Construction d'une extension régulière de $\mathbb{Q}(T)$ de groupe de Galois M_{24}

Louis Granboulan

Abstract

Matzat a prouvé que le groupe de Mathieu de degré 24 est groupe de Galois sur l'extension transcendante $\mathbb{Q}(T)$. Il utilise pour cela une construction dite *non rigide* et prouve l'existence d'un point rationnel dans un espace de Hurwitz adéquat. Nous donnons ici une telle extension explicitement. Nous en déduisons aussi l'existence d'une extension régulière de $K(T)$ de groupe de Galois M_{23} pour tout K tel que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ait une solution non triviale. Pour obtenir ces résultats, il a fallu remplacer les outils habituels du calcul formel par des constructions numériques et retrouver ensuite les objets algébriques en paramétrisant certaines courbes de genre 0. Cela nous permet d'illustrer la puissance des techniques de calcul de revêtements développées ailleurs.

Matzat has proved that the Mathieu group of degree 24 is a Galois group over the transcendent extension $\mathbb{Q}(T)$. He does this by using a construction called *nonrigid*, proving the existence of a rational point in an appropriate Hurwitz space. Here we perform such a construction explicitly. We also deduce that, for any K such that the equation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ has a nontrivial solution, there is a regular extension of $K(T)$ with Galois group M_{23}. To achieve this, we had to replace the usual tools of symbolic calculation by numerical constructions, and then to recover the algebraic objects by parametrizing certain curves of genus 0. This allows us to illustrate the power of covering map techniques developed elsewhere.