Descente galoisienne sur le second groupe de Chow : mise au point et applications

Александру Сергеевичу Меркурьеву,
в знак скромной дружеской дани

Jean-Louis Colliot-Thélène

Received: June 22, 2014
Revised: May 24, 2015

Résumé. Le troisième groupe de cohomologie étale non ramifié d'une variété projective et lisse, à coefficients dans les racines de l'unité tordues deux fois, intervient dans plusieurs articles récents, en particulier en relation avec le groupe de Chow de codimension 2. Des résultats généraux ont été obtenus à ce sujet par B. Kahn en 1996. De récents travaux, du côté des groupes algébriques linéaires d'une part, du côté de la géométrie algébrique complexe d'autre part, m'incitent à les passer en revue, et à les spécialiser aux variétés proches d'être rationnelles.

2010 Mathematics Subject Classification: 19E15, 14C35, 14C25

Dans tout cet article, on note F un corps de caractéristique zéro, $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $G = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre. On note $\overline{X} = X \times_F \overline{F}$. On note $F(X)$ le corps des fonctions rationnelles de X et $\overline{F}(X)$ le corps des fonctions rationnelles de $\overline{X}$. L'application naturelle entre groupes de Chow de codimension 2

$$CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G$$

n'est en général ni injective ni surjective, même si l'on suppose que X est projective et que l'ensemble $X(F)$ des points rationnels de X est non vide – à la différence du cas bien connu de $CH^1(X)$.

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des noyau et conoyau de cette application et aux liens entre le groupe de Chow de codimension deux et le troisième groupe de cohomologie non ramifiée de X à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$, groupe noté $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Citons en particulier [6], Raskind et l'auteur [10], Lichtenbaum [23], Kahn [19, 20], C. Voisin et l'auteur [11], Pirutka [29], Kahn et l'auteur [8], Merkurjev [4, 24, 25, 26], Voisin [34].
Une des raisons de s'intéresser au groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est que c'est un invariant F-birationnel des F-variétés projectives et lisses, réduit à $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ si la F-variété X est F-birationnelle à un espace projectif.

Le résultat principal du présent article est le Théorème 4.1, qui s'applique à toute variété projective et lisse géométriquement rationnellement connexe, et qui dans le cas particulier des variétés géométriquement rationnelles établit (Corollaire 4.2) une suite exacte

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \to$$

$$\to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to$$

$$H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times)$$

sous l'une des deux hypothèses supplémentaires :
(i) La F-variété X possède un F-point.
(ii) La dimension cohomologique de F est au plus 3.

Décrivons la structure de l'article.

Le §1 est consacré à des rappels de résultats fondamentaux sur la $\mathcal{K}$-cohomologie, la cohomologie non ramifiée et la cohomologie motivique. On y rappelle aussi (Prop. 1.3) un résultat de [8] apportant une correction à [20].

Au §2, sous l'hypothèse que le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible, on établit par deux méthodes différentes (l'une K-théorique, l'autre motivique) une suite exacte générale (Propositions 2.4 et 2.6). On suppose ici la variété X lisse et géométriquement intègre, mais non nécessairement propre. Ceci s'applique en particulier aux espaces classifiants de groupes semisimples considérés par Merkurjev [24].
La première méthode, à l'ancienne, via la K-cohomologie, est celle des articles [10], [11]. La seconde méthode fait usage des groupes de cohomologie motivique à coefficients $\mathbb{Z}(2)$, comme dans l'article [20] de Bruno Kahn. De ce point de vue, on ne fait que généraliser [20, Thm. 1, Corollaire], avec la correction mentionnée ci-dessus. Lorsque le corps de base est de dimension cohomologique au plus 1, auquel cas la correction n'est pas utile, et lorsque de plus les variétés considérées sont projectives, ces suites exactes ont déjà été utilisées dans [11] et [8].

Au §3, pour X projective et lisse, on donne des conditions permettant de contrôler le groupe $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ apparaissant dans les suites exactes du §2. On donne une application aux surfaces $K3$ définies sur $\mathbb{C}((t))$.

Au §4, on combine les résultats des paragraphes précédents pour établir les résultats principaux de l'article, le théorème 4.1 et son corollaire 4.2 cité cidessus.

Au §5, on applique les résultats du §4 aux hypersurfaces de Fano complexes. Pour $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ hypersurface lisse de degré $d \leq n$ et F corps quelconque contenant $\mathbb{C}$, on établit $H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ dans chacun des cas suivants : pour $n > 5$; pour $n = 5$ sous réserve que l'on ait $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$; pour $n = 4$ lorsqu'il existe un cycle universel de codimension 2. On fait le lien avec les résultats de Auel, Parimala et l'auteur [2] et de C. Voisin [33, 34] sur les hypersurfaces cubiques et sur les cycles universels de codimension 2, résultats sur lesquels on donne un nouvel éclairage – la K-théorie algébrique remplaçant certains arguments de géométrie complexe (voir la démonstration du théorème 5.4).

Par rapport à la première version de cet article, mise sur arXiv en février 2013, cet article diffère essentiellement par le contenu du présent §5, motivé par le travail [2] et par les articles [33, 34] de C. Voisin.

Terminons cette introduction en indiquant ce qui n'est pas fait dans cet article.

(i) Je n'ai pas vérifié que les arguments dans la littérature utilisant les complexes $\mathbb{Z}(2)$ de Voevodsky sont compatibles avec ceux utilisant le complexe $\Gamma(2)$ de Lichtenbaum ou avec ceux utilisant les groupes de cycles supérieurs de Bloch, dont il est fait usage dans [8]. Et je n'ai pas vérifié que dans les suites exactes des Propositions 2.4 et 2.6, dont les termes sont identiques, les flèches aussi coïncident. Ceci n'affecte pas les principaux résultats de l'article. Le lecteur vérifiera en effet que la Proposition 2.4, établie par des méthodes à l'ancienne via la Proposition 1.3, suffit à établir tous les résultats des paragraphes 3, 4, 5, à l'exception du lemme 5.7 (ii), du théorème 5.6 (viii) et de l'assertion de surjectivité de l'application $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ dans le théorème 5.8 (iii).

(ii) Les longues suites exactes des Propositions 2.4 et 2.6, le théorème 4.1 et le corollaire 4.2 devraient se spécialiser en un certain nombre des longues suites exactes pour les variétés classifiantes de groupes algébriques linéaires connexes établies par Blinstein-Merkurjev [4] et par Merkurjev [24, 25]. Je me suis contenté d'allusions à ces articles en divers points du texte.

(iii) Sur un corps de base de caractéristique positive, l'utilisation de la cohomologie de Hodge-Witt logarithmique permet de donner des analogues de certains des résultats du présent travail. Nous renvoyons pour cela aux articles [20] et [8].

Remerciements. Cet article fait suite à des travaux et discussions avec Bruno Kahn, et à des travaux de A. Merkurjev et de C. Voisin. Je remercie le rapporteur pour sa lecture critique du tapuscrit.

1 Rappels, propriétés générales

On utilise dans cet article le complexe motivique $\mathbb{Z}(2)$ de faisceaux de cohomologie étale sur les variétés lisses sur un corps, tel qu'il a été défini par Lichtenbaum [22, 23].
Les groupes de cohomologie à valeurs dans le complexe $\mathbb{Z}(2)$ sont dans tout cet article les groupes d'hypercohomologie étale. Ils sont notés $\mathbb{H}^i(X, \mathbb{Z}(2))$.
Sur un schéma X, on note $H^i(X, \mathcal{K}_j)$ les groupes de cohomologie de Zariski à valeurs dans le faisceau $\mathcal{K}_j$ sur X associé au préfaisceau $U \mapsto K_i(H^0(U, \mathcal{O}_X))$, où la K-théorie des anneaux est la K-théorie de Quillen.
Étant donné un module galoisien M, c'est-à-dire un G-module continu discret, on note tantôt $H^i(G, M)$ tantôt $H^i(F, M)$ les groupes de cohomologie galoisienne à valeurs dans M.
On note $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ le module galoisien $\varinjlim_n \mu_n^{\otimes 2}$.
On note $K_3F_{indec} := \mathrm{Coker}[K_3^{Milnor}F \to K_3^{Quillen}F]$.
On a les propriétés suivantes, conséquences de travaux de Merkurjev et Suslin [27], de A. Suslin [30], de M. Levine [21], de S. Lichtenbaum [23], de B. Kahn [19], [20, Thm. 1.1, Lemme 1.4].
$\mathbb{H}^0(F, \mathbb{Z}(2)) = 0$.
$\mathbb{H}^1(F, \mathbb{Z}(2)) = K_3F_{indec}$.
$\mathbb{H}^2(F, \mathbb{Z}(2)) = K_2F$.
$\mathbb{H}^3(F, \mathbb{Z}(2)) = 0$.
$\mathbb{H}^i(F, \mathbb{Z}(2)) = H^{i-1}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ si $i \geq 4$.
$\mathbb{H}^i(\overline{F}, \mathbb{Z}(2)) = 0$ si $i \neq 1, 2$.
$\mathbb{H}^1(\overline{F}, \mathbb{Z}(2)) = K_3(\overline{F})_{indec}$ est divisible, et sa torsion est $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$ (cf. [19, (1.2)]). Il est donc extension d'un groupe uniquement divisible par $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$.
$\mathbb{H}^2(\overline{F}, \mathbb{Z}(2)) = K_2(\overline{F})$ est uniquement divisible.

Soit X une F-variété lisse géométriquement intègre, non nécessairement projective. On a :
$\mathbb{H}^0(X, \mathbb{Z}(2)) = 0$.
$\mathbb{H}^1(X, \mathbb{Z}(2)) = K_{3,indec}F(X)$.
$\mathbb{H}^1(\overline{X}, \mathbb{Z}(2)) = K_{3,indec}\overline{F}(X)$ est extension d'un groupe uniquement divisible par $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)$. Ceci résulte de la suite exacte [19, (1.2)] et de [30, Thm. 3.7]).
$\mathbb{H}^2(X, \mathbb{Z}(2)) = H^0(X, \mathcal{K}_2)$.
$\mathbb{H}^3(X, \mathbb{Z}(2)) = H^1(X, \mathcal{K}_2)$.
On a la suite exacte fondamentale (Lichtenbaum, Kahn [20, Thm. 1.1])

$$0 \to CH^2(X) \to \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0 \tag{1.1}$$

où

$$H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^0(X, \mathcal{H}^3(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)))$$

est le sous-groupe de $H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ formé des éléments non ramifiés en tout point de codimension 1 de X.

Pour toute F-variété projective, lisse et géométriquement intègre X, dans l'article [10] avec W. Raskind, on a établi que les groupes $H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)$ et $H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)$ sont chacun extension d'un groupe fini par un groupe divisible. Si la dimension cohomologique de F satisfait $\mathrm{cd}(F) \leq i$, ceci implique que les groupes de cohomologie galoisienne $H^r(G,H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2))$ et $H^r(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2))$ sont nuls pour $r \geq i+1$.

On a une suite spectrale

$$E_2^{pq} = H^p(G,\mathbb{H}^q(\overline{X},\mathbb{Z}(2))) \Longrightarrow \mathbb{H}^n(X,\mathbb{Z}(2)).$$

Remarque 1.1. Pour $X = \mathrm{Spec}(F)$, compte tenu des identifications ci-dessus, cette suite spectrale donne une suite exacte

$$H^1(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to K_2F \to K_2\overline{F}^G \to H^2(G,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0.$$

Ceci est un cas particulier de [19, Thm. 2.1].

En comparant la suite exacte fondamentale (1.1) au niveau F et au niveau $\overline{F}$, en prenant les points fixes de G agissant sur la suite au niveau $\overline{F}$, et en utilisant le lemme du serpent, on obtient :

Proposition 1.2. *Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre. Soit $\varphi : \mathbb{H}^4(X,\mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{H}^4(\overline{X},\mathbb{Z}(2))^G$. On a alors une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to \\ \to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\ \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to \mathrm{Coker}(\varphi). \end{aligned}$$

Notons

$$\mathcal{N}(X) := \mathrm{Ker}\Big[H^2(G,K_2(\overline{F}(X)) \to H^2(G,\bigoplus_{x\in\overline{X}^{(1)}}\overline{F}(x)^\times)\Big] \tag{1.2}$$

L'énoncé suivant est essentiellement établi dans [8].

Proposition 1.3. *Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre.*
(a) On a une suite exacte

$$\begin{aligned} H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\ \to \mathcal{N}(X) \to \mathrm{Ker}[H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(F(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]. \end{aligned}$$

(b) Si $X(F) \neq \emptyset$ ou si $\mathrm{cd}(F) \leq 3$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \xrightarrow{\simeq} \mathcal{N}(X).$$

(c) Si X est de dimension au plus 2, on a une suite exacte

$$\begin{aligned} H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) \to \mathcal{N}(X) \to \\ \to H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(F(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)). \end{aligned}$$

Démonstration. L'énoncé (a) est [8, Prop. 6.1, Prop. 6.2]. L'énoncé (b) est une conséquence facile de (a). La proposition 6.1 de [8] montre aussi que, si X est de dimension au plus 2, alors le complexe

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) \to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\ \to \mathcal{N}(X) \to H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est une suite exacte

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \\ \to \mathcal{N}(X) \to H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

En effet les groupes $H^3(A_s, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ intervenant dans la proposition 6.1 de [8] sont alors nuls : via la conjecture de Gersten, cela résulte du fait que le corps des fractions de A_s est de dimension cohomologique 2, si bien que le complexe de la proposition 6.1 de [8] est alors exact. □

2 Le cas où le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible

Le but de ce pagragraphe est d'établir la proposition 2.4. On le fait d'abord par une méthode "K-théorique" (paragraphe 2.1) qui se prête plus aux calculs explicites des flèches intervenant dans les suites exactes. La version "motivique" (paragraphe 2.2) est plus souple quand il s'agit d'étudier la fonctorialité en la F-variété X des suites concernées.

Dans ce paragraphe, on considère une F-variété X lisse et géométriquement intègre, telle que le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible, mais on ne suppose pas X projective.

2.1 Méthode K-théorique

Pour $i \geq 1$, les flèches naturelles

$$H^i(G, K_2\overline{F}(X)) \to H^i(G, K_2\overline{F}(X)/K_2\overline{F}) \to H^i(G, K_2\overline{F}(X)/H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

sont alors des isomorphismes.

D'après un théorème de Quillen (conjecture de Gersten pour la K-théorie), le complexe

$$K_2\overline{F}(X) \to \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(1)}} \overline{F}(x)^\times \to \bigoplus_{x \in \overline{X}^{(2)}} \mathbb{Z}$$

est le complexe des sections globales d'une résolution flasque du faisceau $\mathcal{K}_2$ sur la $\overline{F}$-variété lisse $\overline{X}$.

Ce complexe donne donc naissance à trois suites exactes courtes de modules galoisiens :

$$0 \to K_2\overline{F}(X)/H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2) \to Z \to H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2) \to 0$$
$$0 \to Z \to \oplus_{x\in\overline{X}^{(1)}}\overline{F}(x)^\times \to I \to 0$$
$$0 \to I \to \oplus_{x\in\overline{X}^{(2)}}\mathbb{Z} \to CH^2(\overline{X}) \to 0.$$

En utilisant le théorème 90 de Hilbert et le lemme de Shapiro, le théorème de Merkurjev–Suslin et en particulier sa conséquence [6, Thm. 1] [30, 1.8]

$$K_2F(X)/K_2F = (K_2\overline{F}(X)/K_2\overline{F})^G,$$

par des arguments classiques (cf. [10, 11]) de cohomologie galoisienne, on obtient :

PROPOSITION 2.1. *Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre telle que le groupe $H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)$ soit uniquement divisible. Soit $\mathcal{N}(X)$ comme en (1.2). On a alors une suite exacte*

$$\begin{aligned}0 \to H^1(X,\mathcal{K}_2) \to H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)^G \to \\ \to H^1(G,K_2\overline{F}(X)) \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \to \\ \to H^1(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)) \to \mathcal{N}(X) \to \\ \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^2(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)).\end{aligned}$$

Pour toute F-variété X géométriquement intègre, un théorème de B. Kahn [19, Cor. 2, p. 70] donne un isomorphisme

$$H^1(G,K_2\overline{F}(X)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ker}[H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(F(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].$$

On a donc établi :

PROPOSITION 2.2. *Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre telle que le groupe $H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)$ soit uniquement divisible. Soit $\mathcal{N}(X)$ comme en (1.2). On a alors une suite exacte*

$$\begin{aligned}0 \to H^1(X,\mathcal{K}_2) \to H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)^G \to \\ \to \mathrm{Ker}[H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(F(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\ \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \to H^1(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)) \to \mathcal{N}(X) \to \\ \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^2(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)).\end{aligned}$$

Remarque 2.3. Soit X un espace principal homogène d'un F-groupe semisimple simplement connexe absolument presque simple. On a $K_2(\overline{F}) = H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)$, et ce groupe est donc uniquement divisible. On a par ailleurs $H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2) = \mathbb{Z}$ avec action triviale du groupe de Galois. L'image de 1 par l'application

$$H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)^G \to H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est (au signe près) l'invariant de Rost de X. Pour tout ceci, voir [16, Part II, §6].

En combinant les propositions 2.2 et 1.3 on trouve :

Proposition 2.4. *Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre. Supposons le groupe $H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)$ uniquement divisible. Sous l'une des hypothèses $X(F)\neq\emptyset$ ou $\mathrm{cd}(F)\leq 3$, on a une suite exacte*

$$\begin{aligned}
0 &\to H^1(X,\mathcal{K}_2)\to H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)^G\to\\
&\to \mathrm{Ker}[H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\to H^3(F(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]\to\\
&\to \mathrm{Ker}[CH^2(X)\to CH^2(\overline{X})^G]\to H^1(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2))\to\\
&\to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\to H^3_{nr}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]\to\\
&\to \mathrm{Coker}[CH^2(X)\to CH^2(\overline{X})^G]\to H^2(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2)).
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse $X(F)\neq\emptyset$, le groupe

$$\mathrm{Ker}[H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\to H^3(F(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$$

est nul.

Remarque 2.5. Sous l'hypothèse $K_2(\overline{F})=H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)$ et $H^3_{nr}(\overline{X},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))=0$, on retrouve l'énoncé de B. Kahn [20, Thm. 1, Corollaire].

2.2 Méthode motivique

Toujours *sous l'hypothèse que le groupe $H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)\simeq\mathbb{H}^2(\overline{X},\mathbb{Z}(2))$ est uniquement divisible*, étudions la suite spectrale

$$E_2^{pq}=H^p(G,\mathbb{H}^q(\overline{X},\mathbb{Z}(2)))\Longrightarrow\mathbb{H}^n(X,\mathbb{Z}(2)).$$

La page E_2^{pq} contient un certain nombre de zéros. Tous les termes E_2^{p0} sont nuls. Comme $\mathbb{H}^2(\overline{X},\mathbb{Z}(2))$ est supposé uniquement divisible, tous les termes $E_2^{p2}=H^p(G,\mathbb{H}^2(\overline{X},\mathbb{Z}(2)))$ pour $p\geq 1$ sont nuls. Les termes E_2^{p1} sont égaux à $H^p(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour $p\geq 2$, groupe qui coïncide avec $H^{p+1}(F,\mathbb{Z}(2))$ pour $p\geq 3$. La flèche $E_2^{02}\to E_2^{21}$, soit $H^0(\overline{X},\mathcal{K}_2)^G\to H^2(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, est surjective, car il en est déjà ainsi de $K_2\overline{F}^G\to H^2(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ (Remarque 1.1).
Notons comme ci-dessus $\varphi:\mathbb{H}^4(X,\mathbb{Z}(2))\to\mathbb{H}^4(\overline{X},\mathbb{Z}(2))^G$. L'analyse de la suite spectrale donne les énoncés suivants.

1) Il y a une suite exacte

$$\begin{aligned}
0\to\mathbb{H}^3(X,\mathbb{Z}(2))\to(\mathbb{H}^3(\overline{X},\mathbb{Z}(2))^G\to\mathbb{H}^4(F,\mathbb{Z}(2))\to\mathrm{Ker}(\varphi)\to\\
\to H^1(G,H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2))\to\mathrm{Ker}[\mathbb{H}^5(F,\mathbb{Z}(2))\to\mathbb{H}^5(X,\mathbb{Z}(2))].
\end{aligned}$$

Ainsi il y a une suite exacte

$$\begin{aligned}
0\to H^1(X,\mathcal{K}_2)\to(H^1(\overline{X},\mathcal{K}_2))^G\to H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\to\mathrm{Ker}(\varphi)\to\\
\to H^1(G,\mathbb{H}^3(\overline{X},\mathbb{Z}(2)))\to\mathrm{Ker}[H^4(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))\to H^4(F(X),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))].
\end{aligned}$$

En particulier, si $X(F) \neq \emptyset$ ou si l'on a $\mathrm{cd}(F) \leq 3$, alors on a une suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to (H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))^G \to$$
$$\to H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to 0.$$

La flèche $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Ker}(\varphi)$ est injective si $X(F) \neq \emptyset$, ou si $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul, par exemple si $\mathrm{cd}(F) \leq 2$.

2) Pour le conoyau de φ, on trouve une suite exacte

$$0 \to D \to \mathrm{Coker}(\varphi) \to H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

où D est un sous-quotient de $\mathrm{Ker}[\mathbb{H}^5(F, \mathbb{Z}(2)) \to \mathbb{H}^5(X, \mathbb{Z}(2))]$. Ce dernier groupe est nul si le noyau de $H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul. En particulier $D = 0$ si $X(F) \neq \emptyset$, ou si $\mathbb{H}^5(F, \mathbb{Z}(2)) = H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est nul, par exemple si $\mathrm{cd}(F) \leq 3$.

En utilisant la proposition 1.2, on voit que pour toute F-variété X lisse géométriquement intègre avec $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible, sous l'hypothèse que soit $X(F) \neq \emptyset$ soit $\mathrm{cd}(F) \leq 3$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to$$
$$\to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to$$
$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)).$$

et une suite exacte

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Ker}(\varphi) \to H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to 0.$$

Si l'on quotiente les deux termes $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathbb{H}^4(X, \mathbb{Z}(2))$ et $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ par l'image de $\mathbb{H}^4(F, \mathbb{Z}(2)) \simeq H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, ce qui par fonctorialité de la suite spectrale appliquée au morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(F)$ induit une flèche $\mathrm{Ker}(\varphi)/\mathbb{H}^4(F, \mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, on trouve :

Proposition 2.6. *Soit X une F-variété lisse et géométriquement intègre. Supposons que $H^0(\overline{X}, K_2)$ est uniquement divisible. Supposons en outre que l'on a $X(F) \neq \emptyset$ ou $\mathrm{cd}(F) \leq 3$. On a alors une suite exacte*

$$0 \to H^1(X, \mathcal{K}_2) \to H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)^G \to$$
$$\to \mathrm{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to$$
$$\to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \to$$
$$\to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to$$
$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)).$$

Sous l'hypothèse $X(F) \neq \emptyset$, le groupe

$$\mathrm{Ker}[H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))]$$

est nul.

Remarques 2.7. (a) La démonstration n'utilise ni le groupe $\mathcal{N}(X)$ défini en (1.2) ni la proposition 1.3.
(b) L'énoncé de cette proposition est identique à celui de la proposition 2.4, mais il n'est pas clair a priori que les flèches intervenant dans ces deux suites exactes coïncident.

2.3 Comparaison entre les deux méthodes

Supposons $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible. On a une suite exacte

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \to H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \xrightarrow{\rho} \\ \xrightarrow{\rho} \mathcal{N}(X) \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]$$

extraite de la proposition 2.2, et utilisée dans la démonstration de la proposition 2.4. On a une suite exacte

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \to \mathrm{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\sigma} \\ \xrightarrow{\sigma} \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]$$

extraite de la proposition 1.2 et utilisée dans la démonstration de la proposition 2.6. Les termes de gauche et de droite dans ces deux suites exactes coïncident. Sous réserve de vérification des commutativités des diagrammes, sur tout corps F (sans condition de dimension cohomologique), le lien entre ces deux suites est fourni par le diagramme de suites exactes verticales

$$\begin{tikzcd}
H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \arrow[r, "="] \arrow[d] & H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\left[H^3_{\mathrm{nr}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{\mathrm{nr}}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \right] \arrow[d] \\
H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathcal{N}(X) \arrow[d] \\
\mathrm{Ker}\left[H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) \to H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \right] \arrow[r, "="] & \mathrm{Ker}\left[H^4(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2) \to H^4(F(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \right]
\end{tikzcd}$$

où la suite verticale de droite vaut pour toute F-variété lisse et géométriquement intègre X ([8], voir la proposition 1.3 ci-dessus), et où celle de gauche est établie au début de la section 2.2 pour les F-variétés X telles que $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible.

2.4 Variétés avec $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ uniquement divisible

2.4.1 Les espaces classifiants de groupes semisimples

Soit H un F-groupe semisimple connexe, soit V une représentation linéaire génériquement libre de H possédant un ouvert H-stable $U \subset V$, de complémentaire un fermé de codimension au moins 3 dans V, et tel que que l'on dispose d'une application quotient $U \to U/H$ qui soit un H-torseur. Soit $X := U/H$. Soit H_{sc} le revêtement simplement connexe de H et soit C le noyau de l'isogénie $H_{sc} \to H$, puis $\hat{C}$ le module galoisien fini défini par son groupe des caractères. Comme le montre Merkurjev dans [24, Thm. 5.3], on a des identifications

$$K_2(\overline{F}) = H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$$

et

$$\hat{C}(1) := \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\hat{C}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(1)) \simeq H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2).$$

Le groupe $K_2(\overline{F})$ est uniquement divisible. La F-variété X possède un point F-rationnel.
La proposition 2.4 et la proposition 2.6 donnent donc chacune une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^1(G, \hat{C}(1)) \to \\ \to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to \\ \to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \to H^2(G, \hat{C}(1)). \end{aligned}$$

Il serait intéressant de déterminer le lien entre la suite exacte à 5 termes obtenue par Merkurjev [25, Thm. 3.9] et les suites exactes à 5 termes ci-dessus. Elles ont en commun leurs deux premiers termes, et leur dernier terme.

2.4.2 Variétés projectives

Pour $\overline{F}$ un corps algébriquement clos – toujours supposé de caractéristique nulle – et Y une $\overline{F}$-variété intègre, projective et lisse, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) Le groupe de Picard $\mathrm{Pic}(Y)$ est sans torsion.
(ii) Pour tout entier $n > 0$, $H^1_{\text{ét}}(Y, \mu_n) = 0$.
(iii) $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ et le groupe de Néron–Severi $\mathrm{NS}(Y)$ est sans torsion.
(iv) Le groupe $H^0(Y, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible.
L'équivalence des trois premières propriétés est classique. Pour l'équivalence avec la quatrième, voir [10, Prop. 1.13], qui s'appuie sur des résultats de Merkurjev et de Suslin.

Les propriétés ci-dessus sont satisfaites par toute $\overline{F}$-variété projective et lisse géométriquement unirationnelle, mais aussi par toute surface $K3$ et par toute surface projective et lisse dans l'espace projectif $\mathbf{P}^3$.
Pour une $\overline{F}$-surface Y projective et lisse satisfaisant ces propriétés, la dualité de Poincaré implique la nullité des groupes $H^3_{\text{ét}}(Y, \mu_n)$ pour tout $n > 0$. On sait

(Bloch, Merkurjev–Suslin, cf. [10, (2.1)]) que la nullité de ces groupes implique que le groupe de Chow $CH^2(Y)$ n'a pas de torsion.
Pour une F-surface X projective, lisse et géométriquement intègre telle que $\overline{X}$ satisfasse ces propriétés, le groupe $\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})]$ coïncide donc avec le sous-groupe de torsion $CH^2(X)_{tors}$ de $CH^2(X)$.

Sans hypothèse supplémentaire sur X, il est difficile de contrôler le module galoisien $H^1(\overline{X}, K_2)$ et l'application

$$CH^2(X)_{tors} = \mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \to H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)).$$

Renvoyons ici le lecteur au délicat travail d'Asakura et Saito [1] qui établit que pour un corps p-adique F et une surface lisse dans $\mathbf{P}^3_F$, de degré au moins 5 "très générale", le groupe

$$CH^2(X)_{tors} \subset H^1(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

est infini.
Au paragraphe suivant, on donnera des hypothèses restrictives permettant de facilement contrôler le module $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ et sa cohomologie galoisienne.

3 Le module galoisien $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$

On considère la flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times \to H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2).$$

Proposition 3.1. *Soit X une F-variété projective, lisse et géométriquement intègre. Supposons $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et supposons que les groupes $H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont sans torsion. Alors pour tout $i \geq 2$, la flèche*

$$H^i(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \to H^i(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après [10, Thm. 2.12], la flèche Galois équivariante

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times \to H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$$

a alors noyau et conoyau uniquement divisibles. Elle induit donc un isomorphisme sur $H^i(G, \bullet)$ pour $i \geq 2$. □

Remarque 3.2. L'hypothèse que les groupes $H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont sans torsion est équivalente à l'hypothèse que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\overline{X})$ est un groupe divisible.

Proposition 3.3. *Soit X une F-variété projective, lisse et géométriquement intègre. Supposons qu'il existe une courbe $V \subset X$ telle que sur un domaine* *universel Ω l'application $CH_0(V_\Omega) \to CH_0(X_\Omega)$ est surjective, et supposons que les groupes $H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont sans torsion. Alors pour tout $i \geq 1$, la flèche*

$$H^i(G, \operatorname{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \to H^i(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après [10, Thm. 2.12 ; Prop. 2.15], sous les hypothèses de la proposition, la flèche Galois-équivariante

$$\operatorname{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times \to H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$$

est surjective et a un noyau uniquement divisible. Elle induit donc un isomorphisme sur $H^i(G, \bullet)$ pour $i \geq 1$. □

Remarques 3.4. Rappelons que l'on suppose $\operatorname{car}(F) = 0$.
(a) L'hypothèse sur le groupe de Chow des zéro-cycles faite dans la proposition 3.3 implique $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i \geq 2$. Elle implique que le groupe de Brauer $\operatorname{Br}(\overline{X})$ est un groupe fini. Elle est satisfaite pour les variétés $\overline{X}$ dominées rationnellement par le produit d'une courbe et d'un espace projectif, en particulier elle est satisfaite pour les variétés géométriquement unirationnelles.
(b) Sous les hypothèses de la proposition 3.3, on a $\operatorname{Br}(\overline{X}) = 0$.
(c) Toutes les hypothèses de la proposition 3.3 sont satisfaites pour une variété $\overline{X}$ qui est facteur direct birationnel d'une variété rationnelle.

La proposition suivante (cf. [11, Prop. 8.10]) s'applique par exemple aux surfaces $K3$ sur F corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{C}$, ou sur $F = \mathbb{C}((t))$.

Proposition 3.5. *Supposons le corps F de dimension cohomologique au plus 1. Soit X une F-surface projective, lisse, géométriquement connexe, satisfaisant $H^1(X, O_X) = 0$. Supposons le groupe $\operatorname{Pic}(\overline{X}) = \operatorname{NS}(\overline{X})$ sans torsion. On a alors un homomorphisme surjectif*

$$H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \operatorname{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G].$$

Si l'indice $I(X)$ de X, qui est le pgcd des degrés sur F des points fermés de X, n'est pas égal à 1, alors $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0$.

Démonstration. Sous les hypothèses de la proposition, le groupe $H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est uniquement divisible [10, Cor. 1.12]. Le groupe $H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$ est extension d'un groupe fini par un groupe divisible [10, Thm. 2.2], donc $H^2(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2)) = 0$. Comme X est une surface, on a $H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. La surjection résulte alors de la proposition 2.4 (ou de la proposition 2.6). Pour la surface X, on a la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to A_0(\overline{X}) \to CH^2(\overline{X}) \to \mathbb{Z} \to 0,$$

où la flèche $CH^2(\overline{X}) \to \mathbb{Z}$ est donnée par le degré des zéro-cycles. L'hypothèse $H^1(X, O_X) = 0$ implique que le groupe $A_0(\overline{X})$ est uniquement divisible (théorème de Roitman). L'application induite $CH^2(\overline{X})^G \to \mathbb{Z}$ est donc surjective, et le groupe $\operatorname{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]$ a pour quotient le groupe $\mathbb{Z}/I(X)$. □

Exemple 3.6. Soit $F = \mathbb{C}((t))$. Soient $n > 0$ un entier et $X \subset \mathbf{P}^3_F$ la surface définie par l'équation homogène

$$x_0^n + tx_1^n + t^2x_2^n + t^3x_3^n = 0.$$

D'après [13, Prop. 4.4], pour $n = 4$ (surface $K3$) et pour n premier à 6, on a $I(X) \neq 1$. La proposition ci-dessus donne alors $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0$.

4 Variétés à petit motif sur un corps non algébriquement clos

Commençons par un énoncé général mais peut-être un peu lourd.

THÉORÈME 4.1. *Soit X une F-variété projective, lisse et géométriquement intègre.*
Supposons satisfaites les conditions :
(i) Sur un domaine universel Ω, le degré $CH_0(X_\Omega) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.
(ii) Le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{NS}(\overline{X})$ est sans torsion.
(iii) Pour tout ℓ premier, le groupe $H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion.
(iv) On a au moins l'une des propriétés : $X(F) \neq \emptyset$ ou $\mathrm{cd}(F) \leq 3$.
Alors on a une suite exacte

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \xrightarrow{\alpha} H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \to$$
$$\to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to$$
$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \xrightarrow{\beta} H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times).$$

Sous l'hypothèse $X(F) \neq \emptyset$ ou $\mathrm{cd}(F) \leq 2$, la flèche α est injective.

Démonstration. Comme on a supposé $\mathrm{car}(F) = 0$, d'après [5], l'hypothèse (i) implique que tous les groupes $H^i(X, \mathcal{O}_X)$ pour $i \geq 1$ sont nuls, que l'on a $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{NS}(\overline{X})$, et que le groupe de Brauer $\mathrm{Br}(\overline{X})$ s'identifie au groupe fini $\oplus_\ell H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)_{tors}$. Sous l'hypothèse (i), l'hypothèse (iii) est donc équivalente à $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$.
Sous les hypothèses (i) et (iii), la proposition 3.3 donne

$$H^i(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \xrightarrow{\simeq} H^i(G, H^1(\overline{X}, \mathcal{K}_2))$$

pour tout $i \geq 1$.
Sous les hypothèses (i) et (ii), d'après [10, Prop. 1.14], on a $K_2\overline{F} = H^0(\overline{X}, \mathcal{K}_2)$. Le groupe $K_2\overline{F}$ étant uniquement divisible, on peut appliquer la Proposition 2.4 (ou la proposition 2.6). □

COROLLAIRE 4.2. *Soit X une F-variété projective, lisse et géométriquement intègre.*
Supposons $X(F) \neq \emptyset$ ou $\mathrm{cd}(F) \leq 3$.
Supposons satisfaite l'une des hypothèses suivantes :
(i) la variété $\overline{X}$ est rationnelle ;

(ii) la variété $\overline{X}$ *est rationnellement connexe, et l'on a* $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$ *et* $H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ *;*
(iii) la variété $\overline{X}$ *est de dimension 3, rationnellement connexe, et* $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$ *;*
(iv) la variété $\overline{X}$ *est de dimension 3, unirationnelle, et* $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$.
Alors on a une suite exacte

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \xrightarrow{\alpha} H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \to$$

$$\to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to$$

$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \xrightarrow{\beta} H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times).$$

Sous l'hypothèse $X(F) \neq \emptyset$ *ou* $\mathrm{cd}(F) \leq 2$*, la flèche* α *est injective.*

Démonstration. Le cas (iv) est un cas particulier du cas (iii). Sous l'hypothèse (i), tous les groupes $H^i_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ sont nuls pour $i \geq 1$. Pour $i = 1$, cela établit que $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est sans torsion et donc $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{NS}(\overline{X})$. Pour $i = 2$, cela établit $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$ et donc $H^3_{\text{ét}}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell)_{tors} = 0$ pour tout premier ℓ.
Sous l'hypothèse (iii), on a $H^3_{nr}(\overline{X}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Cette annulation vaut en effet pour tout solide uniréglé [11, Cor. 6.2], c'est un corollaire d'un théorème de C. Voisin.
L'énoncé est alors une conséquence immédiate du théorème 4.1. □

Remarques 4.3. (a) Dans le cas particulier où X est une F-compactification lisse équivariante d'un F-tore, le corollaire 4.2 est très proche d'un résultat de Blinstein et Merkurjev ([4, Prop. 5.9]). Dans ce cas, le groupe $CH^2(\overline{X})$ est sans torsion, le groupe

$$\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]$$

coïncide donc avec $CH^2(X)_{tors}$. Par ailleurs, l'intersection des cycles

$$\mathrm{Pic}(\overline{X}) \times \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to CH^2(\overline{X})$$

induit une application naturelle surjective ([15, §5.2, Proposition, p. 106])

$$\mathrm{Sym}^2(\mathrm{Pic}(\overline{X})) \to CH^2(\overline{X}).$$

(b) Soit X une F-compactification lisse d'un F-tore. La flèche

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

intervient dans l'étude de l'approximation faible pour X sur le corps F des fonctions d'une courbe sur un corps p-adique (Harari, Scheiderer, Szamuely [18, Thm. 4.2]). Pour X une F-compactification lisse d'un espace principal homogène d'un F-tore, il conviendrait de comparer la flèche

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times) \to H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

ici obtenue (le corps F satisfaisant $cd(F) \leq 3$) avec l'application (19) utilisée dans [17, Thm. 5.1].

(c) Soit X/F une surface projective, lisse, géométriquement rationnelle possédant un zéro-cycle de degré 1, et telle que le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ soit un facteur direct d'un module de permutation. Le corollaire ci-dessus implique alors $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \stackrel{\simeq}{\to} H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. C'est un cas particulier d'une remarque générale pour toute telle surface. Si le module galoisien $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est un facteur direct d'un module de permutation, alors, d'après [6, Prop. 4, p. 12], sur tout corps L contenant F, l'application degré $CH_0(X_L) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Ceci implique $H^i(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \stackrel{\simeq}{\to} H^i_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour tout entier i (cas particulier d'un théorème de Merkurjev, cf. [2, Thm. 1.4]).

(d) Dans l'article [9] avec Madore, on a construit des exemples de corps F de dimension cohomologique 1 et de surfaces X/F projectives, lisses, géométriquement rationnelles sans zéro-cycle de degré 1. Pour de telles surfaces, le corollaire 4.2 ci-dessus donne

$$H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq 0.$$

(e) Pour X une F-variété projective, lisse, géométriquement connexe quelconque, chacun des trois groupes suivants est un invariant F-birationnel de X :
– le groupe $\mathrm{Ker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]$
– le groupe $H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times)$
– le groupe $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.
Si la dimension cohomologique de F est au plus 1, le groupe

$$\mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]$$

est un invariant F-birationnel, comme on voit en considérant la situation de l'éclatement en une sous-variété lisse. En général, ce groupe n'est pas un invariant birationnel, comme on peut voir en éclatant $\mathbf{P}^3_F$ en une F-conique lisse sans F-point. Ceci montre aussi que l'application

$$\beta : \mathrm{Coker}[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G] \longrightarrow H^2(G, \mathrm{Pic}(\overline{X}) \otimes \overline{F}^\times)$$

n'est pas toujours nulle.

5 Variétés à petit motif sur le corps des complexes

5.1 Rappels

Pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on note $A^2(X_F)$ le sous-groupe de $CH^2(X_F)$ formé des classes de cycles qui sur une clôture algébrique $\overline{F}$ de F sont algébriquement équivalents à zéro.
La proposition suivante rassemble des résultats connus, utiles pour la suite de ce paragraphe.

Proposition 5.1. *Soit X une variété connexe, projective et lisse sur le corps des complexes. Supposons que l'application degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.*
Alors
(i) On a $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ pour $i \geq 1$.
(ii) Pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, les applications de restriction

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_F) \to \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$$

sont des isomorphismes, et $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{NS}^1(X) = H^2_{Betti}(X, \mathbb{Z})$.
(iii) Équivalence homologique et équivalence algébrique coïncident sur le groupe de Chow $CH^2(X)$.
(iv) Le quotient $\mathrm{NS}^2(X) := CH^2(X)/A^2(X) \subset H^4_{Betti}(X, \mathbb{Z})$ *est un groupe abélien de type fini. Pour tout corps algébriquement clos F contenant $\mathbb{C}$, on a* $\mathrm{NS}^2(X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{NS}^2(X_F)$.
(v) Il existe une variété abélienne B sur $\mathbb{C}$ qui est un représentant algébrique de $A^2(X)$, au sens de Murre ([28], cf. [3, Déf. 3.2]). Pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on a un homomorphisme $A^2(X_F) \to B(F)$ fonctoriel en F, et cet homomorphisme est un isomorphisme si F est algébriquement clos.
(vi) S'il existe un premier l avec $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z}/l) = 0$, alors $A^2(X) = 0$, on a une inclusion $CH^2(X) \hookrightarrow H^4_{Betti}(X, \mathbb{Z})$, et ces groupes sont sans l-torsion.

Démonstration. Pour les énoncés (i), (iii), (iv), (v), dus essentiellement à Bloch et Srinivas, et reposant sur des théorèmes de Merkujev–Suslin et de Murre [28], voir [5, Thm. 1] et [31]. L'énoncé (ii) est une conséquence connue de $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Le dernier énoncé de (iv) est une propriété générale des quotients des groupes de Chow modulo l'équivalence algébrique. Pour l'énoncé (vi), les travaux de Bloch et de Merkurjev–Suslin montrent que le sous-groupe de l-torsion $CH^2(X)[l]$ de $CH^2(X)$ est un sous-quotient de $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z}/l)$. On a donc $CH^2(X)[l] = 0$ et a fortiori $A^2(X)[l] = 0$, donc $B[l] = 0$, donc la variété abélienne B est triviale et $A^2(X) = 0$. $\square$

Remarques 5.2. (a) Si X est une variété rationnellement connexe, alors l'application degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme, les propriétés (i) à (v) sont donc satisfaites.
(b) Les énoncés (iii) à (v) valent sous l'hypothèse plus faible qu'il existe une courbe projective et lisse C et un morphisme $C \to X$ qui induise une surjection $CH_0(C) \to CH_0(X)$.

5.2 Cycle de codimension 2 universel

Soient F un corps, X et Y deux F-variétés projectives, lisses, géométriquement connexes. Soit $z \in CH^2(X \times_F Y)$ une classe de cycle de codimension 2. La théorie des correspondances [14] donne une application bilinéaire

$$CH_0(Y) \times CH^2(Y \times_F X) \to CH^2(X).$$

Le sous-groupe $A_0(Y)$ des zéro-cycles de degré 0 est formé de classes géométriquement algébriquement équivalentes à zéro. Un élément $z \in CH^2(Y \times_F X)$ définit donc un homomorphisme

$$CH_0(Y) \to CH^2(X)$$

envoyant le groupe $A_0(Y)$ dans le sous-groupe $A^2(X) \subset CH^2(X)$ défini au début du §5. Cette application est fonctorielle en le corps de base F. Via la flèche évidente $Y(F) \to CH_0(Y)$ envoyant un point rationnel sur sa classe dans le groupe de Chow, elle induit une application $Y(F) \to CH^2(X)$ qui ne saurait être qu'ensembliste. Si Y est muni d'un point rationnel noté O, en envoyant P sur la classe de $P - O$, on définit une flèche ensembliste

$$\theta_z : Y(F) \to A^2(X)$$

envoyant O sur 0.

Soient X et B comme dans la proposition 5.1. On note O l'élément neutre de de $B(\mathbb{C})$. La définition suivante est une variante de celle donnée par Claire Voisin [34, Déf. 0.5].

DÉFINITION 5.3. Pour X et B comme ci-desssus, on dit qu'il existe un cycle de codimension 2 universel sur X s'il existe un cycle $z \in CH^2(B \times X)$ tel que, sur tout corps F contenant $\mathbb{C}$, l' application ensembliste

$$\theta_z : B(F) \to A^2(X_F)$$

définie ci-dessus satisfasse la propriété : L'application composée

$$B(F) \to A^2(X_F) \to B(F)$$

est l'identité sur $B(F)$.

Le théorème ci-dessous est une variante d'un résultat de C. Voisin [34, Thm. 2.1, Cor. 2.3]. La démonstration ici proposée diffère sensiblement de celle donnée dans [34].

THÉORÈME 5.4. *Soit X une variété connexe, projective et lisse sur $\mathbb{C}$. Supposons les conditions suivantes satisfaites.*
(i) L'application degré $CH_0(X) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.
(ii) Les groupes $H^2_{Betti}(X, \mathbb{Z})$ et $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z})$ sont sans torsion.
(iii) On a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.
Alors : (1) Pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on a une suite exacte

$$0 \to H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to$$
$$\mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G] \xrightarrow{\beta} H^2(G, \mathrm{Pic}(X) \otimes \overline{F}^{\times}). \tag{5.4}$$

(2) Soit B le représentant algébrique de $A^2(X)$ (Prop. 5.1 (v)). S'il existe un cycle de codimension 2 universel dans $CH^2(B \times X)$, alors pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on a $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$.

Note : Sous l'hypothèse $CH_0(X) = \mathbb{Z}$, la condition $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ est, d'après [11, Thm. 1.1], équivalente au fait que la conjecture de Hodge entière vaut en degré 4, i.e. pour les cycles de codimension 2.

Démonstration. Soit F un corps contenant $\mathbb{C}$. Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $G = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. D'après le théorème 4.1 appliqué à la F-variété $X_F := X \times_{\mathbb{C}} F$, on a une suite exacte

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times}) \to$$

$$\to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to$$

$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G] \xrightarrow{\beta} H^2(G, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times})$$

On sait [7, Thm. 4.4.1] que la cohomologie non ramifiée est invariante par extension de corps de base algébriquement clos. Sous l'hypothèse (iii), on a donc $H^3_{nr}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$. Sous les hypothèses (i) et (ii), les applications de restriction $\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(X_F) \to \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$ sont des isomorphismes de réseaux (Proposition 5.1 (ii)). L'action de $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur le réseau $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$ est donc triviale. Le théorème 90 de Hilbert donne alors

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(X) \otimes \overline{F}^{\times}) = 0.$$

Ceci donne la suite exacte (5.4).
Supposons qu'il existe un cycle de codimension 2 universel. Alors, sur tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on dispose de l'application ensembliste $B(F) \to A^2(X_F)$ qui composée avec l'application $A^2(X_F) \to B(F)$ est l'identité. Ceci implique que l'homomorphisme $A^2(X_F) \to A^2(X_{\overline{F}})^G$ est une surjection. L'application composée $\mathrm{NS}^2(X) \to \mathrm{NS}^2(X_{\overline{F}})^G$ est surjective, car $\mathrm{NS}^2(X) \to \mathrm{NS}^2(X_{\overline{F}})$ est un isomorphisme (Prop. 5.1 (iv)). Ainsi $CH^2(X) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ est surjectif, et de la suite exacte (5.4) on déduit $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. □

Remarque 5.5. Sous des hypothèses additionnelles, C. Voisin [34, Thm. 2.1, Cor. 2.3] établit une réciproque du théorème 5.4. Il serait souhaitable d'établir une telle réciproque par les méthodes plus K-théoriques du présent article, en utilisant la suite exacte (5.4) pour le corps des fonctions $F = \mathbb{C}(B)$ du représentant algébrique B de $A^2(X)$.

5.3 Troisième groupe de cohomologie non ramifiée des hypersurfaces de Fano

Théorème 5.6. *Soit $n \geq 4$. Soit $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$.*
(i) La flèche degré $CH_0(X) \to Z$ est un isomorphisme.
(ii) On a $\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{NS}(X) = H^2_{Betti}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, et ce groupe est engendré par la classe d'une section hyperplane.
(iii) Le groupe $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion, et nul pour $n \geq 5$.

(iv) Pour $n \geq 5$, équivalences rationnelle, algébrique et homologique coïncident sur les cycles de codimension 2 sur X, et on a une injection de réseaux $CH^2(X) \hookrightarrow H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z})$.
(v) Pour $n \neq 5$, $H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, et l'application

$$CH^2(X) \to H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

est surjective, et est un isomorphisme pour $n > 5$.
(vi) Pour $n = 4$ et $n > 5$, on a $H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.
(vii) Pour $n \geq 5$, pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, de clôture algébrique $\overline{F}$, avec $G := \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$, la flèche naturelle

$$CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$$

est surjective, et on a une suite exacte naturellement scindée

$$0 \to H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0.$$

Pour $n > 5$,on a

$$H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} H^3_{nr}(X_F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

(viii) Pour $n = 4$, soit B le représentant algébrique de $A^2(X)$. S'il existe un cycle universel de codimension 2 dans $CH^2(B \times X)$, alors pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on a $H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} H^3_{nr}(X_F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, et l'application $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ est surjective.

Démonstration. Les énoncés (i) à (v) sont bien connus. Comme ils sont utilisés pour établir les points suivants, donnons quelques rappels à leur sujet.
L'hypothèse $d \leq n$ assure $CH_0(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$, soit (i). C'est un théorème de Roitman, que l'on peut aussi voir comme un cas particulier du théorème de Campana et Kollár-Miyaoka-Mori assurant qu'une variété de Fano est rationnellement connexe. L'énoncé (ii) vaut pour toute hypersurface lisse dans $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 4$.
Pour $n \geq 5$, les théorèmes de Lefschetz donnent $H^3_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = 0$ et $H^3_{Betti}(X,\mathbb{Z}/l) = 0$ pour tout l premier. L'énoncé (i) et la proposition 5.1 donnent alors (iv).
Pour $n = 4$, $H^3_{Betti}(X,\mathbb{Z})$ est sans torsion. Par ailleurs $H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ (par dualité de Poincaré), la restriction $\mathbb{Z} = H^4_{Betti}(\mathbf{P}^4,\mathbb{Z}) \to H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est l'identité sur $\mathbb{Z}$.
Pour $n \geq 3$, toute hypersurface $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ de degré $d \leq n$ contient une droite de $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$. C'est un résultat classique mais délicat dans le cas $d = n$ (voir [12]). Pour $d < n$, cela résulte d'un calcul immédiat de dimension, qui montre que par tout point de X il passe une droite de $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ contenue dans X.
Soit $n = 4$. L'hypersurface X contient une droite de $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$. La classe de cette droite dans $CH^2(X)$ engendre donc $H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
Pour $n \geq 6$, les théorèmes de Lefschetz donnent que la flèche de restriction

$$\mathbb{Z} = H^4_{Betti}(\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}},\mathbb{Z}) \to H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} CH^2(X) & \hookrightarrow & H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ CH^2(\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}) & \stackrel{\simeq}{\to} & H^4_{Betti}(\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}},\mathbb{Z}) \end{array}$$

donne alors $CH^2(X) \stackrel{\simeq}{\to} H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, la conjecture de Hodge entière en degré 4 vaut donc pour X, et la théorie de Bloch-Ogus ou [11, Thm. 1.1] donnent alors $H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ soit (vi) pour $n \geq 6$. Le même argument vaut pour $n = 4$ et $d \leq 4$, puisque l'application $CH^2(X) \to H^4_{Betti}(X,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est surjective. Ceci établit (v) et (vi). Pour $n = 4$, (vi) est un cas particulier d'un résultat de C. Voisin [11, Cor. 6.2].
Établissons les points (vii) et (viii).
Pour tout $n \geq 4$, Pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_F) = \mathbb{Z},$$

le groupe étant engendré par la classe d'une section hyperplane (théorème de Max Noether). On a donc $H^1(G,\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^\times) = H^1(G,\overline{F}^\times) = 0$ (théorème 90 de Hilbert). Les énoncés déjà établis et le le théorème 4.1 donnent alors une suite exacte

$$0 \to H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to \mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X_F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \to$$

$$\to \mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G] \stackrel{\beta}{\to} H^2(G,\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^\times) \qquad (5.6)$$

Pour $n \geq 5$, d'après (iv), équivalence rationnelle et équivalence algébrique sur les cycles de codimension 2 de X coïncident sur un corps algébriquement clos. Pour une variété projective, lisse, connexe, sur un corps algébriquement clos, les groupes d'équivalence de cycles modulo l'équivalence algébrique sont, comme c'est bien connu et facile à établir, invariants par extension du corps de base à un autre corps algébriquement clos. Ainsi la flèche composée

$$CH^2(X) \to CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})$$

est l'identité, donc l'application $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ est surjective. On obtient donc dans ce cas une suite exacte

$$0 \to H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

D'après [7, Thm. 4.4.1], on a $H^3_{nr}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \stackrel{\simeq}{\to} H^3_{nr}(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, si bien que la suite ci-dessus se complète en une suite exacte naturellement scindée

$$0 \to H^3(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_{\overline{F}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to 0.$$

Pour $n > 5$, une application de (vi) achève alors d'établir l'énoncé (vii).

Pour $n = 4$, on a déjà établi $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ et

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

pour tout F contenant $\mathbb{C}$. La deuxième partie de l'énoncé (viii) résulte alors de la suite exacte (5.6) et du lemme 5.7 (b) ci-après. $\square$

Lemme 5.7. *Soient $n \geq 4$ et $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface lisse de degré $d \leq n$.*
(a) Pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, la flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times} \to H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)$$

est un isomorphisme

$$\overline{F}^{\times} \xrightarrow{\simeq} H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2).$$

(b) On a un isomorphisme

$$\mathrm{Ker}[H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))/H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))] \xrightarrow{\simeq}$$
$$\xrightarrow{\simeq} \mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G].$$

Démonstration. Pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_F) = \mathbb{Z},$$

le groupe étant engendré par la classe d'une section hyperplane (théorème de Max Noether). Comme on a $CH_0(X) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$ et que les groupes $H^3_{Betti}(X, \mathbb{Z})$ sont sans torsion, d'après [10, Thm. 2.12 ; Prop. 2.15], la flèche naturelle

$$\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times} \to H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)$$

est surjective.
On a vu ci-dessus que X contient une droite de $\mathbf{P}^n$, soit $Y \subset X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$. La restriction

$$\mathbb{Z} = \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \to \mathrm{Pic}(Y_{\overline{F}}) = \mathbb{Z}$$

est l'identité sur $\mathbb{Z}$, car le groupe $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}})$ est engendré par la classe d'une section hyperplane. Donc la flèche

$$\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times} \to \mathrm{Pic}(Y_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times}$$

est un isomorphisme. Pour la droite Y, l'application

$$\overline{F}^{\times} = \mathrm{Pic}(Y_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times} \to H^1(Y_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)$$

est un isomorphisme. L'inclusion $Y \subset X$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Pic}(Y_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times} \arrow[d] \\
H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2) \arrow[r] & H^1(Y_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)
\end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme, la flèche verticale de droite aussi, et la flèche verticale de gauche est surjective. La flèche $\mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times} \to H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)$ est donc un isomorphisme $\overline{F}^{\times} \xrightarrow{\simeq} H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)$, ce qui établit (a) et montre que la flèche de restriction

$$H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2) \to H^1(Y_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)$$

est un isomorphisme.
Considérons la suite exacte (5.6). Pour $n \geq 5$, nous avons établi $\mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G] = 0$, et donc la flèche

$$\beta : \mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G] \xrightarrow{\beta} H^2(G, \mathrm{Pic}(X_{\overline{F}}) \otimes \overline{F}^{\times})$$

dans cette suite est nulle.
Montrons que l'on a encore $\beta = 0$ dans le cas $n = 4$. Nous avons ici recours au point de vue motivique, i.e. à la proposition 2.6. L'application β est induite par l'application composée

$$CH^2(X_{\overline{F}})^G \to \mathbb{H}^4(X_{\overline{F}}, \mathbb{Z}(2))^G \to H^2(G, \mathbb{H}^3(X_{\overline{F}}, \mathbb{Z}(2))).$$

Chacune des deux applications intervenant ici est définie pour toute variété lisse X, et leur formation est fonctorielle en la variété lisse X : la seconde application vient de la suite spectrale considérée à la section 2.2.
Soit $Y \subset X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$ une droite. Comme la restriction

$$H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2) \to H^1(Y_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2)$$

est un isomorphisme, la flèche

$$\beta : \mathrm{Coker}[CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G] \to H^2(G, H^1(X_{\overline{F}}, \mathcal{K}_2))$$

se factorise par $\mathrm{Coker}[CH^2(Y_F) \to CH^2(Y_{\overline{F}})^G] = 0$ et donc est nulle, ce qui via la suite exacte (5.6) établit l'énoncé (b). $\square$

Pour les hypersurfaces cubiques, un résultat de Claire Voisin permet de compléter le théorème 5.6 dans le cas $n = 5$.

Théorème 5.8. *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, $n \geq 4$ une hypersurface cubique lisse.*
(i) On a $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$.
(ii) Pour tout entier $n \geq 5$, pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$, la flèche

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est un isomorphisme, et l'application

$$CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$$

est surjective.
(iii) Pour $n = 4$, soit B le représentant algébrique de $A^2(X)$ (Prop. 5.1 (v)). S'il existe un cycle universel de codimension 2 dans $CH^2(B \times X)$, alors pour tout corps F contenant $\mathbb{C}$ on a $H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \xrightarrow{\simeq} H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, et l'application $CH^2(X_F) \to CH^2(X_{\overline{F}})^G$ est surjective.

Démonstration. Pour $n \neq 5$, ceci est un cas particulier du théorème 5.6. Soit donc $n = 5$. C. Voisin a établi la conjecture de Hodge entière en degré 4 pour toute hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ [32], [33, Thm. 0.4, Thm. 2.11]. D'après le théorème [11, Thm. 1.1], ceci implique $H^3_{nr}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$, et donc, d'après [7, Thm. 4.4.1], $H^3_{nr}(X_{\overline{F}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = 0$ pour tout corps algébriquement clos $\overline{F}$ contenant $\mathbb{C}$. L'énoncé (ii) est alors une conséquence du théorème 5.6 (vii). □

Remarque 5.9. Soit $n = 5$. Si l'hypersurface cubique $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ contient un plan, on peut fibrer X en quadriques au-dessus du plan. L'énoncé (i) résulte alors de [11, Cor. 8.2], qui repose seulement sur le calcul de la cohomologie non ramifiée des quadriques de dimension 2 sur un corps quelconque (cas particulier des résultats de Kahn, Rost, Sujatha sur les quadriques de dimension quelconque). Pour les *hypersurfaces cubiques lisses* $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$ *très générales contenant un plan*, l'isomorphisme

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \overset{\simeq}{\to} H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

dans la proposition 5.8 (ii) fut d'abord établi par des méthodes de K-théorie et de formes quadratiques, en collaboration avec Auel et Parimala [2]. Pour *toute hypersurface cubique lisse* $X \subset \mathbf{P}^5_{\mathbb{C}}$, il fut ensuite établi par C. Voisin [34, Thm. 2.1, Example 2.2], par une méthode différente de celle proposée ici.

Remarque 5.10. Soit $n = 4$. Si pour une hypersurface cubique $X \subset \mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ et un corps F on avait $H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \neq H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, alors X ne serait pas stablement rationnelle. Un tel exemple n'est pas connu. Dans [35, Thm. 4.5], C. Voisin montre qu'il existe des hypersurfaces cubiques dans $\mathbf{P}^4_{\mathbb{C}}$ pour lesquelles le groupe de Chow des zéro-cycles est universellement trivial, résultat plus fort que $H^3_{nr}(X_F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) = H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ pour tout F.

RÉFÉRENCES

[1] M. Asakura et S. Saito, Surfaces over a p-adic field with infinite torsion in the Chow group of 0-cycles, Algebra & Number Theory 1 (2008), 163–181.

[2] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, http ://arxiv.org/abs/1310.6705v2, to appear in *Brauer groups and obstruction problems : moduli spaces and arithmetic* (Palo Alto, 2013), Asher Auel, Brendan Hassett, Tony Várilly-Alvarado, and Bianca Viray, eds.

[3] A. Beauville, Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires, Ann. Sc. Éc. Norm. Sup., 4ème série, 10 no. 3 (1977) 309–391.

[4] S. Blinstein et A. Merkurjev, Cohomological invariants of algebraic tori, Algebra & Number Theory. 7 (2013), no. 7, 1643–1684.

[5] S. Bloch et V. Srinivas, Remarks on correspondences and algebraic cycles, Amer. J. Math. 105 (1983), 1235–1253.

[6] J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert's Theorem 90 for K_2, with application to the Chow groups of rational surfaces, Invent. math. 71 (1983) 1–20.

[7] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, in *K-Theory and Algebraic Geometry : Connections with Quadratic Forms and Division Algebras*, AMS Summer Research Institute, Santa Barbara 1992, ed. W. Jacob and A. Rosenberg, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 58, Part I (1995) 1–64.

[8] J.-L. Colliot-Thélène et B. Kahn, Cycles de codimension 2 et H^3 non ramifié pour les variétés sur les corps finis, J. K-Theory 11 (2013) 1–53.

[9] J.-L. Colliot-Thélène et D. Madore, Surfaces de del Pezzo sans point rationnel sur un corps de dimension cohomologique 1, J. Inst. Math. Jussieu, 3 (2004) 1–16.

[10] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, K_2-cohomology and the second Chow group, Math. Ann. 270 (1985), 165–199.

[11] J.-L. Colliot-Thélène et C. Voisin, Cohomologie non ramifiée et conjecture de Hodge entière, Duke Math. J. 161 no. 5 (2012) 735–801.

[12] O. Debarre, On the geometry of hypersurfaces of low degrees in the projective space, Lecture notes, Galatasaray University, June 2014.

[13] H. Esnault, M. Levine et O. Wittenberg, Index of varieties over henselian fields and Euler characteristic of coherent sheaves, J. Algebraic Geom. 24 (2015), 693–718.

[14] W. Fulton, Intersection Theory, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgeb., Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[15] W. Fulton, Introduction to toric varieties, Annals of Mathematics Studies 131, Princeton University Press.

[16] R. Garibaldi, A. Merkurjev et J-P. Serre, Cohomological invariants in Galois cohomology, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[17] D. Harari et T. Szamuely, Local-global questions for tori over p-adic function fields, http ://arxiv.org/abs/1307.4782v3, à paraître dans J. Algebraic Geom.

[18] D. Harari, C. Scheiderer et T. Szamuely, Weak approximation for tori over p-adic function fields, Internat. Math. Res. Notices 2015 (2015), 2751–2783.

[19] B. Kahn, Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres, K-theory 7 (1993) 55–100.

[20] B. Kahn, Applications of weight-two cohomology, Doc. Math. 1 (1996), No. 17, 395–416.

[21] M. Levine, The indecomposable K_3 of fields, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4) 22 (1989), no. 2, 255–344.

[22] S. Lichtenbaum, The construction of weight-two arithmetic cohomology, Invent. math. 88 (1987) 183–215.

[23] S. Lichtenbaum, New results on weight-two motivic cohomology, The Grothendieck Festschrift, vol. 3, Progress in Math. 88, Birkhäuser, Boston, 1990, 35–55.

[24] A. S. Merkurjev, Weight two cohomology of classifying spaces for semisimple groups, prépublication, février 2013, à paraître dans Amer. J. Math.

[25] A. S. Merkurjev, Degree three cohomological invariants of semisimple groups, prépublication, mars 2013, à paraître dans JEMS.

[26] A. S. Merkurjev, Unramified degree three invariants of reductive groups, novembre 2014, disponible sur la page de l'auteur et à https ://www.math.uni-bielefeld.de/lag/

[27] A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, The group K_3 for a field, Math. USSR Izvestiya 36 (1991) no 3 541–565.

[28] J. P. Murre, Un résultat en théorie des cycles algébriques de codimension deux, C. R. Acad. Sc. Paris 296 (1983) 981–984.

[29] A. Pirutka, Sur le groupe de Chow de codimension deux des variétés sur les corps finis, Algebra & Number Theory 5 (2011) no. 6, 803–817.

[30] A. A. Suslin, Torsion in K_2 of fields, K-Theory 1 (1987) 5–29.

[31] C. Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, Cours spécialisés 10, Soc. Math. France 2002.

[32] C. Voisin, On integral Hodge classes on uniruled and Calabi-Yau threefolds, in *Moduli Spaces and Arithmetic Geometry*, Advanced Studies in Pure Mathematics 45, 2006, pp. 43–73.

[33] C. Voisin, Abel-Jacobi maps, integral Hodge classes and decomposition of the diagonal, J. Algebraic Geom. 22 (2013), 141–174.

[34] C. Voisin, Unirational threefolds with no universal codimension 2 cycle, Invent. math. 201 (2015), 207-2-37.

[35] C. Voisin, On the universal CH_0 group of cubic hypersurfaces, http ://arxiv.org/abs/1407.7261.

Jean-Louis Colliot-Thélène
C.N.R.S.
Université Paris Sud
Mathématiques
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex
France
jlct@math.u-psud.fr