Journal of Lie Theory
Volume **10** (2000) 195–206

Transformation de Fourier et endoscopie

Jean-Loup Waldspurger

Communicated by J. Faraut

Résumé. Soient G un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien F, et H un groupe endoscopique de G. On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H. On définit la notion de distribution H-stable sur $\mathfrak{g}(F)$. Conjecturalement, il s'agit d'une distribution image par transfert d'une distribution stable sur $\mathfrak{h}(F)$. On démontre que l'espace des distributions H-stables sur $\mathfrak{g}(F)$ est invariant par transformation de Fourier.

I. Introduction

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle, à corps résiduel fini. Si M est un groupe réductif connexe défini sur F, on note par la lettre minuscule $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie; $\mathfrak{m}_{\rm reg}$ l'ensemble des $X \in \mathfrak{m}$ dont le centralisateur T_X dans M est un tore; $C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$ l'espace des fonctions sur $\mathfrak{m}(F)$ à valeurs complexes, localement constantes et à support compact.

Soient G et G^* des groupes réductifs connexes définis sur F, G^* étant quasi-déployé, $\varphi : G \to G^*$ un torseur intérieur, (H, s, ξ) des données endoscopiques pour G^* (cf.[1] §7). On sait définir un sous-ensemble ouvert $\mathfrak{h}_{G^*-\rm reg}$ de $\mathfrak{h}_{\rm reg}$ et un facteur de transfert

$$\Delta_{G,H} : \mathfrak{h}_{G^*-\rm reg}(F) \times \mathfrak{g}_{\rm reg}(F) \to \mathbb{C}$$

(cf. [5] 2.2,2.3; les définitions sont dues à Langlands et Shelstad). On munit $G(F)$ d'une mesure de Haar, en imposant à ces mesures une condition de compatibilité (cf. [5] 2.5). Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Pour $X \in \mathfrak{g}_{\rm reg}(F)$, on pose:

$$J(X, f) = D(X)^{1/2} \int_{T_X(F)\backslash G(F)} f((Ad\, x^{-1})(X))dx,$$

où D est le facteur usuel (cf. [5] 1.1). Pour $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\rm reg}$, on pose:

$$J^{G,H}(Y, f) = \sum_X \Delta(Y, X) J(X, f),$$

ISSN 0949–5932 / $2.50

où X parcourt $\mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ modulo la conjugaison par $G(F)$ (on appelle conjugaison l'action adjointe). Fixons une forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}(F)$, symétrique, non dégénérée et invariante par conjugaison, et un caractère $\psi : F \to \mathbb{C}^{\times}$ continu et non trivial. On peut alors définir dans $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))$ la transformation de Fourier $f \to \hat{f}$. On définit par dualité la transformation de Fourier $D \to \hat{D}$ sur l'espace des distributions, noté $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))^*$ (le dual algébrique de $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))$).

Considérons le cas où $(H, s, \xi) = (G^*, 1, id)$. Notons $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))^{G^*-\mathrm{inst}}$ le sous-espace des $f \in C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))$ telles que $J^{G,G^*}(Y, f) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{reg}}(F)$. Appelons distribution stable une distribution qui annule ce sous-espace $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))^{G^*-\mathrm{inst}}$. On a prouvé (cf. [5] 1.6) le résultat suivant.

Proposition. *La transformée de Fourier d'une distribution stable est une distribution stable.*

On se propose de généraliser ce résultat. Revenons au cas où (H, s, ξ) est quelconque. Notons $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))^{H-\mathrm{inst}}$ le sous-espace des $f \in C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))$ telles que $J^{G,H}(Y, f) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$. Appelons distribution H-stable une distribution qui annule $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))^{H-\mathrm{inst}}$. Alors:

Proposition A. *La transformée de Fourier d'une distribution H-stable est une distribution H-stable.*

Ce résultat est une conséquence des constructions de l'article [5]. De même que la proposition précédente résulte de la conjecture 1.2 de [5] (pour $(H, s, \xi) = (G^*, 1, id)$), de même la proposition A résulterait de cette conjecture dans le cas général. Mais celle-ci n'est prouvée que sous l'hypothèse (lourde) de la validité du "lemme fondamental" . Pour se passer de cette hypothèse, on doit légèrement modifier nos constructions et utiliser un résultat de Langlands et Shelstad sur le transfert des éléments unipotents réguliers ([3] th. 5.5 A). Bien sûr, et malheureusement, on n'obtient ainsi que la proposition A et non pas la conjecture 1.2 de [5]. Comme on l'a compris, cet article est une suite à [5] dont nous utiliserons librement les notations et définitions.

II. Réductions

II.1. On note $\mathcal{E}(F)$ l'ensemble des données $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi)$ comme au §I (cf. [5] 1.1). Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. Notons que la proposition A est équivalente à la

Proposition B. $C_c^{\infty}(\mathfrak{g}(F))^{H-\mathrm{inst}}$ *est stable par transformation de Fourier.*

Lemme. *La validité de la proposition B est indépendante du choix de ψ et de la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$.*

Preuve. Soient ψ' et $\langle\cdot,\cdot\rangle'_{\mathfrak{g}}$ d'autres données. Alors il existe un automorphisme τ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}(F)$, commutant à la conjugaison par $G(F)$, de sorte que

$$\psi'(\langle X, Z\rangle'_{\mathfrak{g}}) = \psi(\langle X, \tau(Z)\rangle_{\mathfrak{g}})$$

pour tous $X, Z \in \mathfrak{g}(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, notons $\hat{f}'$ la transformée de Fourier relative à ψ' et $\langle\cdot,\cdot\rangle'_{\mathfrak{g}}$. Alors $\hat{f}' = |\det\tau|_F^{1/2}\hat{f}\circ\tau$. Il suffit alors de prouver que $C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))^{H-\mathrm{inst}}$ est stable par $f \mapsto f\circ\tau$. Or il existe un automorphisme τ_H de l'espace vectoriel $\mathfrak{h}(F)$, commutant à la conjugaison par $H(F)$, et une constante $c \neq 0$, de sorte que

$$\Delta_{G,H}(\tau_H(Y), \tau(X)) = c\Delta_{G,H}(Y, X)$$

pour tous $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$, $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{reg}}(F)$ (cf. [5] 3.2). En utilisant les formules de [5] 3.2, on calcule

$$J^{G,H}(Y, f\circ\tau) = c^{-1}|\det\tau|_F^{-1/2}|\det(\tau_H|_{\mathfrak{t}_Y})|_F^{1/2} J^{G,H}(\tau_H(Y), f)$$

pour tous $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ et l'assertion est claire. ∎

II.2. Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. Notons G_{der} le groupe dérivé de G, G_1 le revêtement simplement connexe de G_{der} et Z_1 le noyau de l'application $G_1 \to G$. On a donc la suite exacte:

$$1 \to Z_1 \to G_1 \to G \to G/G_{der} \to 1$$

On a construit en [5] 4.2 des données $E_1 = (G_1, G_1^*, \varphi_1, H_1, s_1, \xi_1) \in \mathcal{E}(F)$.

Lemme. *Si la proposition B est vraie pour les données E_1, elle l'est pour les données E.*

Preuve. Par construction, on a des homomorphismes

$$\beta : G_1 \to G, \qquad \delta : H_1 \to H.$$

Notons $\mathfrak{z}$ l'algèbre de Lie du centre de G. On a des isomorphismes:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1, \qquad \mathfrak{h} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{h}_1$$

les plongements de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$, resp. $\mathfrak{h}_1$ dans $\mathfrak{h}$, étant les dérivés de β, resp. δ. Pour $X \in \mathfrak{g}$, on note $X' \in \mathfrak{z}$ et $X'' \in \mathfrak{g}_1$ ses composantes selon la décomposition ci-dessus, et de même pour $Y \in \mathfrak{h}$. Soit $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$. Choisissons un ensemble fini I et, pour tout $i \in I$, des fonctions $f'_i \in C_c^\infty(\mathfrak{z}(F))$, $f''_i \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))$, de sorte que:

(1) la famille $(f'_i)_{i\in I}$ est linéairement indépendante;

(2) pour tout $X \in \mathfrak{g}(F)$, $f(X) = \sum_{i\in I} f'_i(X')f''_i(X'')$.

Pour $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$, on a

$$J^{G,H}(Y, f) = \sum_{X''}\sum_{i\in I} \Delta_{G,H}(Y, Y' + X'')f'_i(Y')J^G(X'', f''_i),$$

où X'' parcourt $\mathfrak{g}_{1,reg}(F)$ modulo la conjugaison par $G(F)$, et l'exposant G dans J^G signifie que l'on intègre sur la classe de $G(F)$-conjugaison de X''. Il en résulte aisément que

$$J^{G,H}(Y,f)=\sum_{X''}\sum_{i\in I}\Delta_{G,H}(Y,Y'+X'')f'_i(Y')J^{G_1}(X'',f''_i),$$

où cette fois X'' parcourt $\mathfrak{g}_{1,reg}(F)$ modulo la conjugaison par $G_1(F)$, et l'exposant G_1 dans J^{G_1} a une signification évidente. D'après [5] lemme 4.3 et 4.3 (2), il existe une constante $c\neq 0$ telle que:

$$\Delta_{G,H}(Y,Y'+X'')=c\Delta_{G_1,H_1}(Y'',X'').$$

Alors

(3) $J^{G,H}(Y,f)=c\sum_{i\in I}f'_i(Y')J^{G_1,H_1}(Y'',f''_i)$.

Supposons $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))^{H-\text{inst}}$. Alors l'expression (3) est nulle pour tout $Y\in\mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$. Grâce à (1), on en déduit que pour tout $i\in I$ et tout $Y''\in\mathfrak{h}_{1,G_1^*-\text{reg}}(F)$, $J^{G_1,H_1}(Y'',f''_i)=0$, i.e. $f''_i\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))^{H_1-\text{inst}}$.

Munissons $\mathfrak{z}(F)$ et $\mathfrak{g}_1(F)$ des restrictions de la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$, ce qui permet de définir des transformations de Fourier dans $C_c^\infty(\mathfrak{z}(F))$ et $C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))$. Sous l'hypothèse du lemme, on a donc $\hat{f}''_i\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_1(F))^{H_1-\text{inst}}$. Bien sûr, $\hat{f}(X)=\sum_{i\in I}\hat{f}'_i(X')\hat{f}''_i(X'')$. En appliquant la relation (3) à $\hat{f}$, on voit que $J^{G,H}(Y,\hat{f})=0$ pour tout $Y\in\mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$, i.e. $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))^{H-\text{inst}}$. ∎

II.3. Soit $E=(G,G^*,\varphi,H,s,\xi)\in\mathcal{E}(F)$. Disons que E est consistante si le facteur $\Delta_{G,H}$ n'est pas identiquement nul. Si E n'est pas consistante, la proposition B est triviale. Supposons E consistante. On a introduit en [5] 6.3 des groupes M et M^*. Le premier, resp. le second, est un sous-groupe de Lévi défini sur F d'un sous-groupe parabolique P de G, resp. P^* de G^*, défini sur F. On a défini des données $E_M=(M,M^*,\varphi_M,H,s,\xi_M)$. Les données endoscopiques (H,s,ξ_M) de M^* sont elliptiques.

Lemme. *Si la proposition B est vraie pour les données E_M, elle l'est pour les données E.*

Preuve. Grâce à [5] lemmes 6.4 et 6.5, il existe une constante $c\neq 0$ telle que, pour tous $f\in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et $Y\in\mathfrak{h}_{G^*-\text{reg}}(F)$,

(1) $$J^{G,H}(Y,f)=c\sum_{Z}\Delta_{M,H}(Y,Z)J^G(Z,f),$$

où Z parcourt $\mathfrak{m}_{\text{reg}}(F)$ modulo la conjugaison par $M(F)$. Notons $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}$, fixons un sous-groupe compact maximal K de $G(F)$ tel que $G(F)=P(F)K$ et introduisons la fonction $f^P\in C_c^\infty(\mathfrak{m}(F))$ définie par

$$f^P(Z)=\int_K\int_{\mathfrak{n}(F)}f((Ad\,k)(Z+N))\,dN\,dk$$

Les mesures étant convenablement choisies, on a l'égalité

$$J^G(Z,f)=J^M(Z,f^P),$$

pour tout $Z\in\mathfrak{m}(F)$. De (1) résulte l'égalité

$$J^{G,H}(Y,f)=cJ^{M,H}(Y,f^P).$$

D'autre part, $\mathfrak{m}(F)$ étant muni de la restriction de la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$, on a l'égalité $(\hat{f})^P=(f^P)\hat{}$. Le lemme en résulte aisément. ∎

II.4. Il résulte des deux lemmes ci-dessus qu'il suffit de démontrer la proposition B dans le cas où G^*_{der} est simplement connexe et les données (H, s, ξ) sont elliptiques.

III. L'argument global

III.1. Soit $E = (G, G^*, \varphi, H, s, \xi) \in \mathcal{E}(F)$. Supposons $G = G^*$, $\varphi = id$ et que H se déploie sur une extension non ramifiée de F. On fixe une telle extension F'. Le groupe G lui-même est déployé sur F' ([5] 7.3 (2)). Fixons une sous-algèbre hyperspéciale $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}(F)$, notons $1_{\mathfrak{k}}$ sa fonction caractéristique.

Proposition. *Il existe un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{h}(F)$ tel que pour tout $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F) \bigcap V$,*

$$J^{G,H}(Y, 1_{\mathfrak{k}}) \neq 0.$$

Preuve. Soit $\mathcal{N}_{\mathrm{reg}}$ l'ensemble des éléments nilpotents réguliers de $\mathfrak{g}$. Fixons une forme différentielle sur $\mathcal{N}_{\mathrm{reg}}$, de degré maximal, invariante par conjugaison et définie sur F. On en déduit une mesure sur $\mathcal{N}_{\mathrm{reg}}(F)$ invariante par conjugaison. Pour tout $N \in \mathcal{N}_{\mathrm{reg}}(F)$, notons

$$G(F).N = \{(Ad\, x)(N);\ x \in G(F)\}.$$

C'est un ouvert de $\mathcal{N}_{\mathrm{reg}}(F)$ qui est donc muni d'une mesure. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$, on pose

$$J(N, f) = \int_{G(F).N} f(X)\, dX.$$

Langlands et Shelstad ont introduit une fonction $\Delta : \mathcal{N}_{\mathrm{reg}}(F) \to \mathbb{C}^\times$ et prouvé que

$$(1) \qquad \lim_{Y \to 0} J^{G,H}(Y, f) = \sum_N \Delta(N) J(N, f),$$

où N parcourt $\mathcal{N}_{\mathrm{reg}}(F)$ modulo la conjugaison par $G(F)$, et bien sûr Y reste toujours dans $\mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(F)$ ([3] th. 5.5.A).

Remarques (2) Le facteur $D_{H_1}(Y_1)$ de Langlands-Shelstad disparaît car nous avons éliminé le facteur Δ_{IV} de la définition du facteur de transfert.

(3) Langlands et Shelstad ont démontré en fait une relation analogue sur les groupes mais on en déduit l'assertion pour les algèbres de Lie via l'exponentielle.

Fixons un sous-groupe de Borel B de G et un sous-tore maximal T de B, tous deux définis sur F. On suppose que le sommet de l'immeuble de G auquel est associée la sous-algèbre $\mathfrak{k}$ appartient à l'appartement associé au plus grand sous-tore déployé de T. Notons $\mathfrak{n}$ le radical nilpotent de $\mathfrak{b}$, Σ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{n}$, Π le sous-ensemble des racines simples et, pour tout $\alpha \in \Sigma$, $\mathfrak{n}_\alpha$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{n}$ associé à α. Posons

$$\mathfrak{n}'' = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma - \Pi} \mathfrak{n}_\alpha$$

Notons $\bar{F}$ la clôture algébrique de F et $\Gamma = Gal(\bar{F} \backslash F)$. Le groupe Γ agit sur Σ et sur Π. Fixons un ensemble de représentants Π_0 des orbites de Γ dans Π. Pour $\alpha \in \Pi_0$, on note $\mathfrak{n}'_\alpha = \oplus_{\beta \in \Gamma_\alpha} \mathfrak{n}_\beta$, Γ_α le fixateur de α dans Γ, F_α le corps des points fixes de Γ_α et $\mathcal{O}_\alpha$ son anneau d'entiers. Remarquons que $F_\alpha \subseteq F'$. Pour tout $\alpha \in \Pi$, fixons une base E_α de $\mathfrak{n}_\alpha(\bar{F})$. On suppose, ainsi qu'il est loisible, que $\sigma E_\alpha = E_{\sigma\alpha}$ pour tous $\sigma \in \Gamma$, $\alpha \in \Pi$. Alors pour tout $\alpha \in \Pi_0$, l'application

$$\zeta_\alpha : F_\alpha \to \mathfrak{n}'_\alpha(F), \quad t \to \bigoplus_{\sigma \in \Gamma / \Gamma_\alpha} \sigma(t) E_{\sigma\alpha}$$

est un isomorphisme. Il résulte de la théorie de Bruhat-Tits que l'on a l'égalité

$$\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}(F) = \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Pi_0} \mathfrak{n}'_\alpha(F) \cap \mathfrak{k} \Big) \bigoplus \mathfrak{n}''(F) \cap \mathfrak{k}. \tag{2}$$

Si les E_α sont bien choisis, ce que l'on supposera désormais, on a en outre

$$\mathfrak{n}'_\alpha(F) \cap \mathfrak{k} = \zeta_\alpha(\mathcal{O}_\alpha) \tag{3}$$

pour tout $\alpha \in \Pi_0$.

Notons d'autre part K le sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ dont $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie et fixons des mesures de Haar sur K et $\mathfrak{n}(F)$. Il existe $c_1 \neq 0$ tel que pour tout $N \in \mathcal{N}_{\rm reg}(F)$ et toute $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$,

$$J(N, f) = c_1 \int_K \int_{\mathfrak{n}(F) \cap G(F).N} f((Ad\, x)X)\, dX\, dx.$$

Le membre de droite de l'égalité (1) est donc égal à

$$c_1 \int_K \int_{\mathfrak{n}(F) \cap \mathcal{N}_{\rm reg}(F)} \Delta(X) f((Ad\, x)X)\, dX\, dx. \tag{4}$$

On prouvera ci-dessous le lemme suivant:

Lemme. *Il existe $c_2 \neq 0$ et, pour tout $\alpha \in \Pi_0$, il existe un caractère non ramifié χ_α de $F_\alpha^\times$ de sorte que pour tout $(z_\alpha)_{\alpha \in \Pi_0} \in \prod_{\alpha \in \Pi_0} F_\alpha^\times$ et pour tout $X'' \in \mathfrak{n}''(F)$,*

$$\Delta\Big(\sum_{\alpha \in \Pi_0} \zeta_\alpha(z_\alpha) + X'' \Big) = c_2 \prod_{\alpha \in \Pi_0} \chi_\alpha(z_\alpha).$$

Les égalités (1) à (4) de III.1 montrent alors qu'il existe $c_3 \neq 0$ (dépendant des mesures) tel que

$$\lim_{Y \to 0} J^{G,H}(Y, 1_{\mathfrak{k}}) = c_3 \prod_{\alpha \in \Pi_0} \int_{\mathcal{O}_\alpha} \chi_\alpha(z_\alpha)\, dz_\alpha$$

Les χ_α étant non ramifiés, cette expression est non nulle, ce qui prouve la proposition III.1. ∎

Preuve du lemme. Pour tous $(z_\alpha)_{\alpha\in\Pi_0} \in \prod_{\alpha\in\Pi_0} F_\alpha^\times$ et tout $X'' \in \mathfrak{n}''(F)$, les éléments

$$\sum_{\alpha\in\Pi_0} \zeta_\alpha(z_\alpha) \text{ et } \sum_{\alpha\in\Pi_0} \zeta_\alpha(z_\alpha) + X''$$

sont conjugués par un élément de $B(F)$. Il suffit donc de calculer

$$\Delta(\sum_{\alpha\in\Pi_0} \zeta_\alpha(z_\alpha)).$$

Notons G_{sc} le revêtement simplement connexe de G_{der}, Z_{sc} son centre, T_{sc} l'image réciproque de T dans G_{sc}, $\hat{G}$ le groupe complexe dual de G, $\hat{T}$ un sous-tore maximal de $\hat{G}$ attaché à T et $\hat{T}_{ad}$ son image dans le groupe adjoint de $\hat{G}$. Fixons $(z_\alpha)_{\alpha\in\Pi_0} \in \prod_{\alpha\in\Pi_0} F_\alpha^\times$ et posons

$$X = \sum_{\alpha\in\Pi_0} \zeta_\alpha(z_\alpha),\ X_1 = \sum_{\alpha\in\Pi_0} \zeta_\alpha(1).$$

Soit t un élément de $T_{sc}(\bar{F})$ tel que $(Ad\,t)X_1 = X$. Le cocycle $\sigma \to t\sigma(t)^{-1}$ définit un élément $inv(X) \in H^1(\Gamma, Z_{sc}(\bar{F}))$.

Fixons un sous-groupe de Borel B_H de H et un sous-tore maximal T_H de B_H tous deux définis sur F. La donnée endoscopique ξ définit un isomorphisme

$$\eta : T_H \to T$$

qui n'est pas défini sur F. Plus précisément, pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe $w_\sigma \in G(\bar{F})$ tel que $\sigma \circ Ad\, w_\sigma \circ \eta = \eta \circ \sigma$. On peut aussi bien relever w_σ en un élément de $G_{sc}(\bar{F})$. De plus, comme w_σ normalise T, il définit un élément du groupe de Weyl de T que l'on note encore w_σ. On munira désormais T de l'action de Γ définie par $\sigma.t = \sigma(w_\sigma t w_\sigma^{-1})$ (ou, si l'on préfère, on identifiera T à T_H muni de son action naturelle). On définit de même des actions tordues sur T_{sc}, $\hat{T}$ et $\hat{T}_{ad}$. Notons que les deux actions coïncident sur $Z_{sc}(\bar{F})$ donc $inv(X)$ reste un élément de $H^1(\Gamma, Z_{sc}(\bar{F}))$ quelle que soit l'action considérée. Notons $inv_T(X)$ l'image de $inv(X)$ par l'application naturelle

$$H^1(\Gamma, Z_{sc}(\bar{F})) \to H^1(\Gamma, T_{sc}(\bar{F})).$$

La donnée endoscopique s définit un élément $s_T \in \pi_0(\hat{T}_{ad}^\Gamma)$. On a un accouplement

$$H^1(\Gamma, T_{sc}(\bar{F})) \times \pi_0(\bar{T}_{ad}^\Gamma) \to \mathbb{C}^\times.$$

D'après [3] 5.1, on a l'égalité

$$\Delta(X) = \Delta(X_1)\langle inv_T(X), s_T\rangle.$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(\Gamma, T_{sc}(\overline{F})) & \times & H^1(\Gamma, X_*(\hat{T}_{ad})) & \to & H^2(\Gamma, \overline{F}^\times) & & \\
 & & & & & \simeq & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
|| & & || & & & & \\
 & & & & & \swarrow & e^{2\pi i} \\
H^1(\Gamma, T_{sc}(\overline{F})) & \times & \pi_0(\hat{T}_{ad}^\Gamma) & \to & \mathbb{C}^* & &
\end{array}$$

L'accouplement du haut est le cup-produit (on utilise les égalités $T_{sc}(\bar{F}) = X_*(T_{sc}) \otimes \bar{F}^\times$, $X_*(\hat{T}_{ad}) = X^*(T_{sc})$). Notons $\Gamma' = Gal(\bar{F}/F')$, $d = [F' : F]$. Le groupe Γ/Γ' est cyclique, engendré par le Frobenius noté φ. On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(\Gamma', T_{sc}(\bar{F})) & \times & H^1(\Gamma', X_*(\hat{T}_{ad})) & \to & H^2(\Gamma', \bar{F}^\times) & \simeq & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow d \\
H^1(\Gamma, T_{sc}(\bar{F})) & \times & H^1(\Gamma, X_*(\hat{T}_{ad})) & \to & H^2(\Gamma, \bar{F}^\times) & \simeq & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow 1/d \\
H^1(\Gamma/\Gamma', T_{sc}(\bar{F})^{\Gamma'}) & \times & H^1(\Gamma/\Gamma', X_*(\hat{T}_{ad})) & \to & H^2(\Gamma/\Gamma', F'^\times) & \simeq & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Les suites verticales sont exactes ([4] proposition VII.4). Comme Γ' agit trivialement sur $X_*(\hat{T}_{ad})$ et $X_*(T_{sc})$, on a

$$H^1(\Gamma', X_*(\hat{T}_{ad})) = \mathrm{Hom}_{cont}(\Gamma', X_*(\hat{T}_{ad})) = 0,$$

$$H^1(\Gamma', T_{sc}(\bar{F})) = X_*(T_{sc}) \otimes H^1(\Gamma', \bar{F}^\times) = 0,$$

(Hilbert 90). Notons que $T_{sc}(\bar{F})^{\Gamma'} = X_*(T_{sc}) \otimes_{\mathbb{Z}} F'^\times$. La valuation $v : F'^\times \to \mathbb{Z}$ définit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(\Gamma/\Gamma', X_*(T_{sc})) & \times & H^1(\Gamma/\Gamma', X_*(\hat{T}_{ad})) & \to & H^2(\Gamma/\Gamma', \mathbb{Z}) & \simeq & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H^1(\Gamma/\Gamma', T_{sc}(\bar{F})^{\Gamma'}) & \times & H^1(\Gamma/\Gamma', X_*(\hat{T}_{ad})) & \to & H^2(\Gamma/\Gamma', F'^\times) & \simeq & \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}
\end{array}$$

Notons $i(X)$ l'image de $inv_T(X)$ par la composée des applications

$$H^1(\Gamma, T_{sc}(\bar{F})) \simeq H^1(\Gamma/\Gamma', T_{sc}(\bar{F})^{\Gamma'}) \to H^1(\Gamma/\Gamma', X_*(T_{sc})),$$

et S celle de s_T par la composée des applications

$$\pi_0(\hat{T}_{ad}^\Gamma) \simeq H^1(\Gamma, X_*(\hat{T}_{ad})) \simeq H^1(\Gamma/\Gamma', X_*(\hat{T}_{ad})).$$

Alors

$$(1) \quad \Delta(X) = \Delta(X_1) e^{2\pi i \langle i(X), S \rangle d^{-1}}.$$

Fixons une uniformisante ϖ de F et, pour tout $\alpha \in \Pi_0$, posons

$$X_\alpha = \zeta_\alpha(\varpi) + \sum_{\beta \in \Pi_0 - \{\alpha\}} \zeta_\beta(1).$$

Je dis que

$$(2) \quad i(X) = \sum_{\alpha \in \Pi_0} v(z_\alpha) i(X_\alpha).$$

Notons $\{\check{\alpha};\alpha\in\Pi\}$ l'ensemble des coracines associé à Π, $\{\varpi_\alpha;\alpha\in\Pi\}$ l'ensemble des copoids et T_{ad} l'image de T dans le groupe adjoint de G. Les ensembles $\{\check{\alpha};\alpha\in\Pi\}$ et $\{\varpi_\alpha;\alpha\in\Pi\}$ sont des bases de $X_*(T_{sc})$, resp. $X_*(T_{ad})$. Le cocycle définissant $inv_T(X)$ est

$$\sigma\mapsto t\sigma(t)^{-1}=t\sigma.(w_\sigma t^{-1}w_\sigma^{-1})$$

qui est cohomologue à

$$(3)\quad \sigma\mapsto\sigma.(tw_\sigma t^{-1}w_\sigma^{-1}).$$

On vérifie que ce dernier définit un élément de $H^1(\Gamma/\Gamma',T_{sc}(\bar{F})^{\Gamma'})$. D'autre part, pour tout $\sigma\in\Gamma$, l'application

$$T_{sc}\to T_{sc},\qquad t'\mapsto t'w_\sigma t'^{-1}w_\sigma^{-1},$$

se factorise par $T_{sc}\to T_{ad}$. L'image de t dans T_{ad} est

$$\sum_{\alpha\in\Pi_0}\sum_{\sigma'\in\Gamma/\Gamma_\alpha}(\sigma'\varpi_\alpha)\otimes\sigma'(z_\alpha).$$

Le cocycle (3) s'écrit donc

$$\sigma\mapsto\sum_{\alpha\in\Pi_0}\sum_{\sigma'\in\Gamma/\Gamma_\alpha}\sigma.(\sigma'\varpi_\alpha-w_\sigma(\sigma'\varpi_\alpha))\otimes\sigma\sigma'(z_\alpha).$$

Alors $i(X)$ est défini par le cocycle

$$\sigma\mapsto\sum_{\alpha\in\Pi_0}v(z_\alpha)\sum_{\sigma'\in\Gamma/\Gamma_\alpha}\sigma.(\sigma'\varpi_\alpha-w_\sigma(\sigma'\varpi_\alpha)).$$

Pour tout $\beta\in\Pi_0$, on calcule $i(X_\beta)$ en remplaçant dans l'égalité ci-dessus z_β par ϖ et z_α par 1 pour $\alpha\neq\beta$. On en déduit alors l'égalité (2).

Des égalités (1) et (2) résulte l'égalité

$$\Delta(X)=\Delta(X_1)\prod_{\alpha\in\Pi_0}(\Delta(X_\alpha)\Delta(X_1)^{-1})^{v(z_\alpha)}$$

d'où le lemme. ■

III.3. Soient k un corps de nombres, $E=(G,G^*,\varphi,H,s,\xi)\in\mathcal{E}(k)$ et u une place finie de k. On note V l'ensemble des places de k et V_∞ le sous-ensemble des places archimédiennes. On suppose vérifiées les hypothèses (1) à (5) de [5] 10.4. Alors

Proposition. *Pour tout $w\in V-(\{u\}\cup V_\infty)$, les données $E_w\in\mathcal{E}(k_w)$ vérifient la proposition B.*

Preuve. On fixe une telle place w. Fixons un caractère continu $\psi:\mathbb{A}/k\to\mathbb{C}^\times$ ($\mathbb{A}$ est l'anneau des adèles de k), une forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{g}}$ sur $\mathfrak{g}(k)$ symétrique, non dégénérée et invariante par conjugaison par $G(k)$ et deux $\mathcal{O}$-réseaux $\mathfrak{a}\subset$

$\mathfrak{g}(k)$, $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{h}(k)$ ($\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers de k). Il existe un ensemble fini $S_1 \subset V$ tel que:

$V_\infty \cup \{u, w\} \subset S_1$,

si $v \in V - S_1$, φ_v est trivial, H_v est non ramifié, $\mathfrak{a}_v$ est autodual pour le bicaractère $\psi_v(\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{g}_v})$ et est une sous-$\mathcal{O}_v$-algèbre hyperspéciale de $\mathfrak{g}_v(k_v)$, et il en est de même pour $\mathfrak{b}_v$.

On fixe un tel ensemble S_1. On en déduit comme en [5] 10.5 un ensemble fini S, avec $S_1 \subseteq S \subset V$.

Fixons $Y_w \in \mathfrak{h}_{w,G^*-\mathrm{reg}}(k_w)$ et une fonction $f_w \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(k_w))^{H_w-\mathrm{inst}}$. Pour toute place $v \in S - V_\infty$, fixons un sous-ensemble ouvert compact $\Omega_v \subset \mathfrak{h}_{v,G^*-\mathrm{reg}}(k_v)$ de sorte que les conditions (1), (2) et (3) de [5] 10.6 soient vérifiées, ainsi que

(1) $Y_w \in \Omega_w$ et la fonction $J^{G_w,H_w}(., \hat{f}_w)$ est constante sur Ω_w.

Pour toute $v \in S - V_\infty$, on fixe un voisinage ω_v de l'unité dans $k_v^\times$ qui stabilise l'ensemble Ω_v.

Fixons $Y_0 \in \mathfrak{h}(k)$ tel que pour tout $v \in S - V_\infty$, $Y_0 \in \Omega_v$ et, pour tout $v \in V - S$, $Y_0 \in \mathfrak{b}_v$. Comme Y_0 est semi-simple régulier, il existe un ensemble fini S_3 avec $S \subseteq S_3 \subset V$ tel que pour $v \in V - S_3$, le tore T_{Y_0} est non ramifié en v et la réduction de Y_0 dans $\mathfrak{b}_v/\mathcal{P}_v\mathfrak{b}_v$ est encore semi-simple régulière ($\mathcal{P}_v$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_v$). On fixe un tel ensemble S_3. Il existe $\lambda \in k^\times$ tel que:

pour tout $v \in V - S_3$, $v(\lambda) = 0$,

pour tout $v \in S_3 - S$, $v(\lambda) > 0$,

pour tout $v \in S - V_\infty$, $\lambda \in \omega_v$.

Fixons un tel λ. Grâce à la proposition 3.1, il existe un entier N tel que pour tout $v \in S_3 - S$,

$$J^{G_v,H_v}(\lambda^N Y_0, 1_{\mathfrak{a}_v}) \neq 0.$$

On fixe un tel entier N. Remplaçons désormais Y_0 par $\lambda^N Y_0$. Toutes les conditions ci-dessus restent vérifiées et l'on a maintenant:

(2) pour toute place $v \in V - S$, $J^{G_v,H_v}(Y_0, 1_{\mathfrak{a}_v}) \neq 0$.

En effet, si $v \in S_3 - S$, cela résulte de la construction ci-dessus. Si $v \in V - S_3$, Y_0 est de réduction semi-simple régulière et l'on peut appliquer le lemme de Kottwitz ([2] corollaire 7.3, repris en [5] 7.2). On construit maintenant pour toute place $v \in V$ des fonctions $f_v \in C_c^\infty(\mathfrak{g}_v(k_v))$ comme en [5] 10.7, la fonction f_w étant celle que l'on a fixée. On pose $f = \prod_{v \in V} f_v$ et l'on considère

$$I^G(f) = \int_{G(k)\backslash G(\mathbb{A})^1} \sum_{X \in \mathfrak{g}(k)} f((Ad\, x^{-1})(X))\, dx.$$

On définit de façon analogue $I^G(\hat{f})$. Ces expressions sont absolument convergentes ([5] 10.9) et on a l'égalité

$$I^G(f) = I^G(\hat{f}).$$

On a des égalités ([5] 10.9 (5) et première égalité de 10.11):

$$I^G(f) = \lambda_H^{-1}\tau(G^*) \sum_{X^*\in\mathcal{X}^*} \sum_{\kappa\in\mathcal{K}(T_{X^*}/k)} \sum_{Y\in\mathcal{X}_{H,G^*}(X^*,\kappa)} J^{G,H}(Y,f),$$

$$I^G(\hat{f}) = c(T_0^*) \prod_{v\in V} J^{G_v,H_v}(Y_v,\hat{f}_v).$$

Comme $f_w \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(k_w))^{H_w-\mathrm{inst}}$, il est clair que $J^{G,H}(Y,f) = 0$ pour tout $Y \in \mathfrak{h}_{G^*-\mathrm{reg}}(k)$. Donc $I^G(f) = 0$ et aussi $I^G(\hat{f}) = 0$. Le terme $c(T_0^*)$ est un rapport de mesures, donc non nul. Pour $v \in S - \{w\}$, $J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v) \neq 0$ par construction de f_v ([5] 8.2 (vi) et 10.8 (ii)). Si $v \in V - S$, $f_v = \hat{f}_v = 1_{\mathfrak{a}_v}$ et $J^{G_v,H_v}(Y_0,\hat{f}_v) \neq 0$ d'après (2). On obtient alors

$$J^{G_w,H_w}(Y_0,\hat{f}_w) = 0.$$

D'après (1), on a aussi $J^{G_w,H_w}(Y_w,\hat{f}_w) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $Y_w \in \mathfrak{h}_{w,G^*-\mathrm{reg}}(k_w)$, on a $\hat{f}_w \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(k_w))^{H_w-\mathrm{inst}}$ ce qui achève la preuve. ∎

Remarque . L'idée qui vient d'abord à l'esprit est d'élargir l'ensemble S et de le remplacer par S_3 ci-dessus. Mais elle est incorrecte: S doit être fixé avant Y_0 car on impose à Y_0 des conditions qui permettent d'éliminer les données endoscopiques non ramifiées hors de S autres que (H,s,ξ). D'où notre recours à la proposition III.1 et au théorème 5.5.A de [3].

III.4. **Preuve de la proposition B.** Soit $E = (G,G^*,\varphi,H,s,\xi) \in \mathcal{E}(F)$. On a déjà dit que l'on pouvait supposer G^*_{der} simplement connexe et (H,s,ξ) elliptique. Grâce à [5] 11.1, il existe un corps de nombres k, des données globales $E_k = (G_k,G_k^*,\varphi_k,H_k,s_k,\xi_k)$ et des places finies distinctes u et w de k de sorte que ces données vérifient les conditions de III.3 et que l'on ait un isomorphisme $k_w \simeq F$ rendant équivalentes les données E et $E_{k,w}$. Il reste à appliquer la proposition III.3. ∎

References

[1] Kottwitz, R., *Stable trace formula: cuspidal tempered terms*, Duke Math. J. **51** (1984), 611–650.

[2] Kottwitz, R., *Stable trace formula: elliptic singular terms*, Math. Ann. **275** (1986), 365–399.

[3] Langlands, R. P., Shelstad, D., *On the definition of transfer factors*, Math. Ann. **278** (1987), 219–271.

[4] Serre, J.-P., "Corps locaux," Hermann, 1968.

[5] Waldspurger, J.-L., *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. **105** (1997), 153–236.

Université de Paris 7 et CNRS
Mathématiques
F 75 251 Paris Cedex 05
waldspur@math.jussieu.fr

Received December 17, 1998
and in final form May 28, 1999