

Approche Numérique de la Solution Entropique de l'équation d'évolution de Burgers par la Méthode des lignes¹

A. Guesima, N. Daili

Abstract

Dans ce travail, on s'intéresse à des techniques d'analyse numérique appliquées aux équations aux dérivées partielles. Spécialement aux techniques de la méthode des lignes appliquées à l'équation d'évolution de Burgers. On utilise une formulation aux volumes finis pour donner des approximations numériques par la méthode des lignes de volumes finis pour des discrétisations spatiale et temporelle pour obtenir un système différentiel ordinaire de la forme $\frac{du}{dt} = F(t, u)$. Nous prouvons la convergence de la solution approximative vers la solution faible d'entropie du problème. Nous donnons une évaluation d'erreur entre les deux.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 65M20, 76M12;
Secondary 76M27, 65L70

Key words: Evolution Burgers equation, Finite volume method, method of lines and estimation

¹Received 11 September, 2008

Accepted for publication (in revised form) 16 October, 2008

1 Introduction

L'équation d'évolution de Burgers présente un phénomène particulier (dans les lois de conservation) qui est la présence de chocs. S.N. Kruzhkov ([14]) a montré l'existence et l'unicité d'une solution entropique en 1970 en utilisant une méthode de viscosité pour prouver l'existence et doublement de variable pour prouver l'unicité ([2], [5], [6], [7],[14], [17], [21]).

Depuis une dizaine d'années, plusieurs travaux présentent des schémas numériques intéressants pour les lois de conservation à flux discontinus. Par exemple, les schémas de "Godunov scheme", Lax-Wendroff et Lax-Fridrichs" présentés dans ([13]) convergent tous vers la solution entropique du problème.

L'objectif de ce travail est de présenter un schéma volume fini adapté au problème et d'établir la convergence du schéma vers la solution entropique. On utilise une formulation aux volumes finis pour donner des approximations numériques par la méthode des lignes de volumes finis pour des discrétisations spatiale et temporelle pour obtenir un système différentiel ordinaire de la forme

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(t, u), \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Nous prouvons la convergence de la solution approximative vers la solution faible d'entropie du problème. Nous donnons une évaluation d'erreur entre la solution approximative et la solution faible d'entropie.

2 Approximation Numérique par la Méthode des Lignes de Volumes Finis

On considère le problème non linéaire suivant :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t), \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T] \\ \left\{ \begin{array}{l} u(0, t) = g_0(t), \quad t \in [0, T], \\ u(1, t) = g_1(t), \quad t \in [0, T], \\ u(x, 0) = U_0(x), \quad x \in [0, 1], \end{array} \right. \end{array} \right.$$

où la solution faible $u(x, t)$ est définie sur $[0, 1] \times [0, T]$.

On considère une subdivision de $[0, 1]$, soit $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et on note

$$x_{i+1/2} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}.$$

On définit ensuite les volumes de contrôle $K_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ et soit $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ sa longueur.

La réunion des volumes K_i est l'intervalle $[0, 1]$,

On rappelle que les méthodes de volumes finis ([1], [3], [4], [6], [10], [11], [12], [15], [18], [19] et [20]) consistent à chercher une approximation de la moyenne de la solution sur chaque volume de contrôle K_i .

Pour chaque élément K_i du maillage, on introduit une valeur moyenne $u_i(t)$ de la solution, qu'on suppose existe ([1], [2], [4], [6] [16]) :

$$u_i(t) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u(x, t) dx, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx, \quad i \in \mathbb{N}.$$

On intègre l'équation (2.1) sur K_i afin d'obtenir

$$h_i \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} + \frac{1}{2} (u^2(x_{i+1/2}, t) - u^2(x_{i-1/2}, t)) = \int_{K_i} f(x, t) dx.$$

On note

$$F(x_{i+1/2}, t) = \frac{u^2(x_{i+1/2}, t)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u(x_{i+1}, t) + u(x_i, t)}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} (u(x_{i+1}, t) + u(x_i, t))^2$$

$$F(x_{i-1/2}, t) = \frac{u^2(x_{i-1/2}, t)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t)}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} (u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))^2$$

$$f_i(t) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x, t) dx.$$

L'équation s'écrit donc

$$h_i \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} + (F(x_{i+1/2}, t) - F(x_{i-1/2}, t)) = h_i f_i(t).$$

On approche le flux de la solution exacte aux sommets $x_{i+1/2}$ et $x_{i-1/2}$ afin d'obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} + \frac{1}{8h_i} (u(x_{i+1}, t) + u(x_i, t))^2 - \frac{1}{8h_i} (u(x_i, t) + u(x_{i-1}, t))^2 = f_i(t)$$

Comme x_i est le centre de K_i (voir [3] et [6]), on a

$$|u_i(t) - u(x_i, t)| \leq ch^2.$$

Posons

$$\Psi(u_{i+1}, u_i) = \frac{1}{8} (u_{i+1}(t) + u_i(t))^2,$$

le flux numérique. Nous aurons

$$h_i \frac{\partial u_i(t)}{\partial t} + \Psi(u_{i+1}, u_i) - \Psi(u_{i+1}, u_i) = h_i f_i(t), \quad t \geq 0.$$

Donc

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{1}{8h_i} (u_i(t) + u_{i-1}(t))^2 - \frac{1}{8h_i} (u_{i+1}(t) + u_i(t))^2 + f_i(t).$$

La discrétisation en temps de la méthode ne demande que d'appliquer les divers schémas de base pour résoudre une équation différentielle ordinaire générale de la forme

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(t, u), \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

avec

$$F_i(t, u) = \frac{1}{8h_i}(u_i(t) + u_{i-1}(t))^2 - \frac{1}{8h_i}(u_{i+1}(t) + u_i(t))^2 + f_i(t)$$

et

$$F(t, u) = (F_1(t, u), F_2(t, u), \dots, F_N(t, u))$$

On dispose un pas de temps $\Delta t > 0$ et on pose $t_n = n\Delta t$, $n \geq 0$ entier.

On choisit, par exemple, le schéma de Crank-Nicolson on obtient

$$\frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n) = \frac{1}{2}(F(t_n, u^n) + F(t_{n+1}, u^{n+1})).$$

3 Etude de la Convergence

Nous fixons une condition initiale $u^0 \in L^\infty([0, 1])$, que nous discrétisons sur un maillage \mathcal{T}_m de pas $h_m > 0$:

$$(u_m)_i^0 = \frac{1}{h_m} \int_{K_i} u(x, 0) dx, \quad i \in \mathbb{N}$$

Nous utilisons un pas de temps Δt_m , et cherchons une fonction u_m supposée constante dans chaque pavé de la forme

$]ih_m, (i + 1)h_m[\times]n\Delta t_m, (n + 1)\Delta t_m[$. Alors

$$u_m(x, t) = (u_m)_i^n, \quad (x, t) \in]ih_m, (i + 1)h_m[\times]n\Delta t_m, (n + 1)\Delta t_m[.$$

On calcule $(u_m)_i^{n+1}$ d'après

$$\frac{1}{\Delta t_m}((u_m)_i^{n+1} - (u_m)_i^n) + \frac{1}{h_m}(\Psi((u_m)_{i+1}^n, (u_m)_i^n) - \Psi((u_m)_i^n, (u_m)_{i-1}^n)) = f_i^n$$

Lorsque $\Delta t_m \rightarrow 0$ et $h_m \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$, le comportement de la famille de fonctions $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ peut converger vers une solution faible de problème ([1]).

Definition 3.1. (Consistence avec la condition d'entropie)([1], [3], [10], [14], [15] et [19]) Un schéma de volume finis explicite est consistant avec

l'inégalité d'entropie si, pour toute entropie mathématique η ($\eta > 0$, η convexe), il existe une fonction de flux numérique d'entropie Φ consistante avec le flux d'entropie ξ (on rappelle que $\xi' = \eta'(\frac{u^2}{2})'$) :

$$\Phi(u, u) = \xi(u).$$

de sorte que si u_i^n est donné par le schéma numérique :

$$\frac{1}{\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{h_i}(\Psi(u_{i+1}^n, u_i^n) - \Psi(u_i^n, u_{i-1}^n)) = f_i^n,$$

alors, on a également une inégalité discrète d'entropie

$$\frac{1}{\Delta t}(\eta(u_i^{n+1}) - \eta(u_i^n)) + \frac{1}{h_i}(\Phi(u_{i+1}^n, u_i^n) - \Phi(u_i^n, u_{i-1}^n)) \leq \eta(f_i^n),$$

où

$$\eta(f_i^n) = \frac{1}{h_i \Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \eta'(u) f(x, t) dx dt.$$

Cette définition permet de compléter l'unicité de la solution entropique dans le théorème de Lax-Wendroff.

Theorem 3.1. (Convergence)([16]) On se place dans le cadre ci-dessus d'une famille \mathcal{T}_m de maillages uniformes de pas $h_m > 0$ et d'une famille Δt_m de pas de temps. On construit une suite (u_m) . On fait les hypothèses suivantes :

(H₁) : la fonction de flux numérique $\Psi(\cdot, \cdot)$ est consistante avec le flux $(\frac{u^2}{2})$ de la loi de conservation

$$\Psi(u, u) = \left(\frac{u^2}{2}\right);$$

(H₂) : la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans $L^\infty([0, 1])$

$$\exists d > 0, \quad \|u^0\|_{L^\infty([0, 1])} \leq d, \quad \|u_m\|_{L^\infty([0, 1])} \leq d, \quad m \in \mathbb{N};$$

(H₃) : la fonction de flux numérique Ψ est lipchitzienne sur $[-d, d]^2$ i.e.,

$$\exists L > 0, \quad |\Psi(u_1, u_2) - \Psi(v_1, v_2)| \leq L(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|),$$

$$(u_1, u_2, v_1, v_2) \in [-d, d]^4;$$

(H₄) : il existe $u \in L^\infty([0, 1] \times [0, T])$ telle que

$$\lim_{(m \rightarrow \infty)} u_m(x, t) = u(x, t) \quad p.p. (x, t).$$

Alors $u(., .)$ est une solution faible du problème.

Proof. 1) Le flux numérique $\Psi(., .)$ est consistant avec le flux $(\frac{u^2}{2})$ de la loi de conservation, car

$$\Psi(u, u) = \frac{1}{8}(u + u)^2 = \left(\frac{u^2}{2}\right).$$

2) On a

$$(u_m)_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u(x, 0) dx, \quad i \in \mathbb{N}.$$

On en déduit par récurrence

$$\alpha \leq \|u^0\|_{L^\infty([0,1])} \leq \beta \Rightarrow \alpha \leq \|u_m\|_{L^\infty([0,1])} \leq \beta, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée)

3) Comme $\Psi(u, v)$ appartient à la classe $C^2([-d, d]^2)$ par rapport à u et v alors le flux numérique Ψ est lipchitzien sur $[-d, d]^2$.

En effet ; on écrit la convexité de la fonction η : le point $\eta(u_i^n)$ est au-dessus de la direction tangente issue de u_i^{n+1} :

$$\eta(u_i^n) \geq \eta(u_i^{n+1}) + \varrho_i^{n+1}(u_i^n - u_i^{n+1}),$$

avec

$$\varrho_i^{n+1} = \frac{\partial \eta(u)}{\partial u_i^n},$$

voir ([7]). On en déduit

$$\eta(u_i^n) \geq \eta(u_i^{n+1}) + \frac{\Delta t}{h_i} \varrho_i^{n+1} (\Psi(u_{i+1}^n, u_i^n) - \Psi(u_i^n, u_{i-1}^n)) - \Delta t \varrho_i^{n+1} f_i^n$$

ce qui implique

$$\Delta t \varrho_i^{n+1} f_i^n \geq \eta(u_i^{n+1}) - \eta(u_i^n) + \frac{\Delta t}{h_i} \varrho_i^{n+1} (\Psi(u_{i+1}^n, u_i^n) - \Psi(u_i^n, u_{i-1}^n)).$$

Comme

$$\varrho_i^{n+1} \Psi(u_{i+1}^n, u_i^n) = \Phi(u_{i+1}^n, u_i^n) \quad \text{et} \quad \varrho_i^{n+1} f_i^n = \eta(f_i^n),$$

donc, nous obtenons

$$\Delta t \eta(f_i^n) \geq \eta(u_i^{n+1}) - \eta(u_i^n) + \frac{\Delta t}{h_i} (\Phi(u_{i+1}^n, u_i^n) - \Phi(u_i^n, u_{i-1}^n)).$$

ce qui nous donne

$$\frac{1}{\Delta t} (\eta(u_i^{n+1}) - \eta(u_i^n)) + \frac{1}{h_i} (\Phi(u_{i+1}^n, u_i^n) - \Phi(u_i^n, u_{i-1}^n)) \leq \eta(f_i^n).$$

Remark 3.1. *Le théorème précédent nous dit que si la famille de solutions numériques $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge, alors cette convergence sera vers une solution faible du problème.*

Remark 3.2. *E. Tadmor ([20], 1987) a démontré, avec l'inégalité d'entropie, que tout schéma de volume finis implicite est consistant.*

Proposition 3.2. *(Convergence de la méthode des volumes finis) Sous les hypothèses du théorème précédent, si le schéma numérique est consistant avec la condition d'entropie, pour toute entropie η , et le flux numérique Φ est lipchitzien sur l'intervalle $[-d, d]$, alors la limite u est l'unique solution faible entropique bornée du problème.*

4 Algorithme

Etape 1 : calculer

$$f_i(t) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x, t) dx, \quad i = 1 \dots N.$$

$$(u_i)_0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u(x, 0) dx, \quad i = 1 \dots N.$$

Etape 2 : poser $t_{n+1} = t_n + \Delta t$; calculer pour $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{16h_i} ((u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})^2 - (u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1})^2 + 8h_i f_i(t_{n+1})) \\ = u_i^n + \frac{\Delta t}{16h_i} ((u_i^n + u_{i-1}^n)^2 - (u_{i+1}^n + u_i^n)^2 + 8h_i f_i(t_n)); \end{aligned}$$

Etape 3 : calculer

$$F_i(t_n, u^n) = \frac{1}{8h_i}(u_i^n + u_{i-1}^n)^2 - \frac{1}{8h_i}(u_{i+1}^n + u_i^n)^2 + f_i(t_n)$$

$$F_i(t_{n+1}, u^{n+1}) = \frac{1}{8h_i}(u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1})^2 - \frac{1}{8h_i}(u_{i+1}^{n+1} + u_i^{n+1})^2 + f_i(t_{n+1})$$

$$F(t_n, u^n) = (F_1(t_n, u^n), F_2(t_n, u^n), \dots, F_N(t_n, u^n)).$$

Etape 4 : poser $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, calculer

$$\frac{1}{\Delta t}(u^{n+1} - u^n) = \frac{1}{2}(F(t_n, u^n) + F(t_{n+1}, u^{n+1})).$$

$$u_i^{n+1} - \frac{\Delta t}{2}F(t_{n+1}, u^{n+1}) = u_i^n + \frac{\Delta t}{2}F(t_n, u^n), \quad i = 1, \dots, N.$$

5 Résultats graphiques (Evaluation d'erreur)

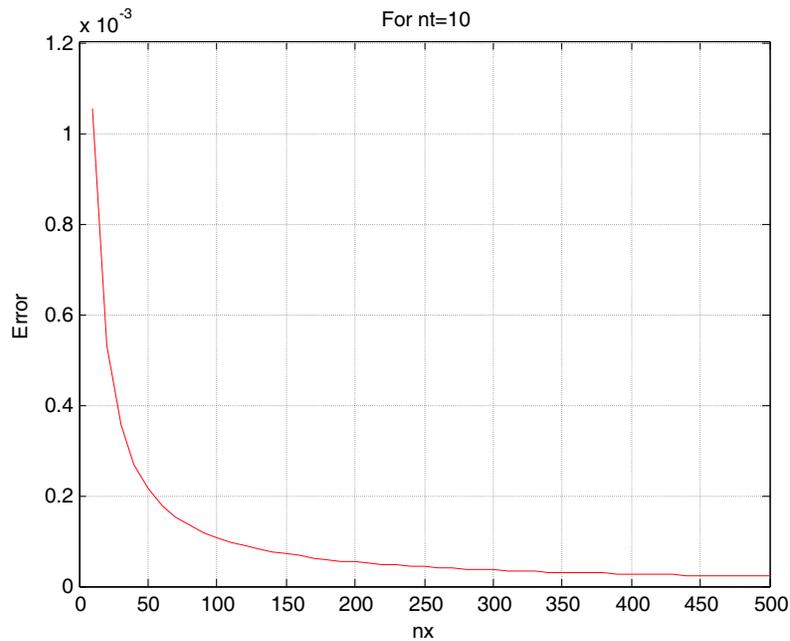
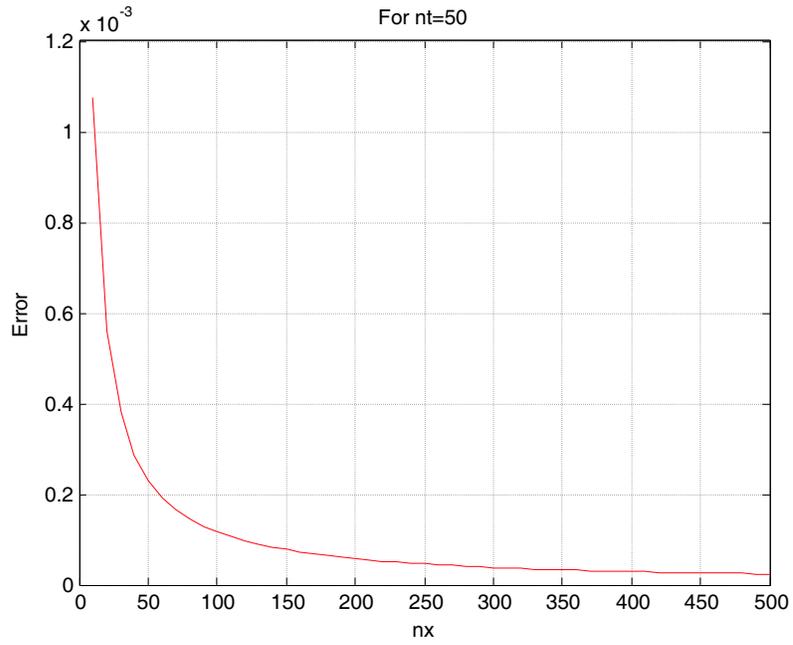
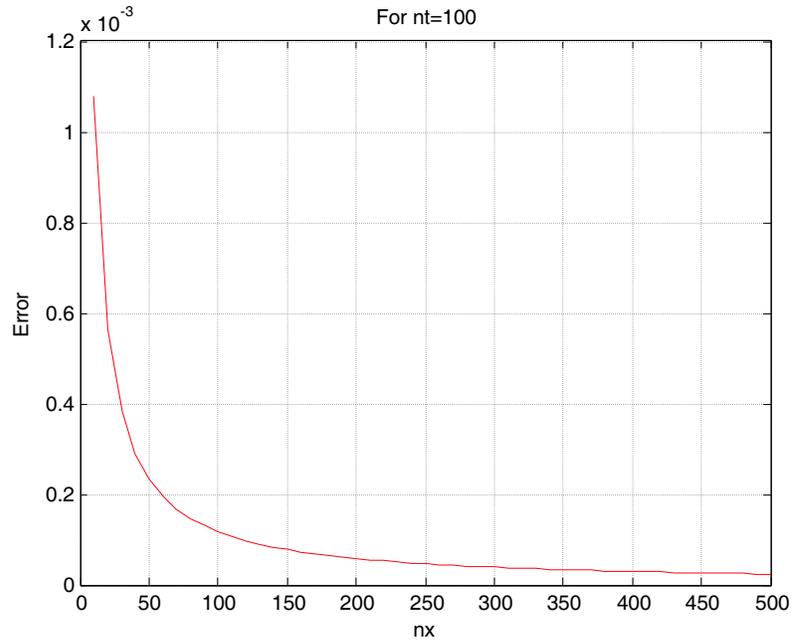


Figure 1: Error for $\Delta t = 0.1$ and $\alpha = 0.001$

Figure 2: Error for $\Delta t = 0.2$ and $\alpha = 0.001$ Figure 2: Error for $\Delta t = 0.01$ and $\alpha = 0.001$

où nx désigne le nombre de discrétisations spatiales et nt désigne le nombre de discrétisation du temps.

6 Conclusions

L'erreur obtenue par la méthode des lignes pour l'équation de Burgers avec un terme additif due aux forces extérieures (fonction de source) sous la forme

$$f(x, t) = \alpha\pi x(x-1) \sin(-\alpha\pi x) + x(x-1)(2x-1) \cos^2(\alpha\pi x)$$

reste invariant lorsque on augmente le nombre nt de discrétisation du temps, mais elle diminue avec des nombres de discrétisation en espace nx assez grand.

Références

- [1] T. Barth and M. Ohlberger, *Finite volume methods : foundation and analysis* (Report : NASA Ames Research Center, 2003), Encyclopedia of Computational Mechanics, Joh Wiley & Son Ltd, 2004.
- [2] C. Bardos, Le Roux, A. Yves, J. Nedelec, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, J. Commun. Partial Diff. Equations, 4(1979), pp. 1017-1034.
- [3] N. Daili, *Numerical Analysis : Theory and Algorithms, (Chapter : finite volume methods)*, Book in preparation, 2008.
- [4] B. Després, F. Dubois, *Systèmes hyperboliques de lois de conservation : Application à la dynamique des gaz*, Edition Ellipses, Paris, 2005.
- [5] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation*, Chin. Ann. Math., Vol. 16B(1)(1995), pp. 1-14.

- [6] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *Finite Volume Methods*, Handbook of Numerical Analysis, Vol. VII, P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, (2000), pp. 713–1020.
- [7] A. Guesmia, N. Daili, *Existence and Uniqueness of an Entropy Solution for Burgers Equation*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 2, no.33(2008), pp. 1635 - 1664.
- [8] A. Guesmia, N. Daili, *Finite Volume Approximation of Stationary Burgers' Equation*, Jour. Analysis and Applications (JAA), Vol. 6, No. 3 (2008), pp. 179-193.
- [9] A. Guesmia, N. Daili, *Finite Volume Approximation of Evolution Burgers Equation*, Nova Publisher New York, Pacific Journal of Applied Mathematics (PJAM) (2009) to appear.
- [10] E. Godlewski, P. Raviart, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [11] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows, Volume 1 : Fundamentals of numerical discretization*, Series in Numerical Methods in Engineering, Wiley-Interscience Publication, 1988.
- [12] C. Hirsch, *Numerical computation of internal and external flows, Volume 2 : Computational methods for inviscid and viscous flows*, Series in Numerical Methods in Engineering, Wiley-Interscience Publication, 1990.
- [13] F. Jędrzejewski, *Introduction aux méthodes numériques*, deuxième édition, Springer-Verlag, Paris, 2005.
- [14] S.N. Kruzhkov, *First order quasilinear equations with several independent variables*, Mat. Sb. (N.S.) 81(123) (1970), pp. 228-255.
- [15] D. Kröner, *Numerical schemes for conservation laws*, Wiley-Teubner Series Advances in Numerical Mathematics, Chichester, 1997.

- [16] P.D. Lax, B. Wendroff, *Systems of conservation laws*, Comm; Pure Appl. Math. 13(1960), pp. 217-237.
- [17] A.Y. Le Roux, *Vanishing method for a quasilinear first order equation with boundray conditions*, Conference on the numerical analysis of singular perturbation problems, Nijmegen, (to appear in Academic Press), 1978.
- [18] R. Li, Ch. Zh Chen, *The Generalized Difference Methods for Differential Equations. Numerical Analysis of Finite Volume Methods*, Marcel Dekker Inc. New York, 2000.
- [19] K. Morton, *Numerical solution of convection-diffusion problems*, Applied Mathematics and Mathematical Computation, 12. Chapman & Hall, London, 1996.
- [20] E. Tadmor, *The numerical viscosity of entropy stable shemes for systems of conservation laws.I*, Math of Comp. 49(179)(1987), pp. 91-103.
- [21] A. L. Vol'pert, *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR SB. 2(1967), pp. 225-267.

A. Guesima
 Université du 20 Août 1955 - Skikda,
 Route d'El-Hadaiek,
 B.P. 26, Skikda, 21000
 Algeria
 E-mail:guesmiasaid@yahoo.fr

N. Daili
 22, Rue Zaabat Ramdane. C.Y.,
 19000 Sétif - Algeria
 E-mail: nourdaili_dz@yahoo.fr