Zéros des Fonctions *L* de Courbes Elliptiques

Stéfane Fermigier

TABLE DES MATIÈRES

A toute courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, on sait associer une fonction L_E, qui, conjecturalement, est holomorphe et vérifie une équation fonctionnelle analogue à celle de la fonction zêta de Riemann. On peut se demander, comme pour la fonction zêta, si les fonctions L_E vérifient des conditions analogues à la "conjecture de Riemann", qui affirme que les zéros non-triviaux de ζ se trouvent sur la "droite critique" de l'équation fonctionnelle.

C'est pour tenter de donner un peu de crédit à cette hypothèse de Riemann généralisée que l'on a effectué des recherches numériques de zéros sur plusieurs centaines de courbes différentes. Ainsi, sur les 7000 zéros calculés, tous sont situés sur la droite critique.

To every elliptic curve over $\mathbf{Q}$ one can associate a function L_E, which is conjectured to be holomorphic and to satisfy a functional equation similar to the one satisfied by Riemann's zeta function. One can ask whether these functions satisfy an appropriate version of the Riemann Hypothesis (the traditional Riemann Hypothesis states that the nontrivial zeros of the zeta function lie on the "critical line" of the functional equation).

In order to gather experimental evidence in support of this generalized Riemann hypothesis, I computed numerically a set of zeros for several hundred elliptic curves. All of the 7000 zeros computed for the various curves lie on the critical line.

1. INTRODUCTION

1.1. Fonctions ζ, fonctions L

A une courbe algébrique projective lisse C définie sur un corps fini $\mathbf{F}_q$, on sait associer une fonction complexe

$$\zeta_C(s) = \exp\biggl(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} q^{-ms}\biggr),$$

où N_m est le nombre de points de C sur $\mathbf{F}_{q^m}$.

1058-6458/94 \$0.50 per page

On sait depuis Weil que les fonctions ζ peuvent s'écrire :

$$\zeta_C(s) = \frac{P(q^{-s})}{(1-q^{-s})(1-q^{1-s})},$$

où P est un polynôme de degré $2g$ (g genre de la courbe), $P(T) = (1-\alpha_1 T)\ldots(1-\alpha_{2g}T)$, avec $\alpha_{2j-1} = \bar{\alpha}_{2j}$, $|\alpha_i| = \sqrt{q}$, et $N_m = q^m + 1 - \sum_{i=1}^{2g} \alpha_i^m$.

A une courbe projective lisse C définie sur $\mathbf{Q}$ (ou plus généralement à la cohomologie d'une variété sur un corps global) on peut alors associer d'après Serre [1970] une fonction L_C en collectant les données locales (polynômes des fonctions zêta locales des réductions de la courbe modulo les nombres premiers p) en un produit infini :

$$L_C(s) = \zeta_S(s) \times \prod_{p \notin S} \frac{1}{P_p(p^{-s})},$$

où S est l'ensemble des places de mauvaise réduction, $\zeta_S = P_S(p^{-s})$ est un polynôme en p^{-s}, et où P_p est le numérateur de la fonction zêta locale en p.

Dans le cas qui nous intéresse, celui d'une courbe elliptique E définie sur $\mathbf{Q}$, on peut rendre cette construction explicite. On choisit un modèle de Weierstraß de E, c'est-à-dire une équation de E à coefficients dans $\mathbf{Z}$, de discriminant minimal, de la forme

$$y^2 + c_1xy + c_3y = x^3 + c_2x^2 + c_4x + c_6. \tag{1.1}$$

La fonction L_E s'écrit alors

$$L_E(s) = \prod_{p \in S} \frac{1}{1-a_p p^{-s}} \times \prod_{p \notin S} \frac{1}{1-a_p p^{-s} + p^{1-2s}},$$

où p parcourt les nombres premiers, avec S l'ensemble des premiers de mauvaise réduction. Les coefficients a_p de la fonction L_E sont alors les ordres des groupes finis $E_p(\mathbf{F}_p)$, où E_p est la courbe donnée par la réduction modulo p de l'équation (1.1). En particulier, dans les cas de mauvaise réduction, on a $a_p = 1$ si E a une réduction multiplicative déployée, $a_p = -1$ si E a une réduction multiplicative non déployée, et $a_p = 0$ si E a une réduction additive.

On obtient ainsi une série de Dirichlet, qui s'écrit

$$L_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}.$$

Les coefficients a_n vérifient $a_n = O(\sqrt{n}\log n)$ (théorème de Hasse), ce qui assure la convergence de $L_E(s)$ sur le demi-plan $\operatorname{Re} s > \frac{3}{2}$ vers une fonction holomorphe.

On considère aussi la série de Fourier de coefficients a_n,

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi nz},$$

qui converge pour $\operatorname{Im} z > 0$ vers une fonction holomorphe.

1.2. Equations fonctionnelles et prolongement analytique (d'après [Manin 1971])

Pour obtenir (conjecturalement) un prolongement analytique des fonctions L à $\mathbf{C}$ tout entier, on introduit la fonction Λ, transformée de Mellin de la fonction F :

$$\Lambda_E(s) = \int_0^{\infty} F(it)t^{s-1}dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi nt} t^{s-1} dt,$$

l'intégrale étant uniformément convergente dans le demi-plan $\operatorname{Re} s \geq 1 - c$ pour peu que l'on suppose que $F(it) = O(t^c)$ quand $y \to 0$ (car $a_n = O(\sqrt{N})$ implique que $F(it) = O(e^{-2\pi t})$ quand $t \to \infty$). Si de plus $\operatorname{Re} s \geq \frac{3}{2} + \varepsilon$, on peut intégrer la série terme à terme, d'où

$$\begin{aligned}\Lambda_E(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} a_n e^{-2\pi nt} t^{s-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\pi)^{-s} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{s-1} du \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) L_E(s).\end{aligned}$$

L'estimation $F(it) = O(t^c)$ est obtenue à l'aide d'une équation fonctionnelle, donnée par une conjecture :

Conjecture 1 (Shimura–Taniyama–Weil). La fonction F est une forme parabolique de poids 2 pour un sous-groupe de $\Gamma_0(N)$. Elle vérifie l'équation fonctionnelle

$$F(z) = -cN^{-1}z^{-2}F(-1/Nz), \tag{1.2}$$

avec $c = \pm 1$ et N conducteur de la courbe E.

On obtient alors facilement

$$F(it) = O(t^{-2}e^{-2\pi/Nt}) = O(t^c)$$

pour tout c, d'où un prolongement analytique de Λ_E au plan tout entier, avec l'équation fonctionnelle

$$\Lambda_E(s) = cN^{1-s}\Lambda_E(2-s),$$

donnée par

$$\begin{aligned}\Lambda_E(s) &= \left(\int_0^{1/\sqrt{N}} + \int_{1/\sqrt{N}}^{\infty}\right) F(it)t^{s-1}\,dt \\ &= \int_{1/\sqrt{N}}^{\infty} (t^{s-1} + cN^{1-s}t^{1-s})F(it)\,dt,\end{aligned}$$

après un changement de variable et l'utilisation de l'équation (1.2). De plus on voit alors apparaître une fonction connue, la fonction gamma incomplète

$$\Gamma(a,s) = \int_a^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx,$$

telle que, en intégrant terme à terme,

$$\begin{aligned}\Lambda_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Bigg(&(2\pi n)^{-s}\Gamma\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}, s\right) \\ &+ cN^{1-s}(2\pi n)^{s-2}\Gamma\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}, 2-s\right)\Bigg). \quad (1.3)\end{aligned}$$

La conjecture 1 est démontrée pour les courbes, dites courbes de Weil, qui admettent un "revêtement" par une courbe modulaire $X_0(N)$. La conjecture la plus générale est que toutes les courbes elliptiques sont des courbes de Weil. Les calculs de cet article ont été effectués sur des courbes dont ont sait (J.-F. Mestre et J. Oesterlé, communication privée) qu'elles sont des courbes de Weil.

1.3. Conjectures "standards" sur les fonctions L

L'importance des fonctions L des courbes elliptiques est liée en particulier à la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer.

Conjecture 2 (Birch–Swinnerton-Dyer faible). Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$, l'ordre de L_E en 1 est égal au rang de la courbe E.

Maintenant, comme les fonctions L considérées ici vérifient, au moins conjecturalement, des propriétés semblables à celles de la fonction zêta de Riemann, on peut essayer de généraliser l'hypothèse de Riemann, comme cela a déjà été fait pour les fonctions zêta de corps de nombres.

Conjecture 3 (Hypothèse de Riemann généralisée, ou GRH). Si E est une courbe elliptique sur $\mathbf{Q}$ qui satisfait la conjecture 1 (Shimura–Taniyama–Weil), tous les zéros de L_E situés sur la "bande critique" $0 < \operatorname{Re} z < 2$ sont en fait sur la "droite critique" $\operatorname{Re} z = 1$.

2. MÉTHODES NUMÉRIQUES EMPLOYÉES

2.1. Calcul des a_n

Le calcul des coefficients a_n se fait en utilisant l'algorithme "baby step – giant step" (avec une amélioration due à Mestre) implémenté dans `PARI` [Batut et al. 1991].

2.2. Calcul de Λ_E et Λ'_E

On calcule les fonctions Λ_E et Λ'_E en utilisant les formules (1.3) et

$$\begin{aligned}\Lambda'_E(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Bigg(&-\frac{\log 2\pi n}{(2\pi n)^s}\Gamma\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}, s\right) \\ &+ \frac{1}{(2\pi n)^s}\Gamma'\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}, s\right) \\ &+ \frac{cN}{(2\pi n)^2}\log\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\left(\frac{2\pi n}{N}\right)^s\Gamma\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}, 2-s\right) \\ &- \frac{cN}{(2\pi n)^2}\left(\frac{2\pi n}{N}\right)^s\Gamma'\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}, 2-s\right)\Bigg)\end{aligned}$$

avec

$$\Gamma(a,s) = \int_a^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

et

$$\Gamma'(a,s) = \frac{d\Gamma(a,s)}{ds} = \int_a^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\log x dx.$$

Pour calculer Λ_E et Λ'_E, on tronque les sommes infinies à un rang raisonnable : comme $|\Gamma(a,s)| \leq e^{-a}$ si $\operatorname{Re} s = 1$, avec $a = 2\pi n/\sqrt{N}$, on ne garde que les termes avec $n < C\sqrt{N}$ avec $C = 4$, ce qui laisse un terme d'erreur de l'ordre de 10^{-9}. On constate expérimentalement que ce choix de C n'est pas abusif en relançant les calculs avec une autre valeur de C ($C = 6$) et en vérifiant que les résultats obtenus sont les mêmes, à la précision de la machine près.

Le calcul de $\Gamma(a,s)$ et $\Gamma'(a,s)$ a été effectué par intégration numérique (méthode de Romberg), un procédé a priori plutôt lent, que l'on peut accélérer en “découpant les intégrales en tranches”, i.e., en calculant les intégrales

$$I_n = \int_{2\pi n/\sqrt{N}}^{2\pi(n+1)/\sqrt{N}} e^{-x} x^{s-1} dx$$

et

$$I'_n = \int_{2\pi n/\sqrt{N}}^{2\pi(n+1)/\sqrt{N}} e^{-x} x^{s-1} \log x dx,$$

de sorte que

$$\Gamma\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{N}}, s\right) = \sum_{m=n}^{M} I_n + R_n,$$

avec $M = \lfloor C\sqrt{N} \rfloor + 1$, le terme de reste

$$R_n = \int_{2\pi M/\sqrt{N}}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

vérifiant $|R_n| \leq \exp -2\pi C$ si $\operatorname{Re} s = 1$, et donc étant négligeable par rapport aux autres termes du calcul de Λ_E (hypothèse là encore confirmée expérimentalement en constatant que les résultats sont stables si on augmente C). Et de même pour Λ'_E.

2.3. Recherche des zéros

Maintenant que l'on sait calculer à la fois la fonction Λ et sa dérivée, on peut utiliser la méthode de Newton pour calculer les zéros de Λ. Comme il faut, pour amorcer l'algorithme de Newton, partir d'assez près d'un zéro, on construit les premiers éléments de la suite

$$u_{n+1} = u_n - f(u_n)/f'(u_n),$$

pour des u_0 espacés régulièrement sur le segment $[1, 1+Ti]$, où T est une borne inférieure en pratique à 15, et on ne garde que les valeurs qui convergent numériquement après un nombre fixé d'itérations vers une valeur située dans la bande critique.

2.4. Comptage des zéros (vérification interne)

Pour contrôler la validité des résultats, et en particulier vérifier s'il n'y a pas de zéros multiples qui échapperaient à la méthode de Newton, on intègre numériquement la formule des résidus, autour du rectangle

$$\{z \in \mathbf{C} : -0.1 < \operatorname{Im} z < T,\ 0 < \operatorname{Re} z < 2\},$$

que l'on compare ensuite au nombre de zéros trouvés par la méthode de Newton, avec l'origine comptée avec la bonne multiplicité.

Les calculs, poussés à une précision telle que l'intégrale soit proche de $2\pi i$ fois un entier à 0.1 près, montrent qu'aucun zéro n'a été oublié, et en particulier qu'il n'y a pas de zéros multiples.

Cela permet aussi de constater que, pour toutes les courbes considérées, tous les zéros de la bande critique de partie imaginaire inférieure à 15 sont situés sur la droite critique, autrement dit de vérifier l'hypothèse de Riemann généralisée (conjecture 3) pour les zéros considérés. En effet, les zéros qui ne sont pas sur la droite critique vont par paires, donc on peut les repérer par la méthode des résidus.

2.5. Formules explicites (vérification externe)

On utilise, comme dans [Mestre 1986], les *formules explicites* qui relient le comportement d'une fonction F sur l'axe réel à celui de sa transformée de Fourier Φ sur les zéros d'une fonction L. Si l'on suppose les conjectures 1, 2 et 3, on sait que pour une fonction F à support compact et telle que $(F(x) - F(0))/x$ soit à variation bornée avec $F(0) = 1$, on a la formule

$$\sum_{\rho} \Phi(\rho) + 2 \sum_{p,m} b_{p^m} F(m \log p) \frac{\log p}{p^m} = \log N - 2\log 2\pi - 2\int_0^{\infty} \left(\frac{F(x)}{e^x - 1} - \frac{e^{-x}}{x}\right) dx, \tag{2.1}$$

avec $b_{p^m} = \alpha_p^m + \bar{\alpha}_p^m$ (facile à calculer à partir des a_n), et où $\sum_\rho$ signifie la somme sur les parties imaginaires des zéros de L situés dans la bande critique (donc sur la droite critique si on suppose l'hypothèse de Riemann généralisée), et où $\sum_{p,m}$ signifie la somme sur tous les nombres premiers p et tous les entiers strictement positifs m.

Pour la vérification expérimentale, donc, on choisit une fonction F à support $[-1, 1]$, dont la transformée de Fourier décroît suffisamment vite, par exemple, $F(x) = (1 - x^2)^n$ pour $x \in [-1, 1]$ et nulle ailleurs. On fixe un paramètre $\lambda > 0$ et on utilise la fonction $F_\lambda(x) = F(x/\lambda)$, de transformée de Fourier $\varphi_\lambda(t) = \lambda\Phi(\lambda t)$.

On choisit par exemple $\lambda = \log 16$, et on calcule

$$r\lambda\Phi(0) + 2\sum_{\rho} \varphi_\lambda(\rho),$$

où r est le rang de la courbe et ρ parcourt les zéros de L que l'on a calculé (c'est-à-dire ceux de partie imaginaire positive et inférieure à 15). Puis on compare le résultat obtenu à la somme

$$-2\sum_{p^m<16} b_{p^m}F_\lambda(m\log p)\frac{\log p}{p^m} + \log N - 2\log 2\pi - 2\int_0^\infty\left(\frac{F_\lambda(x)}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx$$

donnée par la formule explicite (2.1). On observe que l'erreur est très faible, de l'ordre de 10^{-4}, ce qui fournit une confirmation expérimentale des calculs.

3. IMPLÉMENTATION

Le programme a d'abord été écrit en langage C, en utilisant la bibliothèque arithmétique `PARI` développée par C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen et M. Olivier [Batut et al. 1991]. L'utilisation de cette librairie permet d'éviter de réécrire les fonctions de calcul sur les complexes, de calcul des a_n et d'intégration numérique.

Puis lorsqu'il est apparu que cette solution était trop lente dans ce contexte, le programme a été réécrit (sauf le calcul des a_n) à partir de fonctions de calcul en double précision standard.

Différents fichiers de résultats ont été produits qui ont été traités et formatés grâce au langage `perl`. Les calculs de régression ont été effectués avec `Maple`.

4. RÉSULTATS ET COMMENTAIRES

4.1. Quelques résultats théoriques

Par des méthodes connues (voir par exemple [Guthmann 1990]), on sait prouver le résultat suivant :

Théorème 1. Si $M(T)$ est le nombre de zéros dans la boîte $\{z\in\mathbf{C} : 0<\operatorname{Im} z<T,\, 0<\operatorname{Re} z<2\}$, alors pour une courbe de conducteur N, on doit avoir

$$M(T)=\frac{T}{\pi}\log\frac{T}{2\pi}+\frac{T}{\pi}(\log N-1)+O(\log T)$$

quand T tend vers l'infini.

Un tel résultat donne une idée du comportement global des zéros, et permet d'obtenir un équivalent du n-ième zéro ρ_n, lorsque N est fixé et n tend vers l'infini :

$$\rho_n\sim\pi n/\log n,$$

qui ne dépend pas de N.

Par ailleurs, pour le comportement du premier zéro non-nul, on peut citer un résultat de [Mestre 1986] :

Théorème 2. Si l'hypothèse de Riemann généralisée est vraie, il existe une constante C telle que le premier zéro non-nul ρ_1 vérifie

$$|\rho_1-1|<\frac{C}{\log\log N}.$$

4.2. Résultats des calculs

J'ai calculé les zéros sur le segment $[1, 1+15i]$ des fonctions Λ_E pour les 406 courbes elliptiques de Weil de conducteur premier $N\le 13100$ dont la liste m'a été fournie par J.-F. Mestre. Dans la suite ces courbes seront designées par leurs conducteurs N, avec une lettre $a, b, c\ldots$ s'il y en a plusieurs avec le même conducteur.

Les calculs ont demandé quelques jours sur une station de travail Sun-4. Un fichier contenant les résultats est à la disposition du lecteur intéressé (voir "Pour obtenir les fichiers" à la fin de cet article).

4.3. Altitude du premier zéro

On aimerait mettre en évidence que la partie imaginaire y_1 du premier zéro (non-nul) est de l'ordre de $1/\log N$. Les courbes qui donnent y_1 en fonction de $\log N$, ou $y_1\log N$ en fonction de N (figure 1, à gauche) sont très irrégulières, mais n'infirment pas cette conjecture. On constate aussi que l'altitude du premier zéro augmente avec le rang de la courbe, ce qui semble tout à fait logique.

En étudiant plus particulièrement les courbes de rang 0, pour $N\ge 1000$ (figure 1, à droite), si on regarde celles dont le premier zéro est particulièrement élevé — donc qui ont un comportement "proche" d'une courbe de rang 1 — on trouve:

- des courbes d'apparence anodine : 1187 (trois courbes), 4337, 10639…
- des courbes à gros coefficients : 557b, 659b
- des courbes à groupe de Tate–Shafarevič non-trivial : 1613b, 2089d, 8747d, 11059, avec $Ш = 4, 4, 9, 9$, respectivement. (Le calcul du groupe de Tate–Shafarevič est conjectural : il présuppose la conjecture de Birch–Swinnerton-Dyer.)

En revanche, les courbes tracées en prenant la somme des n premiers zéros sont beaucoup plus

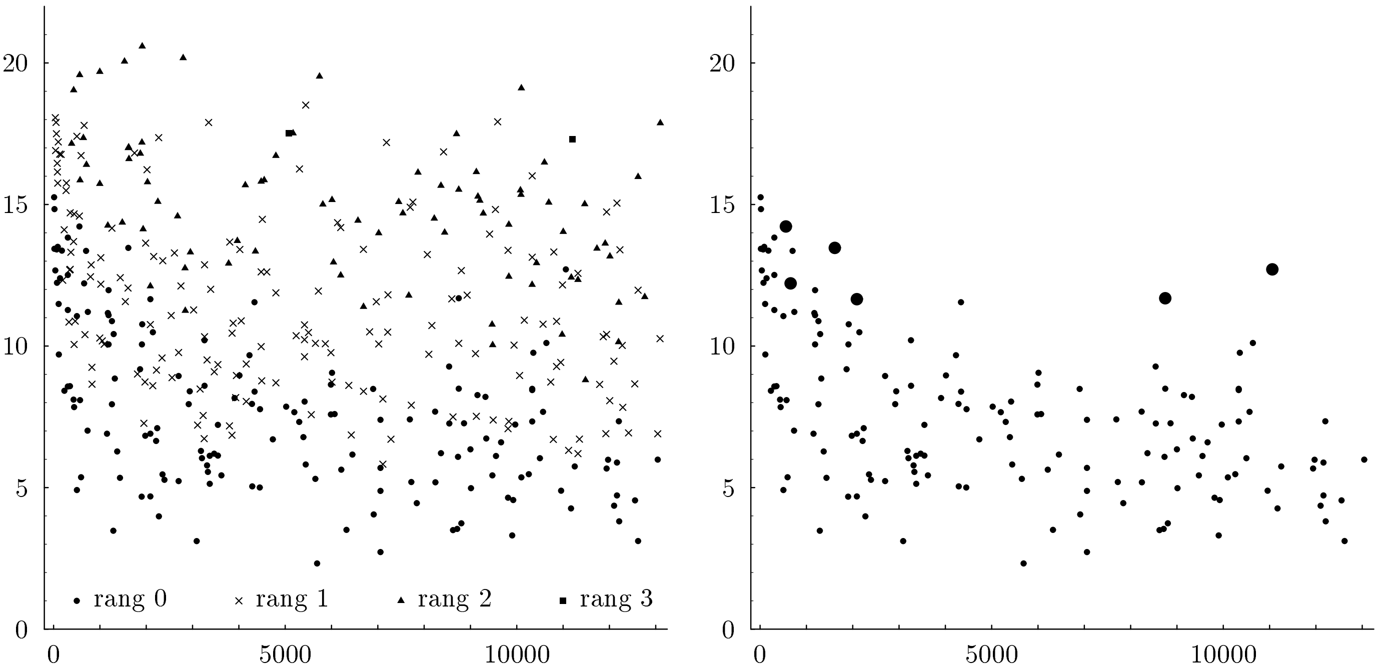

FIGURE 1. Partie imaginaire du premier zéro de L, multipliée par $\log N$, en fonction de N, pour toutes les 406 courbes étudiées (à gauche) et pour celles de rang 0 seulement (à droite). Les gros cercles correspondent aux courbes 557b, 659b, 1613b, 2089d, 8747d et 11059.

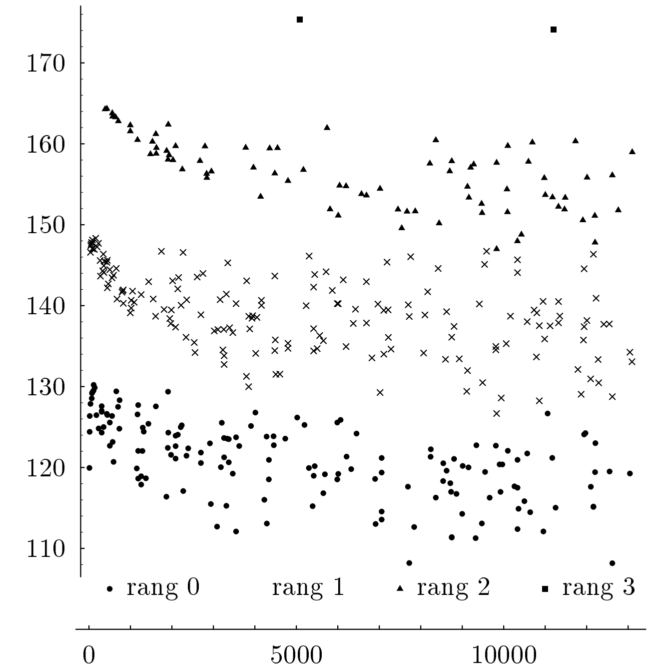

FIGURE 2. Partie imaginaire de la somme des cinq premiers zéros de L, multipliée par $\log N$, en fonction de N.

lisses : ainsi les courbes qui donnent l'altitude de la somme $Y_5 = \sum_{i=1}^{5} y_i$ des cinq premiers zéros en fonction de $1/\log N$ révèlent une nette dépendance linéaire :

$$
\begin{aligned}
\text{rang } 0: &\quad Y_5 \simeq 139.9/\log N - 2.35\\
\text{rang } 1: &\quad Y_5 \simeq 162.7/\log N - 3.06\\
\text{rang } 2: &\quad Y_5 \simeq 184.3/\log N - 3.32
\end{aligned}
$$

avec d'excellents coefficients de corrélation en excès de 0.993. Cela se peut voir aussi dans la figure 2.

On a aussi tenté de relier l'altitude du premier zéro à des paramètres qui sont également d'ordre $1/\log N$, tels que $L(1)$ (pour les courbes de rang 0) ou la hauteur de Faltings h, qui est le volume du réseau de $\mathbf{C}$ qui correspond à la courbe. Bien que ces trois grandeurs paraissent corrélées, il n'est pas possible de déterminer explicitement une dépendance. Par exemple, pour les courbes de rang 0, on trouve les coefficients de corrélation suivants :

$$
\begin{aligned}
&y_1 \text{ avec } 1/\log N && : \ r = 0.940,\\
&y_1 \text{ avec } L(1) && : \ r = 0.038,\\
&y_1 \text{ avec } h \text{ (hauteur de Faltings)} && : \ r = 0.246.
\end{aligned}
$$

La corrélation avec $L(1)$ et h est très mauvaise et celle avec $1/\log N$ médiocre.

4.4. Nombre de zéros

On a tracé les courbes donnant le nombre de zéros calculés (c'est-à-dire ceux de partie imaginaire positive et inférieure à 15) en fonction de N (figure 3). On obtient des tracés qui approchent de très près la courbe asymptotique du théorème 1. De tels résultats confirment que le comportement des zéros semble bien en $1/\log N$, et qu'il faut considérer plusieurs zéros pour obtenir des dépendances régulières.

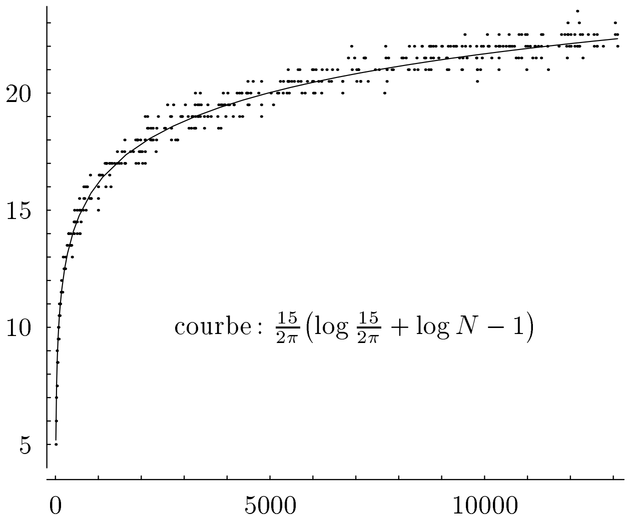

FIGURE 3. Nombre de zéros entre 1 et $1+15i$, en fonction de N. Le zéro en 1 est compté $\frac{1}{2}r$ fois, où r est son ordre (le rang de la courbe).

4.5. Conclusion

Si on considère le comportement individuel des zéros, on obtient des résultats très irréguliers et difficiles à analyser. En revanche, si on regarde leur comportement collectif en les sommant ou en regardant leur densité, on obtient pour les courbes considérées des valeurs régulières qui dépendent essentiellement du rang et du conducteur.

REMERCIEMENTS

Je remercie Jean-François Mestre, qui a dirigé mes recherches, Benedict Gross qui les a initiées, Armand Brumer et Andrew Odlyzko qui les ont encouragées, ainsi que les auteurs du système de calcul arithmétique `PARI`.

REFERENCES

[Batut et al. 1991] . Batut, D. Bernardi, H. Cohen and M. Olivier, *User's Guide to* `PARI-GP`, 1991. Ce manuel fait partie de la distribution du programme (voir ci-dessous).

[Guthmann 1990] . Guthmann, "Theorie und Praxis Dirichletscher Reihen mit Funktionalgleichung", preprint Univ. Kaiserslautern (Allemagne) **171**, 1990.

[Manin 1971] u. Manin, "Cyclotomic fields and modular curves", *Uspekhi Mat. Nauk* **26** (1971), 7–71 (en russe); *Russian Math. Surveys* **26** (1971) (en anglais).

[J.-F. Mestre 1986] .-F. Mestre, "Formules explicites et minorations de conducteurs de variétés algébriques", *Compositio Mathematica* **58** (1986), 209–232.

[Serre 1970] .-P. Serre, "Facteurs locaux des fonctions zêta des variétés algébriques (définitions et conjecture)", notes multigraphiées du séminaire D.P.P. 1969–70, Faculté des sciences de Paris et Institut Henri Poincaré, Paris, 1970.

POUR OBTENIR LES FICHIERS

On trouvera dans le répertoire `/pub/maths/tables` sur le serveur `snekkar.ens.fr` (par `ftp` anonyme) le fichier `zeros_fonctions_L`, qui contient, pour chaque courbe étudiée, les données suivantes : le conducteur, le rang, les coefficients d'une équation minimale de la forme (1.1), et enfin les parties imaginaires $0 < y \le 15$ des zéros de L sur la droite critique.

`PARI` est également disponible sur le même serveur, dans le fichier `pub/unix/lang/pari-1.37.tar.Z`.

Stéfane Fermigier, DMI, Ecole Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, 75005 Paris, France
(fermigie@dmi.ens.fr, fermigie@frulm63.bitnet)

Received March 23, 1992; revised June 2, 1992