Journal of Lie Theory
Volume **10** (2000) 285–310

Un exemple de représentations unipotentes associées à une orbite nilpotente non minimale: le cas des orbites de dimension 10 de so(4,3)

Hervé Sabourin

Communicated by J. Faraut

Résumé. Dans [13], P.Torasso a donné une méthode pour construire une représentation minimale d'une groupe de Lie simple de rang au moins égal à 3. Nous proposons, dans ce travail, de montrer, sur un exemple, comment cette construction s'adapte au cas d'une orbite nilpotente non minimale. Dans le cas envisagé des orbites de dimension 10 de $so(4,3)$, nous obtenons une famille de représentations paramétrée par un sous-ensemble de la série discrète du revêtement à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$. En particulier, cette famille de représentations permet de caractériser la restriction à $SO(4,3)$ des représentations minimales de $SO(4,4)$ et $SO(5,3)$.

0. Introduction et notations

0.1. Un des aspects de la théorie des représentations d'un groupe de Lie réductif réel G consiste à essayer d'associer, à chaque G-orbite coadjointe nilpotente, une représentation unitaire irréductible de G, s'inspirant en cela de la méthode de Kirillov pour les groupes nilpotents. Le cas le plus favorable a lieu lorsque la G-orbite en question est minimale. Dans [11], en effet, on prouve l'existence d'une telle représentation, dite minimale, lorsque G est le revêtement universel de $SO_+(4,3)$ et on en donne une réalisation explicite. La méthode utilisée, qui s'inspire essentiellement d'une méthode des orbites due à Duflo [4], a été, depuis, généralisée par Torasso [13] et s'applique maintenant au cas d'un groupe de Lie simple de rang supérieur ou égal à 3.
Il semble interessant de voir dans quelle mesure cette méthode s'applique pour construire des représentations irréductibles associées à des orbites nilpotentes non minimales. Considérons le cas particulier où $G = \widetilde{SO_+(4,3)}$. On constate qu'il existe exactement deux G-orbites nilpotentes de dimension 10. Le but de ce travail est de montrer de quelle manière la méthode décrite dans [13] permet de construire explicitement des familles de représentations associées respectivement à ces deux orbites.
0.2. Il existe une manière naturelle d'associer une représentation unitaire irréduc-

ISSN 0949–5932 / $2.50

tible d'un groupe simple G à une G-orbite nilpotente coadjointe, au moins dans le cas où cette orbite est minimale.

Soit, en effet, $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, dont on suppose qu'elle n'est pas de type A_n, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ la complexifiée de $\mathfrak{g}$ et $O_{min,\mathbb{C}}$ la $G_{\mathbb{C}}$-orbite minimale correspondante. On a, dans ce cas, deux résultats importants:

L'intersection $O_{min,\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}$ se réduit, soit à une seule G-orbite notée O_{min}, soit à deux G-orbites O_{min} et $-O_{min}$.

Il existe un et un seul idéal primitif et complètement premier J_0 de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, appelé idéal de Joseph de $\mathfrak{g}$, dont la variété associée $V(J_0)$ est l'adhérence de $O_{min,\mathbb{C}}$.

Compte-tenu de ceci, on dira qu'un élément π de $\widehat{G}$ est associé à O_{min} si l'annulateur infinitésimal $Ann\pi$ de π dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est égal à J_0.

La méthode décrite dans [13] permet de prouver l'existence d'un tel π lorsque l'orbite O_{min} est G-admissible et lorsque G est de rang supérieur ou égal à 3.

Dans le cas où l'orbite est non minimale, la situation est plus délicate car on ne bénéficie plus des deux propriétés précédentes. Revenons au cas où $G = \widetilde{SO_+(4,3)}$, soit $O_\varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, les deux G-orbites nilpotentes de dimension 10 et soit $O_{10,\mathbb{C}}$ la $G_{\mathbb{C}}$-orbite de dimension 10 correspondante. La stratégie est, dans ce cas, la suivante:

1) On constate tout d'abord que, pour tout sous-groupe parabolique maximal P de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, l'orbite O_ε contient une P-orbite ouverte dense difféomorphe à une P-orbite dans le dual $\mathfrak{p}^*$ de $\mathfrak{p}$ qui, cependant, n'est pas nécessairement de type unipotent.

2) La méthode décrite dans [13] appliquée à chaque O_ε nous permet d'associer à chaque parabolique maximal standard P une famille $(\pi_{P,\varepsilon,i}, i \in I_P)$ de représentations unitaires irréductibles de P, où I_P correspond à l'ensemble fini des données d'admissibilité de la P-orbite si celle-ci est de type unipotent, mais par contre décrit l'ensemble des représentations de la série discrète du revêtement à deux feuillets de $SL(2,\mathbb{R})$ si la P-orbite n'est pas de type unipotent.

3) Il faut vérifier ensuite que l'on peut amalgamer ces P-représentations et on obtient ainsi une famille $\pi_{\varepsilon,i}, i \in I$, de représentations unitaires irréductibles de G, I parcourant un ensemble convenablement choisi d'éléments de la série discrète du revêtement à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$.

4) Après avoir déterminé explicitement la représentation infinitésimale de $\pi_{\varepsilon,i}$, on montre enfin que, pour tout couple (ε, i), l'idéal $Ann\pi_{\varepsilon,i}$ est complètement premier et vérifie:

$$V(Ann\pi_{\varepsilon,i}) = \overline{O_{10,\mathbb{C}}}.$$

On conclut ce travail par l'étude des restrictions à G des représentations minimales des groupes $\widetilde{SO_+(4,4)}$ et $\widetilde{SO_+(5,3)}$, dont les orbites minimales sont de dimension 10. On montre que ces restrictions se décomposent en facteurs irréductibles appartenant à la famille obtenue précédemment.

0.3. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Nous désignerons par G le revêtement universel de $SO_+(4,3)$, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit $(e_i, e_{-i}), 1 \leq i \leq 4$, une base de $\mathbb{R}^8$

et $\mathcal{B}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^8$, choisies telles que la base (e_i, e_{-i}) soit orthogonale relativement à $\mathcal{B}$ et telles que: $\forall i, \mathcal{B}(e_i, e_i) = 1, \mathcal{B}(e_{-i}, e_{-i}) = -1$. Soit $(E_{ij}), i, j \in \pm\{1,2,3,4\}$, la base usuelle de $gl(8)$ qui s'en déduit, $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Cartan déployée de $so(4,3)$ dont une base est $H_i = E_{i,i} - E_{-i-i}, 1 \leq i \leq 3$. Soit $\eta_i, 1 \leq i \leq 3$ la base duale des (H_i) dans $\mathfrak{h}^*$. Le système de racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est de type B_3, donné par:

$$\Delta = \{\pm(\eta_i \pm \eta_j), 1 \leq i < j \leq 3, \pm\eta_i, 1 \leq i \leq 3\}$$

Soit $\Delta^+ = \{(\eta_i \pm \eta_j), 1 \leq i < j \leq 3; (\eta_i), 1 \leq i \leq 3\}$ le système de racines positives et
$\Pi = \{\alpha_1 = \eta_1 - \eta_2,\ \alpha_2 = \eta_2 - \eta_3,\ \alpha_3 = \eta_3\}$ le système de racines simples correspondant.

A chaque racine α de Δ, on associe les éléments $H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}$ d'une base de Chevalley de $\mathfrak{g}$ et la sous-algèbre $sl_2(\alpha)$ engendrée par $H_\alpha, X_\alpha, X_{-\alpha}$. Soit $W_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$.

Nous adopterons, pour la suite, les notations suivantes:

$$\forall \alpha \in \Delta, \forall t \in \mathbb{R}, x_\alpha(t) = \exp tX_\alpha, w_\alpha(t) = \exp tW_\alpha,\ \forall t \in \mathbb{R}^*, h_\alpha(t) = \exp \ln|t| H_\alpha$$

En particulier, on pose: $w_\alpha = w_\alpha(\frac{\pi}{2}), w = w_{\eta_1-\eta_2}, \gamma = w_{\eta_1-\eta_3}(\frac{\pi}{2}), \sigma = w_{\eta_3}(\frac{\pi}{2})$.

Les crochets, dans $\mathfrak{g}$, sont donnés par: ($d_{ij} = 1$ si $i < j$, $= -1$, sinon)

$$[X_{\eta_i-\eta_j},\ X_{\eta_j-\eta_k}] = X_{\eta_i-\eta_k}$$
$$[X_{\eta_i-\eta_j},\ X_{\eta_j+\eta_k}] = d_{ik}d_{jk}X_{\eta_i+\eta_k}$$
$$[X_{\eta_i+\eta_j},\ X_{-\eta_j-\eta_k}] = -d_{ij}d_{jk}X_{\eta_i-\eta_k}$$
$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{-\eta_i-\eta_k}] = -d_{ik}d_{jk}X_{-\eta_j-\eta_k}$$
$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{\eta_j}] = X_{\eta_i}$$
$$[X_{\eta_i-\eta_j}, X_{-\eta_i}] = -X_{-\eta_j}$$
$$[X_{\eta_i+\eta_j}, X_{-\eta_j}] = -d_{ij}X_{\eta_i}$$
$$[X_{\eta_i}, X_{\eta_j}] = -2d_{ij}X_{\eta_i+\eta_j}$$
$$[X_{\eta_i}, X_{-\eta_j}] = 2X_{\eta_i-\eta_j}$$
$$[X_{\eta_i}, X_{-\eta_i-\eta_j}] = d_{ij}X_{-\eta_j}$$
$$[X_{-\eta_i}, X_{-\eta_j}] = 2d_{ij}X_{-\eta_i-\eta_j}$$

0.4. Le sous-groupe compact maximal. On choisit un sous-groupe compact maximal K de G, que l'on identifie à $SU(2)^3$ de la manière suivante:
Soit $E = \langle e_i,\ 1 \leq i \leq 4\rangle$, $F = \langle e_{-i},\ 1 \leq i \leq 4\rangle$, $\mathfrak{k}' = so(4,4) \cap so(8)$ et K' le sous-groupe analytique d'un revêtement simplement connexe de $SO_+(4,4)$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}'$. Le groupe K' s'identifie à un revêtement de $SO(E) \times SO(F)$. Désignons ensuite par $\mathbf{H}$ le corps des quaternions.

$$\text{Soit } h_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{H}, \\ e_1 & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ e_2 & \longrightarrow & \mathbf{i} \\ e_3 & \longrightarrow & \mathbf{j} \\ e_4 & \longrightarrow & \mathbf{k} \end{array} \qquad h_F : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{H} \\ e_{-1} & \longrightarrow & \mathbf{1} \\ e_{-2} & \longrightarrow & \mathbf{i} \\ e_{-3} & \longrightarrow & \mathbf{j} \\ e_{-4} & \longrightarrow & \mathbf{k} \end{array}$$

On sait que $SU(2)$ est la sphère unité de $\mathbf{H}$. Soit $S = SU(2)^4$. Posons ensuite:

$$\forall (a,b) \in SU(2)^2,\ \forall x \in E,\ \forall y \in F,\ a.x.b = h_E^{-1}(a.h_E(x).b),$$
$$a.y.b = h_F^{-1}(a.h_F(y).b).$$

Alors S agit sur $E \oplus F$ par: $(a,b,c,d).(x,y) = (a.x.b^{-1}, c.y.d^{-1})$, et cette action permet d'identifier, via leurs algèbres de Lie, K' et S. Dans ces conditions on a:

$$K = \{(a,b,c,d) \in S / c.\mathbf{k}.d^{-1} = \mathbf{k}\} = \{(a,b,c,\mathbf{k}^{-1}.c.\mathbf{k}),\ (a,b,c) \in SU(2)^3\}$$

0.5. Les sous-groupes paraboliques maximaux standards de G. Soit $\mathfrak{n} =< X_\alpha, \alpha \in \Delta^+ >, \mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ et B le sous-groupe de Borel de G, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et de décomposition de Langlands $B = MAN$.

Soit, pour $1 \leq i \leq 3$, $\mathfrak{p}_i$ la sous-algèbre parabolique maximale standard associée à la racine simple α_i, $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{a}_i \oplus \mathfrak{n}_i$ sa décomposition de Langlands et P_i le sous-groupe parabolique de G correspondant. Soit Γ_a le sous-groupe de G engendré par a.

1) Soit $\Pi_1 = \{\alpha_2, \alpha_3\},\ \Delta(\Pi_1)\{\pm(\eta_2+\eta_3),\ \pm(\eta_2-\eta_3),\ \pm(\eta_2),\ \pm(\eta_3)\}$

- $\Delta_1 = \Delta - \Delta(\Pi_1),\ \Delta_1^+ = \Delta_1 \cap \Delta^+ = \{\eta_1-\eta_2,\ \eta_1+\eta_2,\ \eta_1-\eta_3, \eta_1+\eta_3, \eta_1\}$.
- $\mathfrak{h}_1 = \langle H_{\alpha_2}, H_{\alpha_3} \rangle$
- $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \angle X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_1)\rangle$
- $\mathfrak{a}_1 = \langle H_{\eta_1} \rangle$
- $\mathfrak{n}_1 = \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta_1^+ \rangle,\ \mathfrak{n}_1^- = \langle X_\alpha, -\alpha \in \Delta_1^+ \rangle$.
- $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{n}_1$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 16 de $\mathfrak{g}$.
- $M_1 = \Gamma_{w^2}.(M_1)_o$ est le normalisateur de $\mathfrak{m}_1$ dans G.
- $A_1 = \exp \mathfrak{a}_1, N_1 = \exp \mathfrak{n}_1, P_1 = M_1 A_1 N_1$.

2) Soit $\Pi_2 = \{\alpha_1, \alpha_3\},\ \Delta(\Pi_2) = \{\pm(\eta_1-\eta_2),\ \pm(\eta_3)\}$

- $\Delta_2 = \Delta - \Delta(\Pi_2),\ \Delta_2^+ = \Delta_2 \cap \Delta^+ = \{\eta_2, \eta_1+\eta_2,\ \eta_1 \pm \eta_3,\ \eta_2 \pm \eta_3, \eta_1\}$.
- $\mathfrak{h}_2 = \langle H_{\alpha_1}, H_{\alpha_3} \rangle$
- $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{h}_2 \oplus \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_2)\rangle$
- $\mathfrak{a}_2 = \langle H_{\eta_1+\eta_2} \rangle$
- $\mathfrak{n}_2 = \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta_2^+ \rangle,\ \mathfrak{n}_2^- = \langle X_\alpha, -\alpha \in \Delta_2^+ \rangle$.
- $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{n}_2$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 14 de $\mathfrak{g}$.
- $M_2 = \Gamma_{w^2_{\alpha_2}}.(M_2)_o$ est le normalisateur de $\mathfrak{m}_2$ dans G.
- $A_2 = \exp \mathfrak{a}_2, N_2 = \exp \mathfrak{n}_2, P_2 = M_2 A_2 N_2$.

3) Soit $\Pi_3 = \{\alpha_1, \alpha_2\},\ \Delta(\Pi_3) = \{\pm(\eta_1-\eta_2), \pm(\eta_1-\eta_3),\ \pm(\eta_2-\eta_3)\}$

- $\Delta_3 = \Delta - \Delta(\Pi_3),\ \Delta_3^+ = \Delta_3 \cap \Delta^+ = \{\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_1+\eta_2,\ \eta_2+\eta_3,\ \eta_1+\eta_3,\ \eta_3\}$.

- $\mathfrak{h}_3 = \langle H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}\rangle$
- $\mathfrak{m}_3 = \mathfrak{h}_3 \oplus \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta(\Pi_3)\rangle$
- $\mathfrak{a}_3 = \langle H_{\alpha_1} + 2H_{\alpha_2} + 3H_{\alpha_3}\rangle$
- $\mathfrak{n}_3 = \langle X_\alpha, \alpha \in \Delta_3^+\rangle$, $\mathfrak{n}_3^- = \langle X_\alpha, -\alpha \in \Delta_3^+\rangle$.
- $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{m}_3 \oplus \mathfrak{a}_3 \oplus \mathfrak{n}_3$ est une sous-algèbre parabolique maximale de dimension 15 de $\mathfrak{g}$.
- $M_3 = \Gamma_{w^2_{\alpha_3+}}.(M_3)_o$ est le normalisateur de $\mathfrak{m}_3$ dans G.
- $A_3 = \exp \mathfrak{a}_3, N_3 = \exp \mathfrak{n}_3, P_3 = M_3A_3N_3$.

1. La méthode de construction

Nous allons rappeler dans ce paragraphe les étapes essentielles de la méthode que nous allons utiliser pour construire les représentations souhaitées. On pourra se rapporter à [11], paragraphe 1, pour de plus amples détails.

1.1. La stratégie que l'on utilise repose tout d'abord sur l'existence d'une paramétrisation du dual unitaire d'un groupe presque algébrique réel, dû à Duflo.

Soit P un groupe presque algébrique réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, soit q un élément de $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{p}(q)$ et $P(q)$, respectivement le stabilisateur de q dans $\mathfrak{p}$ et P. Soit B_q la forme bilinéaire alternée sur $\mathfrak{p}$, définie par: $\forall X, Y \in \mathfrak{p}, B_q(X,Y) = q([X,Y])$. Dans [4], Duflo introduit les notions suivantes:

Définition 1.1 Une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{p}$ est dite de type fortement unipotent relativement à q si $\mathfrak{b}$ est algébrique, coisotrope relativement à la forme B_q, et si l'on a: $\mathfrak{b} = \mathfrak{p}(q) +^u \mathfrak{b}$.

Définition 1.2 La forme q est dite de type unipotent si les deux conditions suivantes sont réalisées:

Il existe un facteur réductif de $\mathfrak{p}(q)$ contenu dans $\ker q$.

Il existe une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à q.

Soit $R(q)$ un facteur réductif de $P(q), \mathfrak{r}(q)$ son algèbre de Lie. L'espace $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ est naturellement muni d'une structure d'espace symplectique $R(q)$-invariante et cette structure permet de définir l'extension métaplectique $R(q)^{\mathfrak{p}}$ de $R(q)$. Le noyau de cette extension admet un et un seul élément non trivial, noté dorénavant ε. On rappelle que tout élément de $R(q)^{\mathfrak{p}}$ peut s'écrire sous la forme $(x,\varphi(x)), x \in R(q), \varphi$ étant une fonction sur l'espace des lagrangiens de $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}(q)$ à valeurs dans les complexes de module 1, calculée par Lion [7].

Soit $Y(q) = \{\tau \in \widehat{R(q)^{\mathfrak{p}}} \mid \tau(\varepsilon) = -Id\}$ et $\mathbb{E} = \{(q,\tau) \mid q$ de type unipotent, $\tau \in Y(q)\}$. Le groupe P opère dans $\mathbb{E}$ et Duflo établit, dans [4], une bijection de $\mathbb{E}/P$ sur $\widehat{P}$. L'image par cette bijection d'un couple (q,τ) sera notée $\pi_{q,\tau}$ et sera appelée P-représentation *"de type Duflo"*.

Soit donc (q,τ) un élément de $\mathbb{E}$. q étant de type unipotent, il existe des sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à q, $P(q)$-invariantes;

choisissons-en une, soit $\mathfrak{b}$. Posons ${}^u\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, le radical unipotent de $\mathfrak{b}$. Soit A le sous-groupe analytique de P correspondant; alors $B = P(q).A = R(q) \times A$ est un sous-groupe fermé de P, d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. Soit μ la restriction de q à $\mathfrak{a}$. $R(q)$ opère dans $\mathfrak{a}$ en laissant stable μ, de sorte que l'extension $R(q)^{\mathfrak{a}}$ est bien définie et que l'on peut associer à τ un élément $\tilde{\tau}$ de $(\widehat{R(q)^{\mathfrak{a}}})$, défini par la formule suivante:

$$\forall (x, \varphi(x)) \in R(q)^{\mathfrak{a}},\ \tilde{\tau}(x, \varphi(x)) = \frac{\phi(x)}{\varphi(x)} \tau(x, \phi(x)).$$

(Cette formule ne dépend pas du choix du représentant $(x, \phi(x))$ de x dans $R(q)^{\mathfrak{p}}$).

Soit T_μ la classe de représentations de A associée à μ par la correspondance de Kirillov, d'espace $\mathfrak{L}_\mu$, et S_μ la représentation métaplectique associée. On définit une représentation du groupe B, notée $\tau \otimes S_\mu T_\mu$, dans le produit tensoriel de l'espace de τ et de l'espace de T_μ, soit $V_\tau \otimes \mathfrak{L}_\mu$, en posant :

$$\forall x \in R(q),\ \forall y \in A, (\tau \otimes S_\mu T_\mu)(xy) = \tilde{\tau}(x, \varphi(x)) \otimes S_\mu(x, \varphi(x)).T_\mu(y). \qquad \mathbf{(1)}$$

Posons:

$$\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}} = \mathrm{Ind}_B^P(\tau \otimes S_\mu T_\mu).$$

D'après [4], 3.16, on sait que si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont deux sous-algèbres de type fortement unipotent relativement à q, $P(q)$-invariantes, alors les représentations $\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}}$ et $\pi_{q,\tau,\mathfrak{b}'}$ sont irréductibles et équivalentes. La classe d'équivalence de ces représentations est la P-représentation *de type Duflo* $\pi_{q,\tau}$.

Soit, maintenant, $X(q) = \{\tau \in Y(q) / d\tau$ est un multiple de $iq_{|\mathfrak{r}(q)}\}$. L'orbite $P.q$ sera dite *admissible* si $X(q) \neq \emptyset$. Les éléments de $X(q)$ sont alors appelés *"paramètres d'admissibilité"* de l'orbite. Le cas le plus favorable à cette construction a lieu lorsque l'orbite envisagée est admissible.

Supposons G simple connexe et simplement connexe de rang supérieur ou égal à 3 et plaçons-nous dans le cas où l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admet une unique G-orbite nilpotente coadjointe minimale et admissible O_{min}. Soit (P_i) une famille de sous-groupes paraboliques maximaux standards de G . On vérifie que, pour chaque i, O_{min} contient une et une seule P_i-orbite ouverte dense, isomorphe à une P_i-orbite coadjointe, et que chacune de ces P_i-orbites est admissible et de type unipotent. On peut donc associer à chaque P_i une famille $\pi_{i,\tau}$ de P_i-représentations de type Duflo. On utilise ensuite un résultat fondamental de Tits [12] selon lequel G est somme amalgamée de ses sous-groupes paraboliques maximaux standard suivant leurs intersections pour en déduire l'existence d'une famille π_τ de G-représentations unitaires irréductibles.

1.2. La construction précédente repose, comme on vient de le voir, sur le fait que les orbites considérées sont "de type unipotent". Citons, plus généralement, une paramétrisation de la représentation coadjointe due encore à Duflo ([4], chapitre 1). En reprenant les notations précédentes, considérons une forme de type unipotent q sur $\mathfrak{p}$ et soit $\mathfrak{p}(q) = \mathfrak{r}(q) \oplus^u \mathfrak{p}(q)$. On introduit les ensembles suivants:

$$\mathcal{L}(q) = \{\lambda \in \mathfrak{p}(q)^* \mid \lambda_{|^u\mathfrak{p}(q)} = q_{|^u\mathfrak{p}(q)}\},$$

$$\mathcal{D} = \{(q, \lambda) \mid q \text{ de type unipotent}, \lambda \in \mathcal{L}(q)\}.$$

Notons que l'opération "restriction" induit un isomorphisme de $\mathcal{L}(q)$ sur $\mathfrak{r}(q)^*$ et que le groupe P opère naturellement sur $\mathcal{D}$.

Soit maintenant $(q,\lambda) \in \mathcal{D}$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de type fortement unipotent relativement à q. Soit $f \in \mathfrak{p}^*$ telle que:

$$f_{|^u\mathfrak{b}} = q_{|^u\mathfrak{b}}, \quad f_{|\mathfrak{p}(q)} = q_{|\mathfrak{p}(q)}.$$

Duflo établit les résultats suivants:

La P-orbite $P.f$ ne dépend pas des choix de $\mathfrak{b}$ et f. On note $O_{q,\lambda}$ cette orbite.

L'application $(q,\lambda) \longrightarrow O_{q,\lambda}$ induit une bijection de $\mathcal{D}/P$ sur $\mathfrak{p}^*/P$. En particulier, si f est de type unipotent, $P.f = O_{f,0}$.

2. Les G-orbites nilpotentes de dimension 10 de $\mathfrak{g}$

2.1. On sait que l'on peut classifier les $G_{\mathbb{C}}$-orbites nilpotentes adjointes à l'aide des partitions de l'entier 7 (voir, par exemple [3], ch.5). On constate ainsi qu'il existe une seule $G_{\mathbb{C}}$-orbite de dimension 10 associée à la partition $(3,1,1,1,1)$.

La classification des G-orbites s'obtient aussi à partir des partitions de 7. A chaque partition, on associe un diagramme de Young "signé", c'est-à-dire un diagramme dont les boîtes sont remplies de signes " $+$" ou "$-$" selon une règle donnée par le théorème 9.3.4 du ch.9 de [3]. Si l'on applique ce théorème à la partition $(3,1,1,1,1)$, on obtient deux diagrammes:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline - & + & - \\ \hline + & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} + & \multicolumn{2}{c}{O_1} \\ \cline{1-1} + & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} - & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & - & + \\ \hline + & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} + & \multicolumn{2}{c}{O_{-1}} \\ \cline{1-1} - & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} - & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Soit $X_\varepsilon = \dfrac{X_{-\eta_1-\eta_2} + \varepsilon X_{\eta_2-\eta_1}}{4}$, $\varepsilon = \pm 1$. On a de plus:

$$O_\varepsilon = G.X_\varepsilon, \ \varepsilon = \pm 1.$$

On notera f_ε l'élément du dual $\mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ correspondant à X_ε par la forme de Killing $\mathcal{K}$.

Posons:

$$\begin{aligned} X_{1,\varepsilon} &= X_{\eta_2+\eta_3} + \varepsilon X_{\eta_3-\eta_2}, \\ X_{2,\varepsilon} &= X_{\eta_2-\eta_3} + \varepsilon X_{-\eta_2-\eta_3}, \\ X_{3,\varepsilon} &= X_{\eta_2} + \varepsilon X_{-\eta_2}. \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{g}(X_\varepsilon)$ le stabilisateur dans $\mathfrak{g}$ de X_ε. On obtient:

$$\mathfrak{g}(X_\varepsilon) = sl_2(\eta_3) \oplus \langle X_{i,\varepsilon}, 1 \le i \le 3 \rangle \oplus \ \mathfrak{n}_1^-$$

Proposition 2.1.

(1) Le stabilisateur $G(X_\varepsilon)$ de X_ε dans G est donné par:

$$G(X_\varepsilon) = \Gamma_{w^2}.G(X_\varepsilon)_0.$$

(2) L 'orbite O_ε est G-admissible et possède $3-\varepsilon$ paramètres d'admissibilité.

Preuve. 1) Soit $H = H_{\eta_1+\eta_2} + H_{\eta_1-\eta_2}$. L'algèbre $\mathfrak{g}$ se décompose suivant l'action adjointe de H en sous-espaces propres de la manière suivante:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(-2) \oplus \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(2), \mathfrak{g}(-2) = \mathfrak{n}_1^-,\ \mathfrak{g}(0) = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{g}(2) = \mathfrak{n}_1$$

Soit $G(0)$ le stabilisateur de H dans G. On a: $G(0) = M_1.A_1, G(0)_0 = (M_1)_0.A_1$ la composante neutre de $G(0)$. On obtient:

$$G(X_\varepsilon) = \Gamma_{w^2}G(0)_0(X_\varepsilon).N_1^-.$$

Choisissons pour $\mathfrak{n}_1^-$ la base (B) suivante:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}X_{-\eta_1}, X_{\eta_3-\eta_1} + X_{-\eta_1-\eta_3}, X_{-\eta_1-\eta_2} + X_{\eta_2-\eta_1},\\ &X_{-\eta_1-\eta_3} - X_{-\eta_1+\eta_3}, X_{-\eta_1-\eta_2} - X_{\eta_2-\eta_1}.\end{aligned}$$

Moyennant cette base, $\mathfrak{n}_1^-$ s'identifie à $\mathbb{R}^5$. Le groupe $(M_1)_0$ agit de manière naturelle sur $\mathfrak{n}_1^- \simeq \mathbb{R}^5$ et s'identifie à la composante neutre du groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^5$ laissant invariante la forme quadratique définie dans la base (B) par:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2$$

Ainsi,

$$(M_1)_0 \sim \widetilde{SO_+(3,2)}.$$

L'action de $G(0)_0$ sur X_ε est donnée par:

$$\forall x \in (M_1)_0, x.\exp tH_{\eta_1}.X_\varepsilon = e^{-t}(x.X_\varepsilon).$$

Donc $q(x \exp tH_{\eta_1} X_\varepsilon) = e^{-2t}q(X_\varepsilon)$, et, comme le vecteur X_ε est non isotrope, il s'en suit que: $G(0)_0(X_\varepsilon) \subset (M_1)_0$. Plus précisément on constate, en considérant l'orthogonal de X_ε pour la forme q, que $G(0)_0(X_1)$ s'identifie au sous-groupe de $\widetilde{SO_+(3,2)}$ des automorphismes de $\mathbb{R}^4$ laissant invariante la forme quadratique:

$$q_1(x_1, x_2, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 - x_4^2 - x_5^2.$$

D'où: $G(0)_0(X_1) = \widetilde{SO_+(2,2)}$.

$G(0)_0(X_{-1})$ s'identifie au sous-groupe de $\widetilde{SO_+(3,2)}$ des automorphismes de $\mathbb{R}^4$ laissant invariante la forme quadratique:

$$q_{-1}(x_1, x_2, x_3, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_5^2.$$

D'où: $G(0)_0(X_{-1}) = \widetilde{SO_0(3,1)}$. On en déduit bien le résultat annoncé.
2) On constate que:

$$\Gamma_{w^2} \cap G(X_1)_0 = \{1, w^4\}, \quad \Gamma_{w^2} \cap G(X_{-1})_0 = \{1\}.$$

Il s'en suit que le stabilisateur $G(X_1)$ possède deux composantes connexes tandis que $G(X_{-1})$ en possède quatre.

Soit $\mathfrak{r}_\varepsilon = sl_2(\eta_3) \oplus \langle X_{i,\varepsilon},\ 1 \leq i \leq 3\rangle, (R_\varepsilon)_0$ le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{r}_\varepsilon$ et $R_\varepsilon = \Gamma_{w^2}.(R_\varepsilon)_0$ un facteur réductif de $G(X_\varepsilon)$. Pour déterminer l'extension métaplectique $R_\varepsilon^{\mathfrak{g}}$, on vérifie que l'on peut identifier $\mathfrak{n}_1$ à un sous-espace lagrangien L de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_\varepsilon)$. On constate ensuite que: $\forall x \in R_\varepsilon,\ x.L = L$. On choisit une orientation $\widetilde{L}$ sur L et on pose: $t(x)^2 = \varepsilon(\widetilde{L}, x.\widetilde{L})$, où $\varepsilon(\widetilde{L}, \widetilde{L}')$ désigne l'orientation relative des lagrangiens orientés $\widetilde{L}$ et $\widetilde{L}'$. Suivant les définitions de [7], On en déduit que:

$$R_\varepsilon^{\mathfrak{g}} = \{(x, t(x)), x \in R_\varepsilon\}.$$

On vérifie successivement que:

1) Γ_{w^2} s'identifie à un sous-groupe, noté $\widetilde{\Gamma_{w^2}}$, de $R_\varepsilon^{\mathfrak{g}}$, l'image de w^2 dans $\widetilde{\Gamma_{w^2}}$ étant $(w^2, -i)$.

2) Pour tout x de $(R_\varepsilon)_0, t(x)^2 = 1$.

3) $((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}}$ possède exactement deux composantes connexes et $x \mapsto (x, 1)$ définit bien un morphisme injectif de groupes, identifiant $(R_\varepsilon)_0$ à la composante neutre de $((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}}$.

4) On a l'isomorphisme de groupes suivant:

$$R_\varepsilon^{\mathfrak{g}} \simeq \widetilde{\Gamma_{w^2}}.((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}},$$

avec:

$$\widetilde{\Gamma_{w^2}} \cap ((R_1)_0)^{\mathfrak{g}} = \{(1,1); (w^4, -1)\},\ \widetilde{\Gamma_{w^2}} \cap ((R_{-1})_0)^{\mathfrak{g}} = \{(1,1)\}.$$

Soit χ le caractère de $((R_\varepsilon)_0)^{\mathfrak{g}}$ et $\tau_{s,\varepsilon}$ le caractère de $\widetilde{\Gamma_{w^2}}$, définis respectivement par:

$$\chi(x, t(x)) = 1, \forall x \in (R_\varepsilon)_0,\ \chi(1, -1) = -1,$$

$$\tau_{s,\varepsilon}(w^2, -i) = \exp -i\pi \frac{s(3+\varepsilon) + (1+\varepsilon)}{4}, s \in \mathbb{N}, 0 \leq s \leq 3.$$

On en déduit que $X(f_\varepsilon) = \{\tau_{s,\varepsilon} \otimes \chi, 0 \leq s \leq 3\}$, d'où le résultat. ∎

2.2 Les P_i-orbites associées à O_ε. Soit $f_{i,\varepsilon}$ la restriction de f_ε à $\mathfrak{p}_i$ et $r_i : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{p}_i^*$ l'application restriction.

Proposition 2.2.

(1) *Pour $1 \leq i \leq 3$, la P_i-orbite $P_i.X_\varepsilon$ est l'unique P_i-orbite ouverte, dense, contenue dans O_ε.*

(2) *L'application r_i induit un difféomorphisme de $P_i.X_\varepsilon$ sur $P_i.f_{i,\varepsilon}$.*

(3) *Chaque P_i-orbite $P_i.f_{i,\varepsilon}$ est P_i-admissible.*

(4) *La forme $f_{1,\varepsilon}$ est de type unipotent, par contre, la forme $f_{i,\varepsilon}, i = 2, 3$ n'est pas de type unipotent.*

Preuve. 1) Il suffit de montrer que O_ε contient une et une seule B-orbite ouverte dense. Or on peut écrire:

$$B.X_\varepsilon = N_1 A_1 \Gamma_{w^2}(B \cap (M_1)_0).X_\varepsilon \ \subset N_1 A_1 \Gamma_{w^2}(M_1)_0.X_\varepsilon,$$

sachant que $N_1.G(0).N_1^-$ est un ouvert dense de G et que $N_1^- \subset G(X_\varepsilon)$; on en déduit que le nombre de B-orbites ouvertes dans $G.X_\varepsilon$ est égal au nombre de $(B \cap (M_1)_0)$-orbites ouvertes dans $(M_1)_0.X_\varepsilon$, ou encore au nombre de $(B \cap (M_1)_0)$-orbites ouvertes de l'espace symétrique $(M_1)_0/(M_1)_0(X_\varepsilon)$. On utilise, pour calculer ce nombre, les résultats de Matsuki ([8], Proposition 1).

Soit $\mathfrak{h}_{11} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}_1, \mathfrak{h}_{11}^\varepsilon = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m}_1(X_\varepsilon), K_1^\varepsilon = K \cap (M_1)_0(X_\varepsilon)$. Posons:

$$W(\mathfrak{h}_{11}) = \{w \in W / w(\mathfrak{h}_{11}^\varepsilon) = \mathfrak{h}_{11}^\varepsilon\}, W(K_1^\varepsilon) = N_{K_1^\varepsilon}(\mathfrak{h}_{11})/Z_{K_1^\varepsilon}(\mathfrak{h}_{11}).$$

On a:

$$\natural((B \cap (M_1)_0) \setminus (M_1)_0/(M_1)_0(X_\varepsilon)) = \frac{|W(\mathfrak{h}_{11})|}{|W(K_1^\varepsilon|)}.$$

Le calcul effectué dans notre situation montre que ce cardinal est 1.

2) Désignons par b_ε la restriction de f_ε à $\mathfrak{b}$, par $r_\mathfrak{b} : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{b}^*$ la projection canonique, et montrons que $r_\mathfrak{b}$ induit un difféomorphisme de $B.f_\varepsilon$ sur $B.b_\varepsilon$, ce qui revient à démontrer l'égalité des stabilisateurs.

L'inclusion $B(X_\varepsilon) \subset B(b_\varepsilon)$ est triviale. Il est donc clair que: $B \cap G(0)(X_\varepsilon) \subset B(X_\varepsilon) \subset B(b_\varepsilon)$.

D'autre part, soit b_{ε,n_1} la restriction de f_ε à $\mathfrak{n}_1$. On a: $B(b_\varepsilon) \subset B(b_{\varepsilon,n_1}) = B \cap G(0)(X_\varepsilon).N_1$. D'où:

$$B \cap G(0)(X_\varepsilon) \subset B(b_\varepsilon) \subset B \cap G(0)(X_\varepsilon).N_1.$$

Ainsi on a: $B(b_\varepsilon) = B \cap G(0)(X_\varepsilon).N_1(b_\varepsilon)$. Comme $N_1(b_\varepsilon) = \{1\}$, on en déduit l'égalité:

$$B(X_\varepsilon) = B(b_\varepsilon).$$

De ce qui précède on déduit que l'application restriction r_i induit un difféomorphisme de $B.X_\varepsilon$ sur $B.f_{i,\varepsilon}$. Ces deux B-orbites sont, respectivement, ouvertes, denses dans $P_i.X_\varepsilon$ et $P_i.f_{i,\varepsilon}$, ce qui induit le difféomorphisme annoncé entre les P_i-orbites.

3) On constate l'existence d'un isomorphisme de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(X_\varepsilon)$ sur $\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}_i(X_\varepsilon)$ qui permet d'identifier les deux structures symplectiques correspondantes. On peut donc considérer $P_i(X_\varepsilon)^{\mathfrak{p}_i}$ comme un sous-groupe de $G(X_\varepsilon)^\mathfrak{g}$. Il s'en suit que la

restriction d'un paramètre d'admissibilité de O_ε à $P_i(X_\varepsilon)^{\mathfrak{p}_i}$ est un paramètre d'admissibilité de $P_i.X_\varepsilon$.
4) Il suffit, pour la forme $f_{1,\varepsilon}$, de considérer la sous-algèbre $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{p}_1(f_{1,\varepsilon}) \oplus \mathfrak{n}_1$ et de constater que celle-ci est de type fortement unipotent relativement à $f_{1,\varepsilon}$ pour conclure.

Soit $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{n}_2$. On vérifie facilement que cette algèbre est coisotrope relativement à $f_{2,\varepsilon}$ et qu'elle satisfait à la condition de Pukansky. Selon la terminologie de Duflo [4], $\mathfrak{b}_2$ est donc *de type unipotent.* Or elle n'est pas de type fortement unipotent car $\mathfrak{b}_2 \neq \mathfrak{p}_2(f_{2,\varepsilon}) + {}^u\mathfrak{b}_2$. En utilisant le lemme 22, ch.1 de [4], on en déduit que $f_{2,\varepsilon}$ n'est pas de type unipotent.
On raisonne de la même façon pour $f_{3,\varepsilon}$ en considérant, cette fois, la sous-algèbre

$$\mathfrak{b}_3 = sl_2(\eta_1 - \eta_2) \oplus \langle H_{\eta_3} \rangle \oplus \langle X_{\eta_3 - \eta_1}, X_{\eta_3-\eta_2} \rangle \oplus \mathfrak{n}_3 \qquad \blacksquare$$

3. Une famille de représentations unipotentes associées à $O_{10,\mathbb{C}}$

La méthode de construction décrite dans le paragraphe 1 va nous permettre, dans un premier temps, de faire correspondre à un triplet $(O_\varepsilon, \tau_i, P_i), 1 \leq i \leq 3, \tau_i \in Y(f_{i,\varepsilon})$, une famille $\pi_{\varepsilon,\tau,i}$ de P_i-représentations unitaires irréductibles.
3.1. Considérons, tout d'abord, le cas du parabolique P_1. Soit $B_{1,\varepsilon} = R_\varepsilon.N_1$. La formule **(1)**, appliquée à cette situation, permet de définir un caractère $\rho_{s,\varepsilon}$ de $B_{1,\varepsilon}$ de la manière suivante:

$$\forall x \in R_\varepsilon, (x, t(x)) \in (R_\varepsilon)^{\mathfrak{g}},\ \forall Y \in \mathfrak{n}_1, \rho_{s,\varepsilon}(x \exp Y) = \tau_{s,\varepsilon}(x)t(x)e^{-2i\pi f_{1,\varepsilon}(Y)}.$$

Posons, dans ces conditions:

$$\pi^1_{\varepsilon,s} = \mathrm{Ind}_{B_{1,\varepsilon}}^{P_1} \rho_{s,\varepsilon}$$

Cette représentation est une P_1-représentation de type Duflo, associée au couple $(f_{1,\varepsilon}, \tau_{s,\varepsilon})$.
3.2. Puisque la P_2-orbite dense n'est pas de type unipotent, on ne peut pas, à priori, lui associer de P_2-représentation "de type Duflo" selon la méthode de construction du paragraphe 1. Cependant on peut utiliser la paramétrisation de la représentation coadjointe décrite dans ce même paragraphe.

Soit f_2 l'élément de $\mathfrak{p}_2^*$ associé via la forme de Killing à $X_{-\eta_1-\eta_2}$. f_2 est de type unipotent, la P_2-orbite correspondante étant en fait la P_2-orbite dense de l'orbite minimale. On note $RSL_2(\mathbb{R})$ le revêtement à deux feuillets de $SL_2(\mathbb{R})$ et on rappelle, à ce sujet (voir [11], 3.3), que $R_2 = SL_2(\eta_3) \times RSL_2(\eta_1 - \eta_2)$ est un facteur réductif du stabilisateur $P_2(f_2)$ et que $R_2^{\mathfrak{p}_2} = SL_2(\eta_3) \times (RSL_2(\eta_1-\eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$. Soit $\lambda_{2,\varepsilon}$ la restriction de $f_{2,\varepsilon}$ à R_2. Suivant la terminologie du paragraphe 1, on obtient:

$$P_2.f_{2,\varepsilon} = O_{f_2,\lambda_{2,\varepsilon}}.$$

Compte-tenu de cette situation on va construire des P_2-représentations "de type Duflo" associées au couple (f_2, τ), $\tau \in Y(f_2)$ étant, d'une certaine manière, lié au paramètre $\lambda_{2,\varepsilon}$ de l'orbite.

L'extension $(RSL_2(\eta_1-\eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$ a été décrite explicitement dans [11], 3.2, en tant que sous-groupe de $(RSL_2(\eta_1-\eta_2))^{\mathfrak{g}}$ ([11], proposition 2.3.1). On peut dire, en particulier, que:

Un élément de $(RSL_2(\eta_1-\eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$ s'écrit sous la forme $(x,t(x)), x \in RSL_2(\eta_1-\eta_2), t(x)$ étant une racine quatrième de l'unité telle que:

$$t(w^2)=-i. \tag{2}$$

On peut identifier $RSL_2(\eta_1-\eta_2)$ à un sous-groupe de $RSL_2(\eta_1-\eta_2)^{\mathfrak{p}_2}$.

Un élément quelconque de $Y(f_2)$ est de la forme $\eta\otimes\tau$ où $\eta\in\widehat{SL_2(\eta_3)}$ et τ est une représentation unitaire irréductible de $(RSL_2(\eta_1-\eta_2))^{\mathfrak{p}_2}$ telle que $\tau(\varepsilon)=-Id$. A l'aide des rappels précédents, on constate que τ est alors entièrement déterminé par sa restriction τ_r à $RSL_2(\eta_1-\eta_2)$. Considérons dans ce cas l'ensemble $\mathcal{Z}=\{\tau\otimes 1/\tau_r\in \widehat{RSL_2(\eta_1-\eta_2)}\}$. On peut, entre autres, motiver ce choix par le fait que la restriction du paramètre $\lambda_{2,\varepsilon}$ à $SL_2(\eta_3)$ est triviale. $\mathcal{Z}$ est inclus dans $Y(f_2)$, on peut donc utiliser la formule **(1)** et on définit ainsi la représentation:

$$\pi_\tau^2=\mathrm{Ind}_{B_2}^{P_2}\,\tau\otimes S_2.T_2, \tau\in\mathcal{Z},$$

où:

$B_2=M_2.N_2$.

μ_2 est la restriction de f_2 à $\mathfrak{n}_2$.

$\mathfrak{l}_2=\langle X_{\eta_1},X_{\eta_1\pm\eta_3},X_{\eta_1+\eta_2}\rangle,\ L_2=\exp\mathfrak{l}_2, t_2=e^{-2i\pi\mu_2}$.

$T_2=\mathrm{Ind}_{L_2}^{N_2}t_2$ est la N_2-représentation de Kirillov associée à μ_2.

S_2 est la représentation métaplectique de l'extension $R_2^{\mathfrak{p}_2}$ dans l'espace de T_2.

3.3. On procède de la même façon pour le parabolique P_3. On note f_3 l'élément de $\mathfrak{p}_3^*$ associée à $X_{-\eta_1-\eta_2}$ par la forme de Killing.
Soit $R_3=\Gamma_{\sigma^2}.\exp\mathbb{R}H_{\eta_3}.RSL_2(\eta_1-\eta_2)$ un facteur réductif de $P_3(f_3)$ et $\lambda_{3,\varepsilon}$ la restriction de $f_{3,\varepsilon}$ à R_3. On montre dans ce cas que:

$$P_3.f_{3,\varepsilon}=O_{f_3,\lambda_{3,\varepsilon}}.$$

On peut comme précédemment identifier $\mathcal{Z}$ à un sous-ensemble de $Y(f_3)$ et on définit la représentation:

$$\pi_\tau^3=\mathrm{Ind}_{B_3}^{P_3}\,\tau\otimes S_3.T_3, \tau\in\mathcal{Z},$$

où:

$B_3=R_3.\exp\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_3=\mathfrak{n}_3\oplus\langle X_{\eta_3-\eta_1},X_{\eta_3-\eta_2}\rangle$.

μ_3 est la restriction de f_3 à $\mathfrak{u}_3$.

T_3 est la U_3-représentation de Kirillov associée à μ_3.

S_3 est la représentation métaplectique de l'extension $R_3^{\mathfrak{p}_3}$ dans l'espace de T_3.

3.4. La construction d'une famille de G-représentations unitaires irréductibles à partir des P_i-représentations définies précédemment repose sur le théorème suivant, dont la démonstration est en tout point conforme à celle du théorème 2.4.2 de [11]:

Théorème 3.1. *Soit G un groupe simple réel déployé, connexe et simplement connexe, de rang n supérieur ou égal à 3. Soit B un sous-groupe de Borel de G, soit P_i la famille des sous-groupes maximaux standards de G. Soit π_i une représentation unitaire irréductible de P_i. On suppose que:*

(1) *Pour tout i la restriction de π_i à B est irréductible.*
(2) *Pour tous i,j tels que $1 \leq i < j \leq n$ les restrictions de π_i et π_j à $P_i \cap P_j$ sont équivalentes.*

Alors il existe une représentation unitaire irréductible π de G, et une seule à équivalence près, telle que:

$$\pi_{|P_i} = \pi_i, \forall i.$$

Tout revient, donc, à étudier dans quelle mesure les P_i-représentations précédentes satisfont aux deux conditions du théorème 3.1.

3.5. Nous noterons dorénavant $C_0 = RSL_2(\eta_1 - \eta_2)$, $B_0 = \Gamma_{w^2}.A_0N_0$, $S_0 = A_0.N_0$. Pour répondre à la question posée, nous avons besoin de précisions sur le dual unitaire de $RSL_2(\mathbb{R})$. Ce dual, selon des résultats bien connus à lire, par exemple, dans [1], se décompose, en dehors de la représentation triviale, en trois catégories:

La série principale.

La série complémentaire.

La série discrète et les limites de la série discrète, $D_{\pm n}$, $n \in \mathbb{N}^*/2$.

Intéressons-nous, en particulier, à la série discrète et aux limites de la série discrète. L'ensemble des représentations correspondantes est paramétré par l'ensemble des demi-entiers $\dfrac{\mathbb{Z}^*}{2}$. Il nous faut préciser les espaces de réalisation utilisés dans chaque cas. Supposons tout d'abord $n \in \mathbb{N}^*/2, n > 1$ et soit

$$\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}$$

le demi-plan de Poincaré. Posons:

$$\Theta_n = \{f, \text{ analytique sur } \mathcal{P}, \text{ telle que } \int_{\mathcal{P}} |f(z)|^2 y^{n-2} dxdy < +\infty\}.$$

Θ_n est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par:

$$\forall f,g \in \Theta_n, \ < f,g >= \frac{\Gamma(n-1)}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathcal{P}} f(z)\overline{g(z)} y^{n-2} dxdy.$$

D'autre part, on rappelle que le groupe C_0 peut se réaliser de la manière suivante :

$$C_0 = \{(g,\phi), g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \phi \text{ holomorphe sur } \mathcal{P} \text{ telle que } \phi(z)^2 = cz + d\}.$$

On fait agir C_0 sur Θ_n par la formule:

$$\forall (g,\phi) \in C_0, \forall f \in \Theta_n, \mathcal{D}_n(g,\phi).f(z) = (a - cz)^{-n} f(\frac{dz - b}{a - cz}).$$

Les $D_n, n > 1$, forment la série discrète holomorphe de C_0.

Soit $\Theta_{-n} = \{f \mid \overline{f} \in \Theta_n\}$. C_0 agit sur Θ_{-n} par:

$$\forall (g,\phi) \in C_0, \forall f \in \Theta_{-n}, \mathcal{D}_n^-(g,\phi).f(z) = (a - c\overline{z})^{-n} f(\frac{dz-b}{a-cz}).$$

Les $D_{-n}, n > 1$, forment la série discrète anti-holomorphe de C_0.

Considérons maintenant le cas $n = 1$. Posons:

$$\Theta_1 = \{f \text{ analytique sur } \mathcal{P}, \text{ telle que } \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\varepsilon)} \int_{\mathcal{P}} |f(z)|^2 y^{-1-\varepsilon} dxdy < +\infty\}$$

$$\Theta_{-1} = \{f \mid \overline{f} \in \Theta_1.\}$$

Ces espaces sont des espaces de Hilbert, leurs produits scalaires respectifs se déduisant, comme précédemment, de la définition de Θ_1. Le groupe C_0 agit sur ces espaces selon les mêmes formules que celles qui définissent $D_{\pm n}, n > 1$. On note D_1 et D_{-1} les représentations correspondantes.

Restent les cas $n = \pm\frac{1}{2}$. La représentation $D_{\frac{1}{2}}$ est la composante paire de la représentation métaplectique, dont un espace de réalisation est $L^2(\mathbb{R}^{+*})$. On pose: $\Theta_{\frac{1}{2}} = \Theta_{-\frac{1}{2}} = L^2(\mathbb{R}^{+*})$. On rappelle les formules qui décrivent $D_{\frac{\varepsilon}{2}}$:

$$\begin{aligned}\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{+*}), \forall u \in \mathbb{R}, D_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{\eta_1-\eta_2}(u)).f(t) &= e^{-i\pi\varepsilon u t^2} f(t),\\ D_{\frac{\varepsilon}{2}}(h_{\eta_1-\eta_2}(e^u)).f(t) &= e^{\frac{u}{2}} f(te^u),\\ D_{\frac{\varepsilon}{2}}(w).f(t) &= e^{\frac{-i\pi\varepsilon}{4}} \int e^{-2i\pi\varepsilon x t} f(x)dx.\end{aligned}$$

Les D_n, $n \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$, sont les limites de la série discrète de C_0.

3.6. Soit $n \in \dfrac{\mathbb{N}^*}{2}, n \geq 1$. Considérons les espaces suivants:

$$L^2_n(\mathbb{R}^{+*}) = L^2(\mathbb{R}^{+*}, (2t)^{n-1}dt)$$

On définit les opérateurs:

$$\forall f \in L^2_n(\mathbb{R}^{+*}), \forall z \in \mathcal{P}, \psi_n(f)(z) = \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{2i\pi z t} f(t)(2t)^{n-1}dt,$$

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{+*}), \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \psi'_n(f)(t) = (2t)^{\frac{1-2n}{4}} f(\sqrt{2t}).$$

On vérifie que ψ_n est une isométrie de $L^2_n(\mathbb{R}^{+*})$ sur Θ_n, que ψ'_n est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ sur $L^2_n(\mathbb{R}^{+*})$. En conséquence, posons:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{n,1}(f)(z) &= \psi_n \circ \psi'_n(f)(z)\\ &= \int_{\mathbb{R}^{+*}} e^{i\pi z t^2} t^{n-\frac{1}{2}} f(t)dt, \ n \geq 1,\\ \mathcal{I}_{n,-1}(f)(z) &= \overline{I_{n,1}(\overline{f})(z)}, \ n \geq 1,\\ \mathcal{I}_{\frac{1}{2},\varepsilon} &= Id.\end{aligned}$$

En utilisant [5] théorème 13.1.1 on obtient le résultat suivant:

Proposition 3.2. *Pour tout* $n \in \dfrac{\mathbb{N}^*}{2}$, $\mathcal{I}_{n,\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, *est un opérateur unitaire de* $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ *sur* $\Theta_{\varepsilon n}$. Faisons agir le sous-groupe de Borel B_0 sur $L^2(\mathbb{R}^{+*})$, selon les formules suivantes:

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon,s}(x_{\eta_1-\eta_2}(u)).f(t) &= e^{-i\varepsilon\pi u t^2} f(t), \\ S_{\varepsilon,s}(h_{\eta_1-\eta_2}(e^u)).f(t) &= e^{\frac{u}{2}} f(te^u), \\ S_{\varepsilon,s}(w^2).f(t) &= \tau_{s,\varepsilon}(w^2) f(t). \end{aligned}$$

Le résultat qui suit se vérifie immédiatement.

Lemme 3.3. *Soit* $n \in \dfrac{\mathbb{N}^*}{2}$. *L'opérateur* $\mathcal{I}_{n,\varepsilon}$ *entrelace* $S_{\varepsilon,s}$ *et la restriction de* $D_{\varepsilon n}$ *à* B_0 *si et seulement si:*

$$n \equiv \frac{s(3+\varepsilon)+(1+\varepsilon)}{4} \bmod(2).$$

On notera dorénavant:

$$\forall s, 0 \leq s \leq 3, \mathcal{D}_{\varepsilon,s} = \{D_{\varepsilon n}, n \in \frac{\mathbb{N}^*}{2},\ n \equiv \frac{s(3+\varepsilon)+(1+\varepsilon)}{4} \bmod(2)\}.$$

3.7. Considérons maintenant les représentations $\pi^1_{\varepsilon,s}$ et π^2_τ et étudions leur restriction à $P_1 \cap P_2$. Pour cela posons:

$R = R_\varepsilon \cap P_2 = \Gamma_{w^2}.SL_2(\eta_3)$.

$B_{12} = B_{1,\varepsilon} \cap P_2 = R.N_1$. $B'_{12} = B_2 \cap P_1 = R.\exp \mathbb{R} H_{\eta_1-\eta_2}.N_{12}$, où $N_{12} = \exp \mathfrak{n}_{12}$ et $\mathfrak{n}_{12} = \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$.

L'orbite $B.X_\varepsilon$ est ouverte et dense dans $G.X_\varepsilon$, il en est donc de même dans $P_1.X_\varepsilon$. Il s'en suit que $R_\varepsilon.B$ est un ouvert de Zariski de P_1. Comme $B_{1,\varepsilon}$ contient R_ε, l'ensemble $B_{1,\varepsilon}.P_1 \cap P_2$ contient donc un ouvert de P_1 dont le complémentaire dans P_1 est une sous-variété de codimension supérieure ou égale à 1. De ceci on peut déduire que:

$$\pi^1_{\varepsilon,s|P_1\cap P_2} = \mathrm{Ind}_{B_{12}}^{P_1\cap P_2}(\rho_{\varepsilon,s|B_{12}}).$$

En utilisant le procédé d'induction par étages on en déduit l'équivalence:

$$\pi^1_{\varepsilon,s|P_1\cap P_2} \simeq \mathrm{Ind}_{B'_{12}}^{P_1\cap P_2}(\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}}(\rho_{\varepsilon,s|B_{12}})).$$

De manière tout à fait analogue, on montre que:

$$\pi^2_{\tau|P_1\cap P_2} = \mathrm{Ind}_{B'_{12}}^{P_1\cap P_2}(\tau \otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}.$$

Tout revient à établir l'équivalence entre les deux représentations $\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}}(\rho_{\varepsilon,s|B_{12}})$ et $(\tau \otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$. Pour cela posons: $B"_{12} = R.\exp \mathbb{R} H_{\eta_1-\eta_2}.N_1$, puis $\xi_{\varepsilon,s} = \mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B"_{12}} \rho_{\varepsilon,s}$. La représentation $\xi_{\varepsilon,s}$ admet une réalisation dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ selon le modèle suivant:

Soit $\mathcal{H}_{\varepsilon,s}$ l'espace de $\xi_{\varepsilon,s}$ en tant que représentation induite et soit $\varphi : \mathcal{H}_{\varepsilon,s} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{+*})$, défini par:

$$\varphi(f)(t) = t^{-\frac{1}{2}} f(j(t)), \text{ avec } j(t) = \exp(-\ln t.H_{\eta_1-\eta_2}).$$

On vérifie sans difficulté que φ est un opérateur unitaire d'inverse donné par:

$$\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^*), \varphi^{-1}(f)(j(t)x) = \rho_{\varepsilon,s}(x)^{-1}.t^{\frac{1}{2}}.f(t), \forall x \in B_{12}.$$

Les formules de la représentation sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
\xi_{\varepsilon,s}(h_{\eta_1-\eta_2}(e^u)).f(t) &= e^{\frac{u}{2}} f(te^u),\\
\xi_{\varepsilon,s}(x_{\eta_1-\eta_2}(u)).f(t) &= e^{-i\pi\varepsilon u t^2} f(t),\\
\xi_{\varepsilon,s}(w^2).f(t) &= \tau_{s,\varepsilon}(w^2)t(w^2)f(t),\\
\xi_{\varepsilon,s}(x).f(t) &= f(t), \forall x \in SL_2(\eta_3),\\
\xi_{\varepsilon,s}(x_{\eta_1+\eta_2}(u)).f(t) &= e^{-i\pi u} f(t),\\
\xi_{\varepsilon,s}(x_\alpha(u)).f(t) &= f(t), \alpha = \eta_1, \eta_1 \pm \eta_3.
\end{aligned}$$

Le groupe $B"_{12}$ peut se décomposer ainsi: $B"_{12} = (R \times S_0).L_2$.

Soit $t_\varepsilon(\exp Y) = e^{-2i\pi f_{1,\varepsilon}(Y)}$ le caractère de L_2. Les formules précédentes permettent alors de montrer que:

$$\begin{gathered}
\xi_{\varepsilon,s} \simeq t.S_{\varepsilon,s} \otimes t_\varepsilon,\\
\operatorname{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}} \rho_{\varepsilon,s} \simeq \operatorname{Ind}_{B"_{12}}^{B'_{12}}(t.S_{\varepsilon,s} \otimes t_\varepsilon).
\end{gathered}$$

($t : x \mapsto t(x)$ est la fonction utilisée dans la définition des éléments des extensions métaplectiques correspondantes et on a pris soin de prolonger $t.S_{\varepsilon,s}$ à $R.S_0$ en posant $(t.S_{\varepsilon,s})(x) = t(x).Id, \forall x \in SL_2(\eta_3)$.) On désignera par $V_{s,\varepsilon}$ l'espace de cette représentation.

Considérons maintenant la représentation $(\tau \otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$ et faisons, dorénavant, l'hypothèse suivante:

$$(H_s): \ \tau \in \mathcal{D}_{\varepsilon,s}.$$

Posons:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \{f : N_2 \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^{+*}) \,|f(nl) = t_\varepsilon(l)^{-1} f(n), \forall l \in L_2, \forall n \in N_2,\\
\int_{N_2/L_2} ||f(n)||^2_{L^2(\mathbb{R}^{+*})} dn < +\infty\}
\end{aligned}$$

La représentation $(\tau \otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$ se réalise dans $\mathcal{F}$ par:

$$\begin{aligned}
&(\tau \otimes S_2.T_2)(y).f(n) = f(y^{-1}n), \forall y, n \in N_2,\\
&(\tau \otimes S_2.T_2)(x).f(n) = S_{\varepsilon,s}(x).t(x).f(x^{-1}nx), \forall x \in R.S_0, \forall n \in N_2.
\end{aligned}$$

Posons $\gamma = \mathrm{Ind}_{B"_{12}}^{B'_{12}}(t.S_{\varepsilon,s}\otimes t_\varepsilon), \gamma' = (\tau\otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$. Soit maintenant $\theta : V_{s,\varepsilon} \longrightarrow \mathcal{F}$ défini par:

$$\theta(f)(n) = f(n), \forall n \in N_2.$$

Montrons que θ entrelace γ et γ'. En effet, on peut écrire:

$$\begin{aligned}
\forall y, n \in N_2, \theta(\gamma(y).f)(n) &= f(y^{-1}n) = \gamma'(y)\theta(f)(n),\\
\forall x \in R.S_0, \theta(\gamma(x).f)(n) &= f(x^{-1}n),\\
&= f(x^{-1}nxx^{-1})\\
&= S_{\varepsilon,s}(x)t(x)f(x^{-1}nx)\\
&= \gamma'(x)\theta(f)(n).
\end{aligned}$$

Ainsi, sous l'hypothèse (H_s), les restrictions de $\pi^1_{\varepsilon,s}$ et π^2_τ à $P_1\cap P_2$ sont bien équivalentes.

On peut établir suivant une méthode tout à fait analogue les mêmes résultats pour les restrictions à $P_1\cap P_3$ ou $P_2\cap P_3$ des représentations concernées. On a donc le résultat suivant:

Proposition 3.4. *Soit $s \in \{0,1,2,3\}$, soit $\tau \in \mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. Alors, les restrictions de $\pi^1_{\varepsilon,s}, \pi^2_\tau$ et π^3_τ aux paraboliques $P_1\cap P_2, P_1\cap P_3$, ou $P_2\cap P_3$ sont deux à deux équivalentes.*

Proposition 3.5. *Soit $s \in \{0,1,2,3\}$, soit $\tau \in \mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. Alors la restriction à B de $\pi^1_{\varepsilon,s}, \pi^2_\tau$ ou π^3_τ est irréductible.*

Preuve. Il suffit de le vérifier pour $\pi^1_{\varepsilon,s}$. On constate que la forme b_ε est de type unipotent et on montre facilement que la restriction à B de $\pi^1_{\varepsilon,s}$ n'est autre qu'une B-représentation de type Duflo associée au couple $(\tau_{s|R\cap B}, b_\varepsilon)$. Elle est donc bien irréductible.

3.8. Compte-tenu des propositions 3.4, 3.5 et du théorème 3.1, on peut maintenant énoncer le théorème suivant:

Théorème 3.6. *Soit $\varepsilon = \pm 1, s \in \{0,1,2,3\}$ et $\tau = D_{\varepsilon n} \in \mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. Il existe une représentation unitaire irréductible de G, notée $\pi_{\varepsilon,s,n}$, unique à équivalence près, telle que:*

$$\begin{aligned}
\pi_{\varepsilon,s,n|P_1} &= \pi^1_{\varepsilon,s},\\
\pi_{\varepsilon,s,n|P_2} &= \pi^2_\tau,\\
\pi_{\varepsilon,s,n|P_3} &= \pi^3_\tau.
\end{aligned}$$

3.9. Il est important pour la suite de pouvoir décrire explicitement la représentation $\pi_{\varepsilon,s,n}$. On remarque pour cela que G est engendré par P_1 et w, si bien qu'il suffit de déterminer $\pi_{\varepsilon,s,n}(x), \forall x \in P_1$ et $\pi_{\varepsilon,s,n}(w)$.

Soit $\mathfrak{s}_1 = \langle H_{\eta_1-\eta_2}, H_{\eta_1+\eta_2}, X_{\eta_2}, X_{\eta_2-\eta_3}, X_{\eta_2+\eta_3}\rangle$ une sous-algèbre supplémentaire de $\mathfrak{b}_{1,\varepsilon}$ dans $\mathfrak{p}_1$, et S_1 le sous-groupe analytique de G correspondant. L'ensemble $S_1.B_{1,\varepsilon}$ est un ouvert de P_1. Posons ensuite: $\forall (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}$,

$$j_1(a,b,c,t,u) = w_{\eta_1-\eta_3}^{1-e(t)} h_{\eta_1+\eta_2}(t) x_{\eta_2-\eta_3}(a) x_{\eta_2+\eta_3}(b) x_{\eta_2}(c) h_{\eta_1-\eta_2}(\frac{1}{u}),\ e(t) = \frac{t}{|t|}.$$

spOn constate que l'ensemble $j_1(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*}).B_{1,\varepsilon}$ est un ouvert de P_1 dont le complémentaire dans P_1 est une sous-variété de codimension supérieure ou égale à 1. Soit alors $J_1(f)=f\circ j_1$. Il s'en suit que J_1 est un opérateur unitaire de l'espace $\mathcal{H}_{\varepsilon,s,1}$ de $\pi^1_{\varepsilon,s}$ sur $L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*})$, d'inverse défini par:

$$\forall f\in C_c^\infty,\forall x\in B_1, J_1^{-1}(f)(j_1(a,b,c,t,u)x)=\delta_1(x)^{\frac{1}{2}}.\rho_{s,\varepsilon}(x)^{-1}.f(a,b,c,t,u),$$

où δ_1 est la fonction module de P_1 relativement à $B_{1,\varepsilon}$.

On peut donc réaliser $\pi^1_{\varepsilon,s}$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*})$ et on obtient les formules suivantes pour un système de générateurs de P_1.

Proposition 3.7. *Soit* $f\in L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*}),(a,b,c,t,u)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*},v\in\mathbb{R}$. *On a :*

$$\begin{aligned}
\pi_{\varepsilon,s,n}(x_{\eta_1-\eta_2}(v))f(a,b,c,t,u)&=e^{i\pi e(t)(c^2+ab-\varepsilon u^2)v}f(a,b,c,t,u),\\
\pi_{\varepsilon,s,n}(h_{\eta_1-\eta_2}(e^v))f(a,b,c,t,u)&=f(ae^v,be^v,ce^v,t,ue^v),\\
\pi_{\varepsilon,s,n}(x_{\eta_1+\eta_2}(v))f(a,b,c,t,u)&=e^{-i\pi e(t)\frac{v}{t^2}}f(a,b,c,t,u),\\
\pi_{\varepsilon,s,n}(x_{\eta_2-\eta_3}(v))f(a,b,c,t,u)&=f(a-\frac{v}{t},b,c,t,u),\\
\pi_{\varepsilon,s,n}(x_{\eta_3}(v))f(a,b,c,t,u)&=f(a,b-v^2a-2vce(t),c+vae(t),t,u),\\
\pi_{\varepsilon,s,n}(x_{-\eta_3}(v))f(a,b,c,t,u)&=f(a-v^2b+2vce(t),b,c-vbe(t),t,u),\\
\pi_{\varepsilon,s,n}(x_{\eta_3-\eta_2}(v))f(a,b,c,t,u)&=\\
&\frac{\lambda_s(v,t,a)}{|1-vta|^{\frac{3}{4}}}f(\frac{a}{|1-vta|^{\frac{1}{2}}},\frac{b-vt(c^2+ab)}{|1-vta|^{\frac{1}{2}}},\alpha c,\alpha t,\alpha u),
\end{aligned}$$

avec

$$\lambda_s(v,t,a)=e^{-is\frac{\pi}{2}\frac{1-e(1-vta)}{2}}(-1)^{\frac{(2-e(t)+e(v))(1-e(1-vta))}{4}},\ \alpha=\frac{e(1-vta)}{|1-vta|^{\frac{1}{2}}}$$

Les calculs qui permettent d'obtenir ces formules sont analogues à ce qui a été fait dans [11], Prop. 3.5.2 et 3.5.3; nous ne les reproduirons pas ici.

Décrivons maintenant la réalisation de $\pi_{\varepsilon,s,n}(w)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*})$. Soit $j_2(t)=j_1(0,0,0,t,1)$. L'ensemble $j_2(\mathbb{R}^*.B_2)$ est un ouvert de P_2 dont le complémentaire est une sous-variété de codimension supérieure ou égale à 1. L'opérateur $J"_2: f\longrightarrow f\circ j_2$ est un opérateur unitaire de l'espace $\mathcal{H}_{\tau,2}$ de π^2_τ dans $L^2(\mathbb{R}^*,V_2)$, où V_2 est l'espace de la représentation T_2. Soit $r_2: f\longrightarrow r_2(f)(a,b,c)=f(j_1(a,b,c,1,1))$. r_2 est un opérateur de V_2 sur $L^2(\mathbb{R}^3,V_n)$, V_n étant l'espace de τ. Ainsi on peut réaliser par transport de structure $\pi_{\tau,2}$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^*,L^2(\mathbb{R}^3,V_n))$ à l'aide de l'opérateur $J'_2: f\longrightarrow J_2(f)(t)=r_2(f\circ j_2(t))$, dont l'inverse est donnée par:

$$\begin{aligned}
J_2'^{-1}(f)(j_2(t)x)&=\delta_2(x)^{-1}(\tau\otimes S_2.T_2).r_2^{-1}(f(t)),\forall x\in B_2,\\
r_2^{-1}(f)(j_1(a,b,c,1,1)l)&=t_2(l)^{-1}.f(a,b,c),\forall l\in L_2,
\end{aligned}$$

où δ_2 est la fonction module de P_2 relativement à B_2.

A l'aide des opérateurs $\mathcal{I}_{n,\varepsilon}$ on peut donc réaliser π^2_τ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3, L^2(\mathbb{R}^{+*})))$ en utilisant l'opérateur:

$$J_{2,n,\varepsilon}(f)(t)(a,b,c) = \mathcal{I}_{n,\varepsilon}(J'_2(f)(t)(a,b,c))$$

Soit enfin l'opérateur $\varphi : L^2(\mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^3, L^2(\mathbb{R}^{+*}))) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$ défini par :

$$\varphi(f)(a,b,c,t,u) = f(t)(a,b,c)(u)$$

Lemme 3.8. *L'application canonique φ est un opérateur unitaire qui entrelace les restrictions de $\pi^1_{\varepsilon,s}$ et π^2_τ à $P_1 \cap P_2$.*

Preuve. La preuve de ce résultat est conséquence de la détermination explicite d'un opérateur d'entrelacement entre les représentations $\mathrm{Ind}_{B_{12}}^{B'_{12}} \rho_{\varepsilon,s}$ et $(\tau \otimes S_2.T_2)_{|B'_{12}}$. Pour cela on suit le procédé décrit dans [11], 3.5.1. ■

On obtient finalement une réalisation de π^2_τ dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$, notée de la même façon, par la formule:

$$\forall x \in P_2, \pi^2_\tau(x) = \varphi \circ J_{2,n,\varepsilon} \circ \pi^2_\tau(x) \circ J^{-1}_{2,n,\varepsilon} \circ \varphi^{-1}.$$

Proposition 3.9. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}), (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}$. On a:*

$$\pi_{\varepsilon,s,n}(w).f(a,b,c,t,u) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}e(t)}}{2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\pi e(t)(\alpha b + \beta a + 2\gamma c)} (\tau_{\varepsilon,n}(w).f_*(\alpha,\beta,\gamma,t))(u) d\alpha d\beta d\gamma,$$

avec

$$\tau_{\varepsilon,n}(w) = \mathcal{I}^{-1}_{n,\varepsilon} \circ \tau(w) \circ \mathcal{I}_{n,\varepsilon}.$$

$f_*(a,b,c,t)$ est l'élément de $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ défini par:

$$f_*(a,b,c,t)(u) = f(a,b,c,t,u).$$

Preuve. Pour établir cette formule on utilise une méthode analogue à celle de [11], paragraphe 3.5.3. ■

3.10. Il reste maintenant à établir que la représentation $\pi_{\varepsilon,s,n}$ répond bien au problème posé, à savoir qu'elle est associée à l'orbite $O_{10,\mathbb{C}}$.

Soit $E = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$, E^∞ l'espace des vecteurs C^∞ de E pour la représentation $\pi_{\varepsilon,s,n}$, $\pi^\infty_{\varepsilon,s,n}$ la représentation de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ dans E^∞ induite par $\pi_{\varepsilon,s,n}$, et soit $J_{\varepsilon,s,n}$ l'annulateur de $\pi^\infty_{\varepsilon,s,n}$ dans $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. On notera $V(J_{\varepsilon,s,n})$ la variété des zéros dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ de l'idéal gradué associé dans l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ à l'idéal $J_{\varepsilon,s,n}$.

La représentation $\pi_{\varepsilon,s,n}$ sera dite associée à l'orbite nilpotente $O_{10,\mathbb{C}}$ si l'on a:

$$V(J_{\varepsilon,s,n}) = \overline{O_{10,\mathbb{C}}}$$

Rappelons d'autre part que, d'après un résultat obtenu indépendamment par A.Joseph [6] et W.Borho-J.L.Brylinski [2], tout idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ a pour variété des zéros la clôture de Zariski d'une et d'une seule orbite nilpotente. De ceci on déduit que $\pi_{\varepsilon,s,n}$ est associée à une orbite nilpotente de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, soit $O_{\varepsilon,s,n}$.

Nous savons, de plus, que:

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\mathrm{J}_{\varepsilon,\mathrm{s},\mathrm{n}}) = \dim \mathrm{O}_{\varepsilon,\mathrm{s},\mathrm{n}}.$$

(GKdim est la dimension de Gelfand-Kirillov.)

Soit $J_{1,\varepsilon,s,n} = J_{\varepsilon,s,n} \cap U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}})$ l'idéal annulateur de la représentation $\pi^{1,\infty}_{\varepsilon,s,n}$. En utilisant [4], théorème 4.16 et proposition 4.13, on a:

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{U}(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}})/\mathrm{J}_{1,\varepsilon,\mathrm{s},\mathrm{n}}) \geq 10.$$

L'injection naturelle $U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}}) \longrightarrow U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ induit une injection de $U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}})/J_{\varepsilon,s,n}$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/J_{1,\varepsilon,s,n}$. D'où:

$$\mathrm{GKdim}(\mathrm{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/\mathrm{J}_{\varepsilon,\mathrm{s},\mathrm{n}}) \geq 10. \tag{3}$$

On va en fait montrer que cette inégalité est une égalité, ce qui, compte tenu de ce qui prècède et du fait qu'il n'y a qu'une seule orbite de dimension 10 dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, aboutit au résultat souhaité.

Tout repose maintenant sur la proposition suivante dont l'analogue dans le cas minimal est dû à P.Torasso ([13], Prop.6.2). On rappelle que si X est une variété algébrique affine irréductible complexe lisse et $D(X)$ l'algèbre des opérateurs différentiels réguliers sur X, alors $D(X)$ est un domaine d'intégrité et on a: $\mathrm{GKdim}(\mathrm{D}(\mathrm{X})) = 2\dim \mathrm{X}$.

Proposition 3.10. *Il existe un espace vectoriel complexe V de dimension 5, un ouvert affine U de V et un morphisme d'algèbres:*

$$D_{\varepsilon,s,n} : U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \longrightarrow D(U)$$

tel que $J_{\varepsilon,s,n} = \ker D_{\varepsilon,s,n}$.

Tout revient en fait à déterminer la représentation $\pi^{\infty}_{\varepsilon,s,n}$, ce qui revient à déterminer $\pi^{\infty}_{\varepsilon,s,n}(X)$ pour $X \in \mathfrak{p}_1$ et $\pi^{\infty}_{\varepsilon,s,n}(X_{\eta_2-\eta_1})$.

Soit E_1^{∞} l'espace des vecteurs C^{∞} pour la restriction de $\pi_{\varepsilon,s,n}$ à P_1 . Cette restriction est une représentation induite et on est dans la même situation que celle décrite dans [13], paragraphe 6. On rappelle à ce propos les deux résultats suivants:

Lemme 3.11. ([13], Lemme 6.10) *Soit G un groupe de Lie, ρ une représentation continue de G dans un espace de Banach E, Ω une variété C^{∞} et $\phi : \Omega \longrightarrow E$ une application à valeurs dans le sous-espace E^{∞} des vecteurs C^{∞} de E pour ρ qui est C^{∞} pour la topologie de E^{∞}. Alors l'application: $\Phi : \Omega \times G \longrightarrow E^{\infty}$, définie par: $\Phi(x,g) = \rho(g).\phi(x)$, est C^{∞}.*

Lemme 3.12. ([9], Th.5.1) *Soit G un groupe de Lie d'algèbre de lie $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, H un sous-groupe fermé de G, π une représentation unitaire de H d'espace $\mathcal{H}$, $\rho = \operatorname{Ind}_H^G \pi$ la représentation induite d'espace $\mathcal{H}_\rho$ et $\mathcal{H}_\rho^\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de $\mathcal{H}_\rho$. Alors $\mathcal{H}_\rho^\infty$ est l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(G, \mathcal{H})$ telles que, pour tout a de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, $a.\varphi \in \mathcal{H}_\rho$. Si φ est dans $\mathcal{H}_\rho^\infty$, alors elle prend ses valeurs dans l'espace des vecteurs C^∞ de π. De plus, on a:*

$$\forall a \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}), \rho(a)\varphi = a.\varphi$$

($a.\varphi$ désigne l'action usuelle de a sur φ en tant qu'opérateur différentiel agissant sur $C^\infty(G, \mathcal{H})$). De ceci on déduit le résultat suivant, analogue à [13], Lemme 6.12:

Proposition 3.13. *On a: $E_1^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*})$. Il existe un unique homorphisme d'algèbres: $D_{\varepsilon,s,n} : U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}}) \longrightarrow D(\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{*2})$ tel que:*

$$\forall \varphi \in E_1^\infty, \forall a \in U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}}), \pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(a).\varphi = D_{\varepsilon,s,n}(a).\varphi.$$

D'ailleurs des calculs de dérivation simples donnent les formules suivantes pour un système de générateurs de $\mathfrak{p}_1$.

Proposition 3.14. *Soit $f \in E_1^\infty, (a, b, c, t, u)$ le système de coordonnées canonique dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}$. On a:*

$$\begin{aligned}
\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_1-\eta_2}).f &= i\pi e(t)(c^2 + ab - \varepsilon u^2).f,\\
\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(H_{\eta_1-\eta_2}).f &= a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} + u\frac{\partial f}{\partial u},\\
\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_3}).f &= -\frac{1}{t}\frac{\partial f}{\partial a},\\
\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_3}).f &= ae(t)\frac{\partial f}{\partial c} - 2ce(t)\frac{\partial f}{\partial b},\\
\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{-\eta_3}).f &= -be(t)\frac{\partial f}{\partial c} - 2ce(t)\frac{\partial f}{\partial a},\\
\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_3-\eta_2}).f &= -c^2t\frac{\partial f}{\partial b} + \frac{at}{2}(\frac{3}{2}f + a\frac{\partial f}{\partial a} - b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} + t\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial u}).
\end{aligned}$$

Il reste à déterminer l'opérateur $\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1})$. On utilise pour cela la formule suivante:

$$\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1}) = -\pi_{\varepsilon,s,n}(w) \circ \pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_1-\eta_2}) \circ \pi_{\varepsilon,s,n}(w^{-1}).$$

Soit E_2^∞ l'espace des vecteurs C^∞ pour la restriction de $\pi_{\varepsilon,s,n}$ à P_2. Cette restriction est une représentation induite. A l'aide des lemmes 3.11 et 3.12, on obtient:

$$E_2^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^*, L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty).$$

où $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$ désigne l'espace des vecteurs C^∞ de $\tau_{\varepsilon,n}$.

D'après [10], théorème 5., on a: $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ et donc:

$$E_2^\infty \subset C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^{+*}).$$

Maintenant des calculs simples de dérivation sous le signe intégral donnent:

$$\forall f \in E_2^\infty, \frac{\partial^2}{\partial c^2}(\pi_{\varepsilon,s,n}(w).f) = -4\pi^2\pi_{\varepsilon,s,n}(w)(c^2.f),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial b}(\pi_{\varepsilon,s,n}(w).f) = -\pi^2\pi_{\varepsilon,s,n}(w)(ab.f).$$

On adoptera pour la suite la notation suivante: $\mu_n(f)(u) = u^n.f(u), n \in \mathbb{Z}, f$ étant une fonction quelconque. A l'aide des formules précédentes, on aboutit au résultat suivant:

$$\forall f \in E_2^\infty, (\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1}).f)_* = \frac{ie(t)}{4\pi}(\Delta f)_* + i\pi e(t)\varepsilon\mu_{2,n,\varepsilon}.f_*,$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial c^2} + 4\frac{\partial^2}{\partial a\partial b},\ \mu_{2,n,\varepsilon} = \tau_{\varepsilon,n}(w) \circ \mu_2 \circ \tau_{\varepsilon,n}(w^{-1}).$$

Tout revient finalement à déterminer l'opérateur $\mu_{2,n,\varepsilon}$.

Considérons le cas $\varepsilon = 1$ et supposons, tout d'abord, $n \geq 1$.

Pour tout g de $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$, on a:

$$\mu_{2,n,1}(g) = \mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \tau(w) \circ \mathcal{I}_{n,1} \circ \mu_2 \circ \mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \tau(w^{-1}) \circ \mathcal{I}_{n,1}(g).$$

On suppose, tout d'abord, que g appartient à l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ à support compact. Soit δ l'opérateur suivant: $\delta(g)(u) = \frac{1}{u}g'(u)$. Les deux formules suivantes ont bien un sens et se vérifient facilement:

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{I}_{n,1}(g) = i\pi\mathcal{I}_{n,1} \circ \mu_2(g) \tag{4}$$

$$\forall \phi \in \Theta_{\varepsilon n},\ \tau(w)(\frac{\partial}{\partial z}\tau(w^{-1})\phi)(z) = nz\phi(z) + z^2\frac{\partial}{\partial z}\phi(z) \tag{5}$$

Ainsi on a:

$$\begin{aligned}\mu_{2,n,1}(g) &= \frac{1}{i\pi}\mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \tau(w)(\frac{\partial}{\partial z}[(\tau(w^{-1}) \circ \mathcal{I}_{n,1}(g)]),\ \text{d'après } (\mathbf{4}) \\ &= \frac{n}{i\pi}(\mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \mu_1)(\mathcal{I}_{n,1}(g)) + \frac{1}{i\pi}(\mathcal{I}_{n,1}^{-1} \circ \mu_2)(\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{I}_{n,1}(g))],\ \text{d'après } (\mathbf{5}).\end{aligned}$$

On a par ailleurs les formules suivantes:

$$\forall z \in \mathcal{P}, z.\mathcal{I}_{n,1}(g)(z) = \frac{i}{2\pi}((n-\frac{3}{2})\mathcal{I}_{n,1}(\mu_{-2}g) + \mathcal{I}_{n,1} \circ \delta(g)), \tag{6}$$

$$z^2.\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{I}_{n,1}(g)(z) = -\frac{i}{4\pi}((n-\frac{3}{2})^2\mathcal{I}_{n,1}(\mu_{-2}g) + (n-\frac{3}{2})(\mathcal{I}_{n,1} \circ \delta(g)))$$

$$+(n-\frac{3}{2})[2\mathcal{I}_{n,1}(\mu_{-2}g)+\mathcal{I}_{n,1}\circ\delta(f)]+3\mathcal{I}_{n,1}\circ\delta(g)+\mathcal{I}_{n,1}(g").\qquad\textbf{(7)}$$

On en déduit ainsi que:

$$\mu_{2,n,1}(g)(u)=\frac{1}{4\pi^2}[(n-\frac{3}{2})(n-\frac{1}{2})\frac{g(u)}{u^2}-g"(u)].\qquad\textbf{(8)}$$

Comme d'après [10], théorème 5, l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^{+*})$ est un sous-espace dense de $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$, la formule (8) reste valable pour tout g de $L^2(\mathbb{R}^{+*})^\infty$. Les calculs classiques sur la représentation métaplectique permettent de vérifier que cette formule reste vraie pour $n=\frac{1}{2}$. D'où:

$$\forall f\in E_2^\infty,\pi_{1,s,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1})(f)=\frac{ie(t)}{4\pi}\Delta f+\frac{i}{\pi}e(t)(n-\frac{3}{2})(n-\frac{1}{2})(f)-\frac{i}{\pi}e(t)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\quad\textbf{(9)}$$

Il est clair que l'on peut établir des formules totalement analogues pour l'opérateur $\pi_{-1,s,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1})$.

Soit $U=\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^{*2}$. C'est un ouvert affine de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^5$. D'autre part on sait que $E^\infty\subset E_1^\infty\cap E_2^\infty$. La proposition 3.13 et la formule **(9)** permettent de définir les opérateurs différentiels $D_{\varepsilon,s,n}(a), a\in U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}})$, et $D_{\varepsilon,s,n}(X_{\eta_2-\eta_1})$ appartenant à $D(U)$ et tels que:

$$\forall\varphi\in E^\infty,\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(a).\varphi=D_{\varepsilon,s,n}(a).\varphi,\ \forall a\in U(\mathfrak{p}_{1,\mathbb{C}}),$$
$$\pi_{\varepsilon,s,n}^\infty(X_{\eta_2-\eta_1}).\varphi=D_{\varepsilon,s,n}(X_{\eta_2-\eta_1}).\varphi.$$

On sait par ailleurs que l'action de $D(U)$ sur l'espace des distributions sur $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^{+*}$ est fidèle et continue. On en déduit donc l'existence d'un morphisme d'algèbres, $D_{\varepsilon,s,n}$, de $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ à valeurs dans l'algèbre $D(U)$ des opérateurs différentiels réguliers sur U et il est clair que ce morphisme a pour noyau l'annulateur $J_{\varepsilon,s,n}$, ce qui démontre la proposition 3.10.

Comme $GK\dim(D(U))=10$, on en déduit que:

$$GK\dim(U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})/J_{\varepsilon,s,n})\leq 10,$$

ce qui implique l'égalité, d'après **(3)**. D'où le résultat suivant:

Proposition 3.15. *Soit $\varepsilon=\pm1, s\in\{0,1,2,3\}, D_{\varepsilon n}\in\mathcal{D}_{\varepsilon,s}$. La représentation $\pi_{\varepsilon,s,n}$ est associée à l'orbite $O_{10,\mathbb{C}}$.*

4. La restriction à G des représentations minimales de $\widetilde{SO(4,4)}$ et $\widetilde{SO(5,3)}$

4.1. Soit $G_1=\widetilde{SO(4,4)}, \mathfrak{g}_1=so(4,4)$. Le plongement de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ s'effectue de la manière suivante:

En reprenant les notations de **0.2.**, on considère la base usuelle $H_i, 1\leq i\leq 4$, d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_1$ de $\mathfrak{g}_1$ contenant $\mathfrak{h}$, le système de racines

$\Delta_1 = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq 4\}$. Le plongement de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_1$ est donné, outre l'inclusion naturelle $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}_1$, par:

$$\begin{aligned} X_{\pm\eta_i\pm\eta_j} &= X_{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j},\ 1 \leq i < j \leq 3, \\ X_{\eta_i} &= X_{\varepsilon_i+\varepsilon_4} + X_{\varepsilon_i-\varepsilon_4},\ 1 \leq i \leq 3, \\ X_{-\eta_i} &= X_{\varepsilon_i+\varepsilon_4} + X_{\varepsilon_4-\varepsilon_i},\ 1 \leq i \leq 3. \end{aligned}$$

4.2. Désignons par $O_{1,min}$ la G_1-orbite nilpotente minimale.

Proposition 4.1. *La G_1-orbite $O_{1,min}$ contient une et une seule G-orbite ouverte dense de dimension 10, et cette G-orbite est un revêtement d'ordre 2 de O_1.*

Preuve. Posons: $Y_1 = X_1 + (X_{\varepsilon_4-\varepsilon_1} - X_{-\varepsilon_4-\varepsilon_1})$. On vérifie que Y_1 appartient à $O_{1,min}$. On constate tout d'abord que $\mathfrak{g}(X_1) = \mathfrak{g}(Y_1)$ et donc que la G-orbite $G.Y_1$ est de dimension 10. Le fait que cette orbite soit dense dans $O_{1,min}$ se démontre de la même façon que dans la proposition 5.1.1 de [11].

Le plongement de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_1$ induit, par passage au dual et via la forme de Killing, une application G-équivariante et surjective j de $\mathfrak{g}_1$ dans $\mathfrak{g}$ et on constate que $j(G.Y_1) = G.X_1 = O_1$. Par ailleurs le calcul des stabilisateurs donne:

$$G(Y_1) = \langle w^4\rangle.G(Y_1)_0,\ G(X_1) = \langle w^2\rangle.G(X_1)_0.$$

Comme $G(Y_1)_0 = G(X_1)_0$, le résultat s'en suit. ∎

Venons-en à la projection de $O_{1,min}$ sur les paraboliques standards de G. Pour cela, nous désignerons par ξ_1 l'élément de $\mathfrak{g}_1^*$ associé à Y_1 par la forme de Killing. On constate que la restriction de ξ_1 à $\mathfrak{p}_j, 1 \leq j \leq 3$ est égale à $f_{j,1}$. En utilisant les mêmes techniques que celles introduites dans la démonstration de la proposition 2.2 on obtient le résultat suivant:

Proposition 4.2. *Pour tout $j \in \{1,2,3\}$, la P_j-orbite $P_j.Y_1$ est l'unique P_j-orbite ouverte dense contenue dans $G.Y_1$, et cette P_j-orbite est un revêtement d'ordre 2 de $P_j.f_{j,1}$.*

4.3. Soit $\pi_{1,min}$ la représentation minimale de G_1. L'existence de cette représentation est assurée par les travaux de P.Torasso ([13]). Sa construction, qui repose sur la restriction aux paraboliques standards, est identique à celle réalisée pour la représentation minimale de G dans ([11]). Intéressons-nous à la restriction de $\pi_{1,min}$ aux paraboliques P_j.

La restriction à P_1. On a défini au paragraphe 2 les groupes $B_{1,\varepsilon}$. On vérifie tout d'abord que:

$$\pi_{1,min|P_1} \simeq \mathrm{Ind}_{(B_{1,1})_0}^{P_1} \rho_1,$$

où ρ_1 est le caractère de $(B_{1,1})_0$, trivial sur son facteur réductif et égal à $e^{-2i\pi f_{1,1}}$ sur N_1. D'où:

$$\pi_{1,min|P_1} \simeq \mathrm{Ind}_{B_{1,1}}^{P_1}(\mathrm{Ind}_{(B_{1,1})_0}^{B_{1,1}} \rho_1)$$

On constate enfin l'équivalence: $\mathrm{Ind}_{(B_{1,1})_0}^{B_{1,1}} \rho_1 \simeq \rho_{1,0} \oplus \rho_{1,1}$. Ainsi on a:

$$\pi_{1,min|P_1} \simeq \pi_{1,0}^1 \oplus \pi_{1,1}^1.$$

La restriction à P_2. On procède, pour étudier cette restriction, comme dans ([11]), paragraphe 5.2. On note, respectivement, S^+ et S^- les composantes paires et impaires de la représentation métaplectique de $RSL_2(\mathbb{R})$ et on obtient :

$$\pi_{1,min|P_2} \simeq \mathrm{Ind}_{B_2}^{P_2} S^+ \otimes S_2.T_2 \ \oplus \ \mathrm{Ind}_{B_2}^{P_2} S^- \otimes S_2.T_2.$$

On sait par ailleurs, suivant la terminologie introduite dans le paragraphe 3, que $S^+ = D_{\frac{1}{2}}$ et $S^- = D_{\frac{3}{2}}$. Donc on a:

$$\pi_{1,min|P_2} \simeq \pi^2_{D_{\frac{1}{2}}} \oplus \pi^2_{D_{\frac{3}{2}}}.$$

La restriction à P_3. On obtient pour les mêmes raisons:

$$\pi_{1,min|P_3} \simeq \pi^3_{D_{\frac{1}{2}}} \oplus \pi^3_{D_{\frac{3}{2}}}.$$

La représentation $\pi_{1,min}$ se réalise dans l'espace $F = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{*2})$ et on obtient, suivant la même méthode que celle décrite dans 3.9., des formules explicites. Soit $\pi_{1,\frac{1}{2}}$ et $\pi_{1,\frac{3}{2}}$ les deux représentations de G obtenues par amalgames respectifs de $(\pi^1_{1,0}, \pi^2_{D_{\frac{1}{2}}}, \pi^3_{D_{\frac{1}{2}}})$ et $(\pi^1_{1,1}, \pi^2_{D_{\frac{3}{2}}}, \pi^3_{D_{\frac{3}{2}}})$. Soit:

$$F_p = \{f \in F / f(a,b,c,t,-u) = f(a,b,c,t,u), \forall (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{*2}\}.$$

$$F_i = \{f \in F / f(a,b,c,t,-u) = -f(a,b,c,t,u), \forall (a,b,c,t,u) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{*2}\}.$$

On vérifie que F_p est stable par $\pi_{1,\frac{1}{2}}$ et que F_i est stable par $\pi_{1,\frac{3}{2}}$. On aboutit alors au résultat suivant:

Proposition 4.3. *La restriction à G de la représentation minimale de $\widetilde{SO(4,4)}$ n'est pas irréductible. Elle se décompose en facteurs irréductibles dans la famille $(\pi_{\varepsilon,s,n})$ et on obtient :*

$$\pi_{1,min|G} = \pi_{1,0,\frac{1}{2}} \oplus \pi_{1,1,\frac{3}{2}}.$$

4.4. Soit $G_2 = \widetilde{SO(5,3)}$. La restriction à G de la représentation minimale $\pi_{2,min}$ de G_2 s'étudie de manière tout à fait analogue; nous en passerons les détails. Désignons par $O_{2,min}$ la G_2-orbite nilpotente minimale.

Proposition 4.4. *La G_2-orbite $O_{2,min}$ contient une et une seule G-orbite ouverte, dense, de dimension 10, et cette G-orbite est un revêtement d'ordre 2 de O_{-1}.*

Proposition 4.5. *La restriction à G de la représentation minimale de $\widetilde{SO(5,3)}$ n'est pas irréductible. Elle se décompose en facteurs irréductibles dans la famille $(\pi_{\varepsilon,s,n})$ et on obtient:*

$$\pi_{2,min|G} = \pi_{-1,1,\frac{1}{2}} \oplus \pi_{-1,3,\frac{3}{2}}.$$

References

[1] Bargmann, V., *Irreducible unitary representations of the Lorentz group*, Ann. of Math. **48** (1947), 568–640.

[2] Borho, W., and J. L. Brylinski, *Differential operators on homogeneous spaces III*, Inventiones Math. **80** (1985), 1–68.

[3] Collingwood, D. H., and W. M. Mac Govern, "Nilpotent orbits in semi-simple Lie algebras," Van Nostrand Reinhold, Mathematics series.

[4] Duflo, M., *Théorème de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta Math. **149** (1982), 153–213.

[5] Faraut, J., and A. Koranyi, "Analysis on symmetric cones," Oxford mathematical monographs, Clarendon press, Oxford, 1994.

[6] Joseph, A., *The minimal orbit in a simple Lie algebra and its associated maximal ideal*, Ann. Sci. E.N.S., 4e série, **9** (1976), 1–29.

[7] Lion, G., and M. Vergne, "The Weil representation, Maslov index and theta series," Birkkhauser, Boston, 1980.

[8] Matsuki, T., *The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups*, J. Math. Soc. Japan. **31:2** (1979), 331–357.

[9] Poulsen, N. S., *On C^∞-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups*, J. Funct. Anal. **9** (1972), 87–120.

[10] Ranga Rao, R., *Unitary representations defined by boundary conditions - The case of $sl(2,\mathbb{R})$*, Acta Math. **139** (1976), 185–216.

[11] Sabourin, H., *Une représentation unipotente associée à l'orbite minimale: le cas de $so(4,3)$*, J. Funct. Anal. **137** (1996), 394–465.

[12] Serre, J.P, "Arbres, amalgames, SL_2," Astérisque **46**.

[13] Torasso, P., *Méthode des orbites de Kirillov-Duflo et représentations minimales des groupes simples sur un corps local de caractéristique nulle*, Duke Math. J. **90** (1997), 261–377.

Hervé Sabourin
UPRESA 6086
Département de Mathématiques
Téléport 2, BP 30179
Boulevard Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope-Chasseneuil.
sabourin@mathlabo.univ-poitiers.fr

Received March 2, 1999
and in final form January 17, 2000