifiée de K_0 contenue dans $\overline{K}$ telle que h divise $[K_0' : \mathbb{Q}_p]$. Ceci termine la preuve de (ii). L'assertion (iii) résulte alors de la proposition précédente où l'on remplace K par l'extension finie non ramifiée $K\mathbb{Q}_{p^h}$. □

8.3 – Extensions universelles par des représentations de torsion

Appelons *groupe abélien de cotype fini* tout groupe abélien de torsion Λ tel que le $\widehat{\mathbb{Z}}$-module des homomorphismes de Λ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de type fini. Si Λ est un groupe de p-torsion, il est de cotype fini si et seulement si d'une part sa partie divisible Λ_{div} est isomorphe à $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h$ pour un entier h convenable et d'autre part $\Lambda/\Lambda_{\mathrm{div}}$ est un groupe fini.

Une *représentation de cotype fini (de G_K)* est un groupe abélien de cotype fini muni d'une action linéaire discrète de G_K.

Soit Λ une représentation de cotype fini. On pose

$$T_p(\Lambda) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_{p^n} \text{ et } V_p(\Lambda) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Lambda)$$

Alors $T_p(\Lambda)$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, avec action linéaire et continue de G_K et $V_p(\Lambda)$ est une représentation p-adique de G_K. Le quotient $V_p(\Lambda)/T_p(\Lambda)$ s'identifie à la partie divisible $\Lambda_{(p),\mathrm{div}}$ du sous-groupe de p-torsion $\Lambda_{(p)}$ de Λ.

Pour ? désignant un symbole qui est $e, +, \mathrm{disc}$ ou un entier $m \geq 0$, $E_?(V_p(\Lambda))$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel topologique avec action linéaire et continue de G_K contenant $T_p(\Lambda)$ comme un sous-groupe fermé stable par G_K. Le quotient $E_?(V_p(\Lambda))/T_p(\Lambda)$ est donc un $\mathbb{Z}_p$-module topologique avec action linéaire et continue de G_K, contenant $\Lambda_{(p),\mathrm{div}}$ comme sous-groupe discret. On pose alors

$$E_?(\Lambda) = \Lambda \oplus_{\Lambda_{(p),\mathrm{div}}} (E_?(V_p(\Lambda))/T_p(\Lambda))$$

somme amalgamée de Λ et de $E_?(V)$ au-dessous de $\Lambda_{(p),\mathrm{div}}$. Bien sûr, cette construction n'a d'intérêt que pour un groupe de p-torsion puisque, si $\Lambda_{(p')}$

désigne le sous-groupe de Λ formé des éléments d'ordre premier à p, on a $E_?(\Lambda) = \Lambda_{(p')} \oplus E_?(\Lambda_{(p)})$.

Posons aussi $t_\Lambda = t_{V_p(\Lambda)}$ et $\widehat{t}_\Lambda(\overline{K}) = \widehat{t}_{V_p(\Lambda)}(\overline{K})$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \Lambda & \to & E_{\rm disc}(\Lambda) & \to & t_\Lambda(\overline{K}) & \to & 0 \\
 & & \| & & \cap & & \cap & & \\
0 & \to & \Lambda & \to & E_+(\Lambda) & \to & \widehat{t}_\Lambda(\overline{K}) & \to & 0 \\
 & & \| & & \cap & & \cap & & \\
0 & \to & \Lambda & \to & E_e(\Lambda) & \to & (B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes V_p(\Lambda) & \to & 0 \\
 & & \| & & \cup & & \cup & & \\
0 & \to & \Lambda & \to & E_{m(\Lambda)} & \to & B_m(-m) \otimes V_p(\Lambda) & \to & 0
\end{array}$$

dont les lignes sont exactes.

Proposition 8.4. — *Soit Λ une représentation de cotype fini de G_K. Alors $E_{\rm disc}(\Lambda)$ est le plus grand sous-groupe stable par G_K de $E_e(\Lambda)$ sur lequel l'action de G_K est discrète tandis que $E_+(\Lambda)$ est l'adhérence de $E_{\rm disc}(\Lambda)$ dans $E_e(\Lambda)$.*

Preuve : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, notons $E_{m,{\rm disc}}(\Lambda)$ le plus grand sous-groupe stable par G_K de $E_m(\Lambda)$ sur lequel l'action de G_K est discrète. Comme l'action de G_K est discrète sur Λ, c'est l'image inverse du plus grand sous-groupe de $B_m(-m)\otimes V_p(\Lambda)$ sur lequel l'action de G_K est discrète ; ce sous-groupe s'identifie à $\overline{K} \otimes_K (B_m(-m) \otimes V_p(\Lambda))^{G_K}$ (prop.8.1). Par passage à la limite, on en déduit que le plus grand sous-groupe de $E_e(\Lambda)$ stable par G_K sur lequel l'action de G_K est discrète est l'image inverse de $\overline{K} \otimes_K ((B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes V_p(\Lambda))^{G_K} = t_\Lambda(\overline{K})$. La deuxième assertion est évidente. □

On a encore des propriétés d'universalité :

Proposition 8.5. — *Soient Λ une représentation de cotype fini de G_K et E un groupe topologique abélien muni d'une action linéaire et continue de G_K, extension d'une B^+_{dR}-représentation W par Λ. Alors il existe une et une seule application linéaire continue G_K-équivariante $f : E \to E_e(\Lambda)$ qui est l'identité sur Λ. Son image est contenue dans $E_+(\Lambda)$ (resp. $E_m(\Lambda)$) si et seulement si la B^+_{dR}-représentation W est triviale (resp. annulée par t^m).*

Preuve : Pour tout groupe topologique abélien M notons $V_p(M)$ le groupe des homomorphismes (de groupes) continus de $\mathbb{Q}_p$ dans M. On a bien $V_p(\Lambda) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Lambda)$. Si M est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel, on a $V_p(M) = M$. On a $V_p(E_e(\Lambda)) = E_e(V_p(\Lambda))$ et on dispose d'une suite exacte courte

$$0 \to V_p(\Lambda) \to V_p(E) \to W \to 0$$

Toute application $f : E \to E_e(V)$ induit donc une application $V_p(f) : V_p(E) \to E_e(V_p(\Lambda))$ et $V_p(f)$ est l'identité sur $V_p(\Lambda)$ si f est l'identité sur Λ.
Inversement, on a $E_e(\Lambda) = \Lambda \oplus_{\Lambda_{(p),{\rm div}}} (E_e(V_p(\Lambda))/T_p(\Lambda))$ et E s'identifie à $\Lambda \oplus_{\Lambda_{(p),{\rm div}}} ((V_p(E))/T_p(\Lambda))$, ce qui fait que toute flèche $V_p(E) \to E_e(V_p(\Lambda))$ qui

est l'identité sur $V_p(\Lambda)$ induit une flèche $E \to E_e(\Lambda)$. La proposition résulte alors des propriétés universelles mises en évidence au paragraphe précédent. $\square$

8.4 – Applications aux variétés abéliennes, aux groupes de Barsotti-Tate et aux motifs

Proposition 8.6. — *Soient A une variété abélienne sur K, t_A son espace tangent, t'_A le K-espace vectoriel dual de l'espace tangent de la variété abélienne duale, $T_p(A) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_{p^n}(\overline{K})$, $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(A)$ et $V_C = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$. On a des isomorphismes canoniques et fonctoriels*
i) $V_C = t_A(C)(1) \oplus t'_A(C)$,
ii) $t_A \simeq t_V = t_{A_{p-\mathrm{tor}}(\overline{K})} = t_{A_{\mathrm{tor}}(\overline{K})}$,
iii) $A(\overline{K}) \simeq E_{\mathrm{disc}}(A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}))$ *et* $A(C) \simeq E_+(A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}))$.

Remarque : La première assertion n'est autre que la décomposition de Hodge-Tate pour les variétés abéliennes dont on obtient ainsi une nouvelle preuve (mais c'est loin d'être la plus simple !).

Preuve : Le logarithme est défini partout sur $A(C)$ et induit une suite exacte courte

$$0 \to A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}) \to A(C) \to t_A(C) \to 0$$

Mais $t_A(C)$ est une C-représentation triviale de dimension la dimension g de A. D'après la proposition précédente, il existe des applications $\mathbb{Q}_p$-linéaires continues G_K-équivariantes uniques de $\eta : A(C) \to E_+(C)$ et $\bar{\eta} : t_A(C) \to t_V(C)$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}) & \to & A(C) & \to & t_A(C) & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow \eta & & \downarrow \bar{\eta} & & \\ 0 & \to & A_{\mathrm{tor}}(\overline{K}) & \to & E_+(A_{\mathrm{tor}}(\overline{K})) & \to & \widehat{t}_V(\overline{K}) & \to & 0 \end{array}$$

est commutatif.
Les applications η et $\bar{\eta}$ sont injectives. En effet, sinon comme le noyau W de η s'identifie au noyau de $\bar{\eta}$ qui est une application B_{dR}^+-linéaire, ce serait une sous-B_{dR}^+-représentation non nulle de $t_A(C) \simeq C^g$ et contiendrait donc une sous représentation isomorphe à C ; en prenant les invariants sous G_K, on voit que $A(K)$ contiendrait un sous-groupe isomorphe à K ; mais ceci contredit le fait que $A(K)$ est compact (si $\mathcal{A}$ est un modèle propre de A sur $\mathcal{O}_K$, on a $A(K) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K-\text{schémas}}(\mathrm{Spec}\mathcal{O}_K, \mathcal{A}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K-\text{schémas}}(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K), \mathcal{A})$ et chacun de ces ensembles est fini).
En particulier, $(B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V \supset \widehat{t}_V(\overline{K})$ contient une sous-B_{dR}^+-représentation isomorphe à C^g. Celle-ci est contenue dans le noyau de la multiplication par t dans $B_{dR}/B_{dR}^+) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V$ qui est $V_C(-1)$, d'où une application injective $t_A(C) \to V_C(-1)$. La transposée de l'application analogue pour la variété abélienne duale nous donne une application surjective $V_C \to t'_A(C)$ ou encore de $V_C(-1)$ dans $t_A(C)(-1)$. Comme il n'y a pas d'application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue

G_K-équivariante non nulle de $t_A(C) \simeq C^g$ dans $t'_A(C)(-1) \simeq C(-1)^g$, l'application composée $t_A(C) \to V_C(-1) \to t_A(C)(-1)$ est nulle. Pour des raisons de dimension, la suite

$$0 \to t_A(C) \to V_C(-1) \to t'_A(C)(-1) \to 0$$

est exacte. Comme, dans la catégorie des C-représentations, il n'y a ni homomorphisme ni extension non trivial(e) de $C(-1)$ dans (par) C, cette suite est scindée de manière unique et $V_C(-1)$ s'identifie, canoniquement et fonctoriellement à $t_A(C) \oplus t'_A(C)(-1)$, d'où (i) en tensorisant par $\mathbb{Q}_p(1)$.
Ceci implique que, pour tout entier $m \notin \{0, -1\}$, on a $V_C(m)^{G_K} = 0$, donc que $t_V = ((B_{dR}/B^+_{dR}) \otimes V)^{G_K} = (V_C(-1))^{G_K} = t_A$ puisque $(t'_A(C)(-1))^{G_K} = 0$, D'où (ii).
En outre, $\widehat{t}_V(\overline{K})$ est l'adhérence de $t_V(\overline{K})$ dans $V_C(-1)$ qui est une C-représentation et est donc $t_V(C)$. L'application $\overline{\eta}$ est donc un isomorphisme et η fournit l'isomorphisme cherché de $A(C)$ sur $E_+(A_{\text{tor}}(\overline{K}))$. Enfin $A(\overline{K})$ est la réunion des $A(L)$ pour L parcourant les extensions finies galoisiennes de K contenues dans $\overline{K}$ et $\eta(A(\overline{K}))$ est bien contenu dans $E_{\text{disc}}(A_{\text{tor}}(\overline{K}))$. Comme l'application $A(\overline{K}) \to t_A(\overline{K})$ est surjective, les lignes du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A_{\text{tor}}(\overline{K}) & \to & A(\overline{K}) & \to & t_A(\overline{K}) & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A_{\text{tor}}(\overline{K}) & \to & E_{\text{disc}}(A_{\text{tor}}(\overline{K})) & \to & t_V(\overline{K}) & \to & 0 \end{array}$$

sont exactes. Comme les flèches verticales de gauche et de droite sont des isomorphismes, celle du milieu l'est aussi et fournit l'isomorphisme cherché entre $A(\overline{K})$ et $E_{\text{disc}}(A_{\text{tor}}(\overline{K}))$. $\square$

La proposition 1.1 énoncée dans l'introduction est alors claire : Si ξ est comme dans l'énoncé, l'application $\overline{\xi} : t_A(\overline{K}) \to C(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_p(A)$ induite est encore continue et induit donc une application $\mathbb{Q}_p$-linéaire continue G_K-équivariante du complété $t_A(C)$de $t_A(\overline{K})$ dans $C(-1) \otimes_{\mathbb{Q}_p} V_p(A)$. Cette dernière application est C-linéaire (th.3.11). Le reste résulte des deux propositions précédentes. $\square$

On dispose de résultats analogues pour les groupes de Barsotti-Tate : soit $J = (J_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$ un tel groupe sur l'anneau des entiers $\mathcal{O}_K$ de K ; soient h sa hauteur et d sa dimension. Notons $\widehat{J}$ le groupe formel associé : si A_n désigne l'algèbre affine de J_{p^n}, alors A_n est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang p^{nh}. Alors $\widehat{J} = \mathrm{Spf} A_{\widehat{J}}$, avec $A_{\widehat{J}} = \varprojlim A_n$. C'est une algèbre formellement lisse ; l'algèbre affine de la composante connexe de l'élément neutre est une algèbre de séries formelles en d-variables à coefficients dans $\mathcal{O}_K$. On peut considérer le groupe $\widehat{J}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ (resp. $\widehat{J}(\mathcal{O}_C)$) des homomorphismes continus de la $\mathcal{O}_K$-algèbre $A_{\widehat{J}}$ dans $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ (resp. $\mathcal{O}_C$). Le sous-groupe de torsion $\widehat{J}_{tor}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ de $\widehat{J}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ est aussi celui de $\widehat{J}(\mathcal{O}_C)$ et c'est l'union $J(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ des $J_{p^n}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_K-\text{algèbres}}(A_n, \mathcal{O}_{\overline{K}})$. En tant que groupe, il est isomorphe à $(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^h$. L'espace tangent t_J de J (ou de $\widehat{J}$ si l'on préfère) est le K-espace vectoriel de dimension d dual du K-espace vectoriel des formes différentielles invariantes sur $A_{\widehat{J}}$.

Remarque : La proposition 8.6 s'étend aussi, de façon évidente (aussi bien pour son énoncé que pour sa démonstration), aux 1-*motifs sur* K et aux *groupes de Barsotti-Tate sur* $\mathcal{O}_K$.

Soit maintenant M un *motif* sur K. Pour fixer les idées supposons soit que M est un 1-motif soit que $M = H^m(X)(i)$ où X est une variété propre et lisse sur K, $m \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{Z}$. La seule chose importante est de savoir définir le groupe $M_{tor}(\overline{K})$ des points de torsion de M à valeurs dans $\overline{K}$ qui doit être une représentation de cotype fini. Pour M un 1-motif c'est la définition usuelle ([De75], §10), pour $M = H^m(X)(i)$, on pose $M_{\rm tor}(\overline{K}) = H^m_{ét}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})(i)$.
On peut alors associer à M les objets suivants, tous construits à partir de $M_{\rm tor}(\overline{K})$:
– pour ℓ nombre premier , *la réalisation ℓ-adique de M* est le $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel $H_\ell(M)$ des homomorphismes continus de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $M_{\rm tor}(\overline{K})$,
– *l'espace tangent t_M de M* est le K-espace vectoriel $t_{M_{\rm tor}(\overline{K})} = t_{H_p(M)}$,
– *le groupe $M(\overline{K})$ des points de M à valeurs dans $\overline{K}$* est $E_{\rm disc}(M_{\rm tor}(\overline{K}))$,
– *le complété $\widehat{M}(\overline{K})$ de ce groupe des points* est le groupe topologique $E_+(M_{{\rm tor}(\overline{K})})$,
– *la presque-C-représentation* $E_+(M)$ définie par $E_+(M) = V_p(\widehat{M}(\overline{K})) = E_+(H_p(M))$.

Alors $M(\overline{K})$ s'identifie au sous-groupe de $\widehat{M}(\overline{K})$ formé des points sur lesquels l'action de G_K est discrète ; c'est un sous-groupe dense de $\widehat{M}(\overline{K})$.
Lorsque M est un 1-motif, on a $\widehat{t}_M(\overline{K}) = t_M(C)$ (en particulier, c'est une C-représentation. Ceci est du au fait que les poids de la représentation $H_p(M)$ sont tous ≤ 1, ce qui ne reste pas vrai en général.

Pour toute extension L de K contenue dans $\overline{K}$, posons

$$M(L) = M(\overline{K})^{{\rm Gal}(\overline{K}/L)} = \widehat{M}(\overline{K})^{{\rm Gal}(\overline{K}/L)}$$

(lorsque M est une variété abélienne c'est bien le groupe des points de la variété abélienne à valeurs dans L). La suite exacte

$$0 \to M_{\rm tor}(\overline{K}) \to M(\overline{K}) \to t_M(\overline{K}) \to 0$$

induit une suite exacte

$$0 \to M_{\rm tor}(K) \to M(K) \to t_M \to H^1_e(K, M_{\rm tor}(\overline{K})) \to 0$$

en notant $H^1_e(K, M_{\rm tor}(\overline{K}))$ l'image de t_M dans $H^1(K, M_{\rm tor}(\overline{K}))$ (remarquer que, si $M_{p'-{\rm tor}}(\overline{K})$ est le sous-groupe de $M_{\rm tor}(\overline{K})$ formé des points d'ordre premier à p, on a $H^1_e(K, M_{p'-{\rm tor}}(\overline{K})) = 0$).

Enfin la représentation p-adique $H_p(M)$ est de de Rham et la suite exacte

$$0 \to H_p(M) \to E_+(M) \to \widehat{t}_M(\overline{K}) \to 0$$

induit une suite exacte

$$0 \to H_p(M)^{G_K} \to E_+(M)^{G_K} \to t_M \xrightarrow{\exp_{BK}} H^1_e(K, H_p(M)) \to 0$$

où $\exp_{BK}$ est l'exponentielle de Bloch-Kato.

9 – Principales définitions

1.2 : Banach, réseau, représentation banachique, catégorie exacte, morphisme strict, sous-catégorie stricte, représentation p-adique.
1.3 : C-représentation, C-représentation triviale, B_{dR}^+-représentation.
1.4 : Représentations banachiques presqu'isomorphes, presque C-représentation.
1.5 : Extension presque scindée.
2.1 : $K_\infty[[\underline{t}]]$-représentation de Γ_K.
2.3 : K-petit, petite représentation.
3.1 : Cohomologie continue, presque B_{dR}^+-représentation.
3.5 : Presque supplémentaire, presque scindée.
4.1 : C-algèbre de Banach, spectre maximal, variété spectrale affine, application analytique, groupe spectral commutatif affine, C-structure analytique, banach analytique.
4.2 : Banach anlytique constant, banach analytique vectoriel.
4.3 : Espace de Banach-Colmez présentable.
5.1 : Dimension, hauteur, présentation.
5.3 : K-presque supplémentaire, suite K-presque scindée.
6.1 : Complexe presque trivial.
7.1 : Presqu'isomorphisme.
8.1 : B_{dR}^+-représentation triviale, extensions universelles par une représentation p-adique.
8.2 : Espace tangent d'une représentation p-adique, exponentielle de Bloch-Kato, (φ, N)-module, représentation semi-stable, B_e-représentation.
8.3 : Représentation de cotype fini.
8.4 : Espace tangent d'un motif, groupe des points d'un motif à valeurs dans $\overline{K}$.

10 – Principales notations

1.2 : K, $\overline{K}$, G_K, $\mathcal{B}(G_K)$,
1.3 : C, $\mathrm{Rep}_C(G_K)$, $\mathrm{Rep}_C^{\mathrm{triv}}(G_K)$, t, B_{dR}, B_{dR}^+, B_m, $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$,

11 – Bibliographie

[BK90] S. Bloch and K. Kato, *L-Functions and Tamagawa numbers of motives*, in the Grothendieck Festschrift, vol I, Birkhäuser, Boston (1990), 332–400.

[Co02] P. Colmez, *Espaces de Banach de dimension finie*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 1 (2002), 331–439.

[CF00] P. Colmez et J.-M. Fontaine, *Construction des représentations semi-stables*, Inv.Math. 140 (2000), 1–43.

[De75] P. Deligne *Théorie de Hodge III*, Pub. Math. I.H.E.S. 44 (1975), 5–78.

[DM82] P. Deligne and J. Milne, *Tannakian categories* in Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Lect. Notes Math. 900, Springer, Berlin (1982), 101–228.

[Fo88a] J.-M. Fontaine, *Le corps des périodes p-adiques*, avec un appendice par Pierre Colmez, in Périodes p-adiques, Astérisque 223, Société mathématique de France, Paris (1994), 59–111.

[Fo88b] J.-M. Fontaine, *Représentations p-adiques semi-stables*, in Périodes p-adiques, Astérisque 223, Société mathématique de France, Paris (1994), 59–111.

[Fo00] J.-M. Fontaine, *Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques*, prépublication, Orsay 2000-24.

[Fo02] J.-M. Fontaine, *Analyse p-adique et représentations galoisiennes*, International Congress of Mathematicians 2002, vol.2, Higher Education Press, Beijing (2002), 139–148.

[FP] J.-M. Fontaine et J. Plût, *Espaces de Banach-Colmez*, en préparation.

[FPR94] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, *Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L*, in Motives, Proc. of Symposia in Pure Math. 55-1, Amer. Math. Soc., Providence (1994), 599–706.

[Iv87] B. Iversen, *Cohomology of sheaves*, Springer, Berlin (1987).

[KS90] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer, Berlin (1990).

[La83] G. Laumon, *Sur la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{D}$-modules filtrés*, in Algebraic Geometry Proceedings, Tokyo-Kyoto 1982, Lect. Notes Math. 1016, Springer, Berlin (1983), 151–237.

[NSW00] J. Neukirch, A. Schmidt and K. Vingberg, *Cohomology of Number Fields*, Springer, Berlin (2000).

[PR88] B. Perrin-Riou,*Représentations p-adiques ordinaires*, in Périodes p-adiques, Astérisque 223, Société mathématique de France, Paris (1994), 185–207.

[Qu73] D. Quillen, *Higher algebraic K-Theory : I*, in Algebraic K-Theory I, Lect. Notes Math. 341, Springer, Berlin (1973), 77–139.

[Sen80] S. Sen, *Continuous Cohomology and p-adic Galois Representations,* Invent. Math. 62 (1980), 89–116.

[Se67a] J.-P. Serre, *Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p-divisibles,* Proc. of a conference on local fields, Nuffic Summer School at Driebergen, Springer, Berlin (1967), 118–131.

[Se67b] J.-P. Serre, *Local Class Field Theory*, in Algebraic Number Theory (J.W.S. Cassels and A. Fröhlich ed.), Academic Press, London (1967), 129–161.

[Se89] J.-P. Serre, *Abelian l-adic Representations and Elliptic Curves*, Reprint, Addison-Wesley, Redwood City (1989).

[Se94] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne (5-ième éd.)* Lect. Notes Math. 5, Springer, Berlin (1994).

[Ta67] J. Tate, *p-divisible groups,* Proc. of a conference on local fields, Nuffic Summer School at Driebergen, Springer, Berlin (1967), 158–183.

[Ta76] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology,* Invent. Math. 36 (1976), 257–274.

Jean-Marc Fontaine
Institut Universitaire de France
et UMR 8628 du CNRS,
Mathématique
Université de Paris-Sud
Bâtiment 425
F-91405 ORSAY Cedex
fontaine@math.u-psud.fr