Journal of Lie Theory
Volume **11** (2001) 273–303

Estimations à l'infini des fonctions de Bessel associées aux représentations d'une algèbre de Jordan

Antonis Kalliterakis

Communicated by J. Faraut

Résumé. Nous donnons le développement asymptotique et des estimations uniformes et précises pour la fonction de Bessel associée à une représentation d'une algèbre de Jordan euclidienne.

Abstract. We give asymptotic expansions and sharp uniform estimates for the Bessel function associated to a representation of a Euclidean Jordan Algebra.

Introduction

L'étude des fonctions spéciales définies sur des espaces de matrices et en particulier de la fonction de Bessel a été entreprise par C. Herz [8]. Cette étude a ensuite été reprise pour des applications à la statistique par A.G. Constantine [4] et R. Muirhead [9]. Dans le cadre des algèbres de Jordan euclidiennes, les fonctions de Bessel ont été introduites par J. Faraut et G. Travaligni [7]. Plus précisément: soit V une algèbre de Jordan simple euclidienne de dimension n, de rang r et d'élément neutre e. Soit Ω le cône symétrique associé à V. Soit $\phi: V \to \mathcal{H}(E)$ une représentation où $\mathcal{H}(E)$ est l'algèbre de Jordan des endomorphismes symétriques de l'espace euclidien E. Il lui correspond une application quadratique $Q: E \to V$, qui est à valeurs dans $\overline{\Omega}$. En supposant la représentation régulière (cf., [2]) on peut définir la variété de Stiefel $\Sigma = \{\sigma \in E \mid Q(\sigma) = e\}$ qui est une sous-variété analytique compacte de E.

La fonction de Bessel associée à la représentation ϕ est définie comme la transformée de Fourier de la mesure normalisée $d\sigma$ induite sur Σ par la structure euclidienne de E.

$$j(\xi) = \int_\Sigma \exp(-i\langle \xi, \sigma\rangle_E)\, d\sigma.$$

Dans [7] il a été montré que j est radiale et que son profil J s'écrit

$$J(x^2) = \int_\Sigma \exp(-i\langle \phi(x)\sigma, \sigma_0\rangle_E)\, d\sigma,$$

ISSN 0949–5932 / $2.50

où $x \in \overline{\Omega}$ et σ_0 est un point fixe, mais arbitraire, de la variété de Stiefel. On montre également que J est K-invariante où K est la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Aut}(V)$. Et par conséquent on peut supposer que x appartient à une chambre de Weyl fermée de V.

En utilisant la méthode de la phase stationnaire nous déterminons le développement asymptotique de la fonction $J(x^2)$ quand x tend vers l'infini le long d'un rayon singulier, (le cas régulier a été traité par J. Faraut et G. Travaligni ([7], [11]). La fonction de phase associée à x est $g_x\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ et elle est définie par $g_x(\sigma) = \langle \phi(x)\sigma, \sigma_0\rangle_E$. Les points critiques de la fonction de phase forment des variétés qui en général ne sont ni connexes ni de dimension pure mais elles sont non dégénérées (transversalement). Nous avons quand $\tau \to \infty$

$$J(\tau^2 x^2) \sim \sum_{\mathbf{m}\in\mathbf{M}(x)} \exp(i\tau g_x(\sigma) + \frac{1}{4} i\pi \operatorname{sgn} g_x''(\sigma)) \sum_{l=0}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}n_{\mathbf{m}}-l} p_{\mathbf{m}l}$$

où $\mathbf{M}(x)$ est un ensemble de multi–indices qui dépend seulement de la multiplicité des valeurs propres de x.

Ensuite nous obtenons des estimations uniformes de $J(x^2)$ sur $\overline{\Omega}$ en utilisant les résultats des J. J. Duistermat, J. A. C. Kolk et V. S. Varadarajan [5] sur les intégrales oscillantes dépendant d'un paramètre. Nous montrons que le paramètre de l'intégrale oscillante définissant $J(x^2)$ prend ses valeurs dans une chambre de Weyl ouverte qu'on fixe. Nous définissons une filtration de la variété de Stiefel accosiée à une partition en "secteurs" multidimensionels de la chambre de Weyl fermée de V.

Il existe alors une constante positive C telle que pour tout $x \in \overline{\Omega}$

$$|J(x^2)| \le CB(x)$$

où

$$B(x) = \left(\sum_{\epsilon\in\{1,-1\}^r} \prod_{\gamma\in\Xi_1} (1 + |\,\gamma(\epsilon x)\,|)^{-\frac{d}{2}} \right) \prod_{\gamma\in\Xi_2} (1 + |\,\gamma(x)\,|)^{-\frac{\delta}{2}}.$$

Ξ_1, Ξ_2 sont deux parties du système des racines positives de V, d une constante positive qui ne dépend que l'algèbre et δ est une constante positive qui dépend de l'espace de la représentation. Les estimations sont précises, en ce sens que dans chaque direction l'estimation est exactement de l'ordre de grandeur du terme dominant du développement asymptotique.

1. Notations et résultats préliminaires

Afin de décrire les propriétés de l'ensemble critique de la fonction de phase nous aurons besoin de quelques résultats sur la variété différentielle des éléments involutifs d'une algèbre de Jordan et sur la variété de Stiefel associée à une représentation régulière d'une sous-algèbre de Jordan.

On considère un système complet d'idempotents primitifs orthogonaux (s.c.i.p.o) $(c_i)_{1\le i\le r}$ de l'algèbre de Jordan euclidienne qu'on fixe. Soit A le sous-espace vectoriel de V engendré par les c_i. Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ la base duale de $(c_i)_{1\leq i\leq r}$. Ainsi, si $a=\sum_{1\leq i\leq r}\mu_i c_i$ avec $\mu_i\in\mathbb{R}$, on a $\lambda_i(a)=\mu_i$.

Considérons maintenant une nouvelle base $(b_i)_{1\leq i\leq r}$ de A, définie par

$$b_i=\sum_{j=1}^{i} c_j$$

pour $1\leq i\leq r$. Notons que chaque b_i est un idempotent de trace i. Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq r}$ la base de A^* duale de (b_i). Elle est donnée par

$$\alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$$

pour $1\leq i\leq r$, avec la convention $\lambda_{r+1}=0$. Notons que, pour $1\leq i\leq r$, $\lambda_i=\alpha_i+\cdots+\alpha_r$.

Notons Δ l'ensemble $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$, Ξ_1 l'ensemble des $\lambda_i+\lambda_j$ pour $1\leq i<j\leq r$, Ξ_2 l'ensemble $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$, et Ξ la réunion de Ξ_1 et de Ξ_2. On appelle *racines de l'algèbre de Jordan* V les éléments de $\Delta\cup\Xi$.

On définit enfin la *chambre de Weyl fermée de* A *par rapport à* Δ comme étant

$$\mathcal{C}(\Delta)=\{\alpha\in A\mid \alpha_i(a)\geq 0 \text{ pour } i=1,\ldots,r\}$$

c'est à dire l'ensemble des $\sum_{i=1}^r\mu_i c_i$ pour lesquels $\mu_1\geq\ldots\geq\mu_r\geq 0$.

On sait que le groupe K des automorphismes de V opère transitivement sur l'ensemble des s.c.i.p.o. de V ([6], Corollary IV.2.7). Par conséquent, d'après le théorème de la décomposition spectrale ([6],Theorem III.1.1), tout $x\in V$ s'écrit $x=ka$ où $k\in K$ et $a\in A$, où

$$a=\sum_{i=1}^{r}\mu_i c_i\,,\quad \mu_i\in\mathbb{R}.$$

Les éléments k et a ne sont pas uniquement déterminés à partir de x. Quitte à remplacer k par kk_1^{-1} et a par k_1a pour un automorphisme k_1 de V induisant une permutation des c_i, on peut supposer que $\mu_1\geq\ldots\geq\mu_r$. Sous cette restriction, l'élément a de A est bien déterminé. On l'appelle la *a–composante de x* et on le note $a(x)$. L'ensemble des a–composantes de V est le cône

$$\overline{A}^+=\{a\in A\mid \text{ il existe } \mu_1\geq\ldots\geq\mu_r \text{ tels que } a=\sum_{i=1}^{r}\mu_i c_i\}.$$

On appelle *décomposition polaire de x* l'écriture $x=ka(x)$, où $k\in K$ et $a(x)\in\overline{A}^+$.

Soit $x\in\overline{\Omega}$. Soit $\mathrm{Sp}(x)$ l'ensemble des valeurs propres de x. D'après ([6], Theorem III.2.1) elles sont positives ou nulles. Comme $\mathrm{Sp}(x)=\mathrm{Sp}(kx)$, $x\in\overline{\Omega}$ si et seulement si les valeurs propres de sa a–composante sont positives ou nulles. Ce qui précède et le théorème de la décomposition spectrale montrent que l'ensemble des a–composantes de $\overline{\Omega}$ est exactement $\mathcal{C}(\Delta)$.

La décomposition spectrale d'un élément $x \in \mathcal{C}(\Delta)$ s'écrit alors

$$x = \sum_{i=1}^{k} \beta_i(x) C_i$$

où $\beta_i(x)$ sont les valeurs propres distinctes non nulles de x, plus précisément vérifient

$$\beta_i(x) > \ldots > \beta_k(x) > 0.$$

Les idempotents C_i sont donnés par

$$C_i = \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} c_j$$

où $r_0 = 0$ et, pour $1 \leq i \leq r$, $r_i = \mathrm{rg}(C_1 + \cdots + C_i)$.

La multiplicité de la valeur propre $\beta_i(x)$ est égale à $\mathrm{tr}(x) = r_i - r_{i-1}$. Si 0 est valeur propre de x, sa multiplicité est égale à la trace de l'idempotent $C_0 := e - e_k$, où

$$e_k := \sum_{i=1}^{k} C_i.$$

On sait que les éléments involutifs J de V sont de la forme $J = e - 2c$, où c est un idempotent de V. On note $\mathcal{J}$ l'ensemble des éléments involutifs de V. On fixe un s.c.i.p.o. $(c_i)_{1 \leq i \leq r}$. Pour chaque entier $m \in \{0, \ldots, r\}$, on pose

$$W_m := \sum_{i=1}^{m} c_i - \sum_{i=m+1}^{r} c_i.$$

Considérons l'action naturelle de K sur $\mathcal{J}$. On note $\mathcal{O}_m$ l'orbite de W_m suivant K et K_m le stabilisateur de W_m dans K. Il est clair que $\mathcal{O}_m$ est difféomorphe à l'espace homogène K/K_m et par conséquent, est une variété compacte connexe, puisque K l'est.

Lemme 1.1. *L'ensemble $\mathcal{J}$ des éléments involutifs de V est réunion disjointe des orbites $\mathcal{O}_m$:*

$$\mathcal{J} = \cup_{0 \leq m \leq r} \mathcal{O}_m.$$

Démonstration. Soit $J \in \mathcal{J}$. Il existe un s.c.i.p.o. $(c'_i)_{1 \leq i \leq r}$ de V tel que

$$J = \sum_{i=1}^{r} \epsilon_i c'_i$$

pour un r-uplet $\epsilon = (\epsilon_i)_{1 \leq i \leq r} \in \{-1, 1\}^r$. Soit m le nombre d'indices i pour lesquels $\epsilon_i = 1$. On sait que le groupe K opère transitivement sur l'ensemble des s.c.i.p.o. d'une algèbre de Jordan simple et, comme $\mathrm{Sp}(x) = \mathrm{Sp}(kx)$, $J \in \mathcal{O}_m$. Par conséquent,

$$\mathcal{J} \subset \cup_{0 \leq m \leq r} \mathcal{O}_m.$$

et cette inclusion est une égalité, l'inclusion inverse étant triviale. De plus, la réunion est disjointe. En effet, si $J \in \mathcal{O}_m$, les valeurs propres éventuelles de J sont 1 et -1 et m est égale à la multiplicité de la valeur propre 1. Par conséquent, les orbites $\mathcal{O}_m$ sont distinctes. ∎

Lemme 1.2. *Soit C un idempotent de V. Alors l'algèbre $V(C,1)$ est simple.*

Démonstration. Supposons que l'algèbre $V(C,1)$ ne soit pas simple. Il existe alors un idempotent non trivial c de $V(C,1)$ tel que l'on ait

$$V(c,1)\cap V(c,\frac{1}{2})=\{0\}.$$

D'après ([6], Théorème III.1.1), il existe un système complet d'idempotents orthogonaux $d_1,\dots,d_s$ tels que $C=\sum_{i=1}^{s} d_i$ avec $s\le r$. Le résultat ([6], Theorem IV.2.1), les relations $Cc=c$ et $c^2=c$ et le fait que c est un idempotent non trivial impliquent qu'on peut écrire $c=\sum_{i=1}^{t} d_i$ avec $1\le t<s$ (en réordonnant les d_i si nécessaire). En utilisant ([6], Proposition IV.2.3) il existe $x\in V(d_1,\frac{1}{2})\cap V(d_s,\frac{1}{2})$ $(x\neq 0)$. On a alors $Cx=x$ et $cx=\frac{1}{2}$ autrement dit $x\in V(c,1)\cap V(c,\frac{1}{2})$ ce qui est absurde. ∎

On note $\mathcal{J}_{x,i}$ l'ensemble des éléments involutifs de $V(c,1)$.

Un élément involutif J de la sous-algèbre $V(e_k,1)$ sera dit *adapté à la décomposition spectrale de* x s'il a la forme

$$J=\sum_{i=1}^{k} J_i$$

où $J_i\in\mathcal{J}_{x,i}$. On désigne par $J_i\in\mathcal{J}_x$ l'ensemble de ces éléments.

Soit $i\in\{1,\dots,k\}$. Pour chaque entier $m\in\{0,\dots,r_i-r_{i-1}\}$, définissons l'élément involutif $W_{i,m}$ de $\mathcal{J}_{x,i}$ par

$$W_{i,m}:=\sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i+m} c_j-\sum_{j=r_{i-1}+m+1}^{r_i} c_j.$$

Soit $\mathbf{M}(x)$ l'ensemble des k-uplets $(m_1,\dots,m_k)$ d'entiers tels que $0\le m_i\le r_i-r_{i-1}$ pour tout $i\in\{1,\dots,k\}$. Pour chaque $\mathbf{m}=(m_i)_{1\le i\le k}\in\mathbf{M}(x)$, soit

$$W_{\mathbf{m}}:=\sum_{i=1}^{k} W_{i,m_i}.$$

C'est un élément involutif adapté à la décomposition spectrale de x.

Par ailleurs, soit K_i la composante connexe de l'identité du groupe $\mathrm{Aut}(V(C_i,1))$ des automorphismes de l'algèbre $V(C_i,1)$. On définit $\Gamma_k:=\prod_{i=1}^{k} K_i$ et il est clair que c'est un groupe de Lie compact et connexe. On définit l'action de Γ_k sur $\mathcal{J}_x$ par

$$(g,J)\longmapsto gJ:=\sum_{i=1}^{k} g_iJ_i,$$

où $g=(g_i)_{1\le i\le r}$ avec $g_i\in K_i$ et $J=\sum_{i=1}^{k} J_i$ avec $J_i\in\mathcal{J}_{x,i}$. Pour $\mathbf{m}\in\mathbf{M}(x)$, on note $\mathcal{O}_{\mathbf{m}}$ l'orbite de $W_{\mathbf{m}}$ sous l'action de Γ_k.

Lemme 1.3. *Soit $x \in \mathcal{C}(\Delta)$. Avec les notations précédentes, la variété $\mathcal{J}_x$ des éléments involutifs adaptés à la décomposition spectrale de x est réunion disjointe d'orbites suivant Γ_k.*

$$\mathcal{J}_x = \cup_{\mathbf{m}\in\mathbf{M}(x)}\ \mathcal{O}_m.$$

Démonstration. Soit $J = \sum_{i=1}^k J_i$ un élément de $\mathcal{J}_x$ avec $J_i \in \mathcal{J}_{x,i}$. La décomposition spectrale de J_i est

$$J_i = \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \epsilon_i c'_j,$$

où (c'_j) est un s.c.i.p.o. de l'algèbre $V(C_i, 1)$ et $\epsilon_j = \pm 1$. Soit m_i le nombre d'indices j pour lesquels $r_{i-1} \leq j \leq r_i$ et $\epsilon_i = 1$. En appliquant le lemme 1.1, à l'algèbre $V(C_i, 1)$ on aura $J_i = g_i W_{i,m_i}$ pour $g_i \in K_i$.

Finalement, si $g = (g_1, \ldots, g_k) \in \Gamma_k$ et $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_k) \in \mathbf{M}(x)$, on aura $J = gW_{\mathbf{m}}$.

Les orbites $\mathcal{O}_{\mathbf{m}}$ sont distinctes car, étant donné un élément de J de $\mathcal{O}_{\mathbf{m}}$, l'entier m_i est égal à la multiplicité de la valeur propre 1 de JC_i, donc m est entièrement détermineé par J. ∎

En utilisant le fait que la représentation ϕ est régulière et la décomposition polaire de E nous obtenons la décomposition orthogonale de E,

$$E = \phi(V)\sigma \oplus \mathrm{T}_\sigma\Sigma,$$

où $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$ est l'espace tangent de la variété de Stiefel Σ au point σ.

Dans [11] G. Travaligni a construit une base orthonormée de E contenant une base orthonormée de $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$.

Plus précisement on considère la décomposition de Peirce de V par rapport au s.c.i.p.o. $(c_i)_{1\leq i\leq r}$

$$V = \oplus_{1\leq i\leq j\leq r}\ V_{i,j},$$

où $V_{ii} = \mathbb{R}c_i$ et pour tout $i \neq j$, $\dim V = d$. On fixe une base orthonormale de V en réunissant $(c_i)_{1\leq i\leq r}$ et une base orthonormale $(v_{ij}^t)_{1\leq t\leq d}$ de chaque V_{ij}. On montre ([11], Lemma 9) que la famille formée par les vecteurs $\phi(c_i - c_j)\phi(v_{ij}^t)\sigma$ de E $(1 \leq i < j \leq r,\ 1 \leq t \leq d)$ est orthonormale. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par ces vecteurs. Pour $1 \leq j \leq r$, on définit le sous-espace vectoriel

$$A_j = E_j \cap (F \oplus \phi(V)\sigma),$$

où $E_j = \phi(c_j)E$. Les sous-espaces F et $\phi(E)\sigma$ sont orthogonaux ([11], Lemma 8). Soit R_j le supplémentaire orthogonal de A_j dans E_j. On a la décomposition en somme directe orthogonale

$$E_j = A_j \oplus R_j.$$

Pour tout j $(1 \leq j \leq r)$ la dimension de R_j est égale à $\delta = \frac{N}{r} - rd + d - 1$ où $N = \dim E$. Dans chaque R_j, on fixe une base orthonormée r_h^j $(1 \leq h \leq \delta)$ et comme les E_j sont deux à deux orthogonaux, on obtient une base orthonormée de

$$R = \oplus_{1 \leq j \leq r} R_j .$$

D'après ce qui précède on a la décomposition en somme directe orthogonale

$$E = \phi(V)\sigma \oplus F \oplus R,$$

et par conséquent

$$\mathrm{T}_\sigma \Sigma = F \oplus R.$$

La famille $\mathcal{B}$ formée par les vecteurs r_h^j et $\phi(c_i - c_j)\phi(v_{ij}^t)\sigma$ $(1 \leq h < j \leq \delta,\ 1 \leq i < j \leq r,\ 1 \leq t \leq d)$ est une base orthonormée de $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$. Une telle base $\mathcal{B}$ de $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$ sera appelée *base orthonormée standard.*

Soit C un idempotent de V. Soit E_C le sous-espace vectoriel de E défini par $E_C = \phi(C)E$. On considère la représentation $\phi_C \colon V(C,1) \to \mathcal{H}(\phi(C)E)$ qui est définie par

$$(*) \qquad \phi_C(y) = \phi(y)|_{E_C}$$

et l'application quadratique à valeurs vectorielles associée à ϕ_C.

Proposition 1.4. *La représentation ϕ_C est régulière.*

Démonstration. Il suffit d'établir qu'il existe $\xi_C \in E_C$ tel que $Q_C(\xi_C) = C$ ([2], Proposition 4.1). Or, il est clair qu'il existe $\xi_C \in E_C$ tel que $Q_C(\xi_C) = C$ il suffit pour cela de choisir $\xi_C = \phi_C(C)$ où $\sigma \in \Sigma$. En particulier, $Q(\xi) \in V(C,1)$. Par ailleurs, pour tout $z \in V(C,1)$ et pour tout $\eta_C \in E_C$, on a

$$\langle Q(\eta_C), z\rangle_V = \langle Q(\eta_C), z\rangle_{V(C,1)}$$

Compte tenu du fait que $Q(\xi_C) = C$, la relation $(*)$ implique $Q_C(\xi_C) = C$. ■

On définit la variété de Stiefel correspondant à la représentation ϕ_C par

$$\Sigma_C = \{\sigma_C \in E_C \,|\, Q_C(\sigma_C) = C\}.$$

Lemme 1.5. *L'application $\phi(C)\colon \Sigma \to \Sigma_C$ est une submersion.*

Démonstration. Compte tenu de la forme des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ l'image de l'espace tangent $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$ par l'application linéaire tangente $\phi(C)$ admet une base formée par:
(i) les vecteurs r_h^j $(1 \leq h \leq \delta)$ pour lesquels $c_jC = c_j$,
(ii) les vecteurs $\phi(c_i - c_j)\phi(v_{ij}^s)\sigma$ $(1 \leq s \leq d)$ pour lesquels $c_iC = c_j$ et
(iii) les vecteurs $\phi(c_j)\phi(v_{ij}^s)\sigma$ $(1 \leq s \leq d)$ pour lesquels $c_iC = 0$ et $c_jC = c_j$.

Si l'on pose $r' = \mathrm{rg}(C)$, alors

$$(1) \qquad \dim \phi(C)\mathrm{T}_\sigma\Sigma = r'\delta + \frac{r'(r'-1)}{2}d + r'(r - r'),$$

où $\delta = \dim R_i = \frac{N}{r} - rd + d - 1$. Si $\sigma' = \phi(C)\sigma$, la dimension de l'espace tangent à Σ_C en σ' est donnée par la relation

$$\text{(2)} \quad \dim \mathrm{T}_{\sigma'}\Sigma = \dim \phi(C)E - \dim \phi(V(C,1))\sigma' = r'\frac{N}{r} - \left(r' + \frac{r'(r'-1)}{2}d\right)$$

Les relations (1) et (2) impliquent que $\dim \phi(C)\mathrm{T}_\sigma\Sigma = \dim \mathrm{T}_{\sigma'}\Sigma_C$, et par conséquent $\phi(C)$ est une submersion. ∎

Proposition 1.6. *La fonction de Bessel J est K–invariante.*

Démonstration. Pour tout $\xi \in E$ on a l'identité

$$\int_E e^{-\|\xi\|^2 - i\langle \xi,\eta\rangle_E}\, d\xi = \pi^{\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{4}\|\eta\|^2},$$

en changeant ξ en $\phi(z^{\frac{1}{2}})\xi$ et η en $\phi(z^{-\frac{1}{2}})\sigma$, où $z \in \Omega + iV$, il vient

$$\int_E e^{\langle z, Q(\xi)\rangle_E - \langle \xi,\sigma\rangle_E}\, d\xi = \pi^{\frac{N}{2}} \det^{\frac{-N}{2r}}(z) e^{-\frac{1}{4}\langle z^{-1}, Q(\sigma)\rangle_E}.$$

La formule intégrale pour la décomposition polaire généralisée ([7], proposition p.130) et la définition de la fonction de Bessel impliquent
(∗)

$$\int_\Omega e^{-\langle z,x\rangle_E} j(\phi(x^{1/2})\sigma)(\det^{N/2r - n/r} x)\, dx = \Gamma_\Omega(N/r)\det^{-N/2r}(z) e^{-\frac{1}{4}\langle z^{-1}, e\rangle_E}.$$

Le changement de x en kx dans (∗) et l'injectivité de la transformée de Laplace montrent que $j(\phi(x^{1/2})\sigma) = j(\phi(kx^{1/2})\sigma)$, mais j est radiale ce qui implique que J est K–invariante. ∎

2. Ensemble critique de la fonction de phase

Désormais, compte tenu du fait que la fonction de Bessel J est K-invariante (proposition 1.6.), et de la décomposition polaire des éléments de V, on supposera que x appartient à $\mathcal{C}(\Delta)$.

On sait ([7]) qu'un élément σ de la variété de Stiefel Σ est un point critique de la fonction de phase g_x si et seulement s'il existe $y \in V$ tel que

$$(*) \qquad \phi(x)\sigma_0 = \phi(y)\sigma.$$

D'après ([7], Lemma 1), pour tout $x \in V$ et $\xi \in E$, $Q(\phi(x)\xi) = P(x)Q(\xi)$, où P est la représentation quadratique de V, et par conséquent,

$$P(x)Q(\sigma_0) = P(y)Q(\sigma).$$

Mais $\sigma_0, \sigma \in \Sigma$, d'où $Q(\sigma_0) = Q(\sigma) = e$, ce qui implique $y^2 = x^2$.

Lemme 2.1. *Soient $x \in \mathcal{C}(\Delta)$ et $y \in V$. Alors, $x^2 = y^2$ si et seulement s'il existe des éléments $J_i \in \mathcal{J}_{x,i}$ tels que $y = \sum_{i=1}^k \beta_i(x) J_i$.*

Démonstration. Considérons la décomposition spectrale de y. Elle sera de la forme $y = \sum_{j=1}^k \mu_j c'_j$. Les nombres μ_j sont les valeurs propres de y et $(c'_j)_{1\le j\le r}$ est un s.c.i.p.o. de V. L'égalité $x^2 = y^2$ implique

$$\sum_{j=1}^r \mu_j^2 c'_j = y^2 = x^2 = \sum_{i=1}^k \beta_j^2(x) C_j$$

Le théorème de la décomposition spectrale implique qu'il existe une partition $(A_i)_{0\le i\le k}$ de $\{1, \ldots, r\}$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$,

$$\sum_{j\in A_i} c'_j = C_i,$$

et, pour tout $j \in A_i$, $\mu_j^2 = \beta_i^2$, donc $\mu_j = \pm\beta_i(x)$, où l'on a posé $\beta_0 = 0$. Dans cette partition, les A_i sont non vides pour $i \ge 1$. Soient alors, pour $1 \le i \le k$,

$$P_i := \{j \in A_i \mid \mu_j = \beta_i(x)\}, \ N_i := \{j \in A_i \mid \mu_j = -\beta_i(x)\}$$

et

$$J_i := \sum_{j\in P_i} c'_j - \sum_{j\in N_i} c'_j.$$

Il est clair que J_i est un élément involutif de $V(C_i, 1)$ et que $y = \sum_{i=1}^k \beta_i(x) J_i$.

Et inversement, tout élément y de cette forme vérifie

$$y^2 = \sum_{i=1}^k \beta_i^2(x) J_i^2 = \sum_{i=1}^k \beta_i^2(x) C_i = x^2. \qquad \blacksquare$$

On a la caractérisation suivante des points critiques.

Lemme 2.2. *Soit $x \in \mathcal{C}(\Delta)$. Soit g_x la fonction de phase associée à x. Un élément σ de la variété de Stiefel Σ est un point critique pour la fonction g_x si et seulement s'il existe un élément involutif $J \in \mathcal{J}_x$ tel que*

$$\phi(e_k)\sigma = \phi(J)\sigma_0.$$

Démonstration. Le point σ est un point critique de g_x si et seulement s'il existe $y \in V$ tel que

$$(*) \qquad \phi(x)\sigma_0 = \phi(y)\sigma.$$

D'après le lemme 2.1, il existe des éléments involutifs $J_i \in \mathcal{J}_{x,i}$ tels que $y = \sum_{i=1}^k \beta_i(x) J_i$. Posons

$$z = \sum_{i=1}^k (\beta_i(x))^{-1} J_i,$$

ce qui est possible, puisque $\beta_i(x) > 0$. Alors, $xz = J$ et $yz = e_k$. De plus, les opérateurs symétriques $\phi(x)$, $\phi(y)$ et $\phi(z)$ commutent deux à deux, puisqu'ils sont combinaisons linéaires des $\phi(c_j)$, qui sont des projecteurs deux à deux orthogonaux.

De la relation $(*)$ on déduit, en composant par $\phi(z)$, que

$$\phi(e_k)\sigma = \phi(yz)\sigma = \phi(z)\phi(y)\sigma = \phi(z)\phi(x)\sigma_0 = \phi(xz)\sigma_0 = \phi(J)\sigma_0,$$

ce qui montre que la relation est nécessaire.

Et réciproquement, s'il existe $J \in \mathcal{J}_x$ tel que $\phi(e_k)\sigma = \phi(J)\sigma_0$, alors il suffit de poser $y = xJ$ pour avoir $(*)$. En effet, si $J = \sum J_i$, avec $J_i \in \mathcal{J}_{x,i}$, on a $y = \sum \beta_i(x)J_i$ et les opérateurs $\phi(x)$, $\phi(y)$, $\phi(J)$ commutent deux à deux. Donc, comme $xJe_k = ye_k$,

$$\phi(x)\sigma_0 = \phi(xJ^2)\sigma_0 = \phi(xJ)\sigma_0 = \phi(xJ)\phi(J)\sigma_0 = \phi(y)\phi(e_k)\sigma = \phi(y)\sigma. \qquad \blacksquare$$

Les notations étant les mêmes, si $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)$, on considère la partie

$$\Sigma_{\mathbf{m}} := \{\sigma \in \Sigma \mid \phi(e_k)\sigma \in \phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}})\sigma_0\} \text{ de } \Sigma.$$

Proposition 2.3. *Soit $x \in \mathcal{C}(\Delta)$. Chaque $\Sigma_{\mathbf{m}}$ est une sous-variété compacte de Σ. Les variétés $\Sigma_{\mathbf{m}}$ sont deux à deux disjointes et leur réunion, quand $\mathbf{m}$ parcourt $\mathbf{M}(x)$, est l'ensemble Σ_x des points critiques de la fonction de phase g_x :*

$$\Sigma_x = \cup_{\mathbf{m}\in\mathbf{M}(x)} \Sigma_{\mathbf{m}}.$$

Si $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}'$, alors $\Sigma_{\mathbf{m}}$ et $\Sigma_{\mathbf{m}'}$ ne sont pas contenues dans la même composante connexe de Σ.

Démonstration. Nous savons déjà que Σ_x est réunion des $\Sigma_{\mathbf{m}}$. En effet, il résulte des lemmes 2.1 à 2.2, qu'un point critique de la fonction g_x correspond à un élément involutif $J \in \mathcal{J}_x$, et, comme $\mathcal{J}_x$ est réunion des orbites $\mathcal{O}_{\mathbf{m}}$, Σ_x est réunion des $\Sigma_{\mathbf{m}}$.

Montrons que la réunion est disjointe. Pour commencer, nous constatons que, si $\sigma \in \Sigma_x$, alors l'élément y de V qui vérifie $y^2 = x^2$ et $\phi(x)\sigma_0 = \phi(y)\sigma$ est unique. En effet si un élément z avait les mêmes propriétés, on aurait

$$\phi(y - z)\sigma = \phi(y)\sigma - \phi(z)\sigma = 0,$$

donc $y - z = 0$, car σ est régulier ([2]), en tant qu'élément de Σ. Ainsi, la décomposition

$$y = \sum_{i=1}^{k} \beta_i(x)J_i \quad (J_i \in \mathcal{J}_{x,i})$$

est bien déterminée par σ. Si l'on note m_i la multiplicité de la valeur propre 1 dans J_i, alors $\mathbf{m}$ est bien déterminé à partir de σ, donc la réunion des $\Sigma_{\mathbf{m}}$ est disjointe.

Montrons que les $\Sigma_{\mathbf{m}}$ sont des sous-variétés compactes de Σ. Chaque $\mathcal{O}_{\mathbf{m}}$ est une sous-variété compacte et connexe de V difféomorphe à l'espace homogène $\Gamma_k/S(W_{\mathbf{m}})$, où $S(W_{\mathbf{m}})$ est le stabilisateur de $W_{\mathbf{m}}$. Les notations étant celles du paragraphe 1 ci-dessus, on considère la variété de Stiefel

$$\Sigma_k = \{\sigma \in \phi(e_k)E \mid Q_k(\sigma_k) = e_k\}.$$

On définit l'application $\chi\colon \mathcal{O}_{\mathbf{m}} \to \Sigma_k$ par $\chi(J) = \phi(J)\sigma_o$ qui vérifie $\chi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}}) = \phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}})\sigma_0$. L'application χ est injective, car, si $\chi(J) = \chi(J')$, alors $\phi(J'-J)\sigma_0 = 0$. Donc, comme ϕ est régulière et $Q(\sigma_0) = e$, on aura $J' = J$. Par un argument identique, on montre que χ est une immersion. Il est clair par ailleurs que l'image réciproque de $\phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}})\sigma_0$ par $\phi(e_k)$ est $\Sigma_{\mathbf{m}}$. Mais $\phi(e_k)$ est une submersion (lemme 1.5) et, par conséquent, $\Sigma_{\mathbf{m}}$ est une sous-variété fermée donc compacte de Σ.

Supposons que $\Sigma_{\mathbf{m}}$ et $\Sigma_{\mathbf{m}'}$ soient contenues dans la même composante connexe de Σ. Il existe alors un chemin dans Σ joignant le point σ à σ' où $\sigma \in \Sigma_{\mathbf{m}}$ et $\sigma' \in \Sigma_{\mathbf{m}'}$. Compte tenu de la connexité des $\phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}})\sigma_0$ et $\phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}'})\sigma_0$ nous avons un chemin dans $\phi(e_k)\Sigma$ joignant le point $\phi(W_{\mathbf{m}})\sigma_0$ à $\phi(W_{\mathbf{m}'})\sigma_0$. Comme $\mathbf{m} \neq \mathbf{m}'$ il existe $i \in \{1,\ldots,\operatorname{rg} e_k\}$ tel que $\phi(c_i)\phi(W_{\mathbf{m}})\sigma_0 = \epsilon_i\phi(c_i)\sigma_0$ et $\phi(c_i)\phi(W_{\mathbf{m}'})\sigma_0 = \epsilon_i'\phi(c_i)\sigma_0$ avec $\epsilon_i\epsilon_i' = -1$ par conséquent il existe donc dans l'image du chemin un élément $\phi(e_k)\sigma_1$ tel que $\phi(c_i)\phi(e_k)\sigma_1 = 0$. Nous avons, alors $\sigma_1 = \sum_{j=2}^r \phi(c_j)\sigma_1$ et $Q(\sigma_1) = e = \sum_{j=2}^r c_j$ ce qui est absurde. ■

Remarque. Il est clair que Σ_x ne dépend pas des valeurs propres de x mais seulement de leurs multiplicités.

3. Développement asymptotique de la fonction de Bessel

Soit x un élément de la chambre de Weyl $\mathcal{C}(\Delta)$. On considère sa décomposition spectrale $x = \sum_{i=1}^k \beta_i(x)C_i$. On sait que les C_i s'expriment par $C_i = \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} c_j$. Soit $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r) \in \{-1,1\}^r$. On définit les éléments

$$\boldsymbol{\epsilon}C_i = \sum_{j=r_{i-1}+1}^{r_i} \epsilon_j c_j \quad \text{et on pose} \quad \boldsymbol{\epsilon}x = \sum_{i=1}^k \beta_i(x)(\boldsymbol{\epsilon}C_i).$$

Pour $\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r$, on définit les ensembles de racines de V

$$\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon},x) := \{\gamma \in \Xi_1 \mid \gamma(\boldsymbol{\epsilon}x) \neq 0\} \text{ et } \Xi_2(\boldsymbol{\epsilon},x) := \{\gamma \in \Xi_2 \mid \gamma(\boldsymbol{\epsilon}x) \neq 0\}.$$

Pour $i \in \{1,\ldots,k\}$, on désigne par $m_i(\boldsymbol{\epsilon})$ la multiplicité de la valeur propre 1 dans $\boldsymbol{\epsilon}C_i$, c'est à dire le nombre d'indices j tels que $r_{i-1} < j \leq r_i$ et $\epsilon_j = 1$. On pose

$$\mathbf{m}(\boldsymbol{\epsilon}) := (m_1(\boldsymbol{\epsilon}),\ldots,m_k(\boldsymbol{\epsilon})) \in \mathbf{M}(x).$$

de sorte que $J_{\boldsymbol{\epsilon}} \in \mathcal{O}_{\mathbf{m}(\boldsymbol{\epsilon})}$. Si $\boldsymbol{\epsilon},\boldsymbol{\epsilon}' \in \{-1,1\}^r$ vérifient $\mathbf{m}(\boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{m}(\boldsymbol{\epsilon}')$, alors les ensembles $\Xi_2(\boldsymbol{\epsilon},x)$ et $\Xi_2(\boldsymbol{\epsilon}',x)$ sont égaux, tandis que les ensembles $\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon},x)$ et $\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon}',x)$ sont de même cardinal. Par conséquent on peut parler, pour $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)$, de $\operatorname{Card}(\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon},x)) = \operatorname{Card}(\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon}',x))$.

On sait que le hessien de la fonction de phase g_x au point critique $\sigma \in \Sigma_{\mathbf{m}}$ ([7], [11]) est donné par

$$g_x''(\sigma)(X,X) = -\langle \phi(y)X, X\rangle_E \quad \text{où} \quad X \in \mathrm{T}_\sigma\Sigma,$$

où y est de la forme $\sum_{i=1}^k \beta_i(x)J_i$ avec $J_i \in \mathcal{J}_{x,i}$.

Soit J l'élément involutif de $V(e_k,1)$ défini par

$$J = \sum_{i=1}^k J_i.$$

Nous allons déterminer une base de $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$, orthogonale pour g_x''. On considère un s.c.i.p.o. $(\tilde{c}_i)$ de V contenant les idempotents primitifs à l'aide desquels J s'exprime. Ensuite on considère une base orthonormée de V formée par les $\tilde{c}_i$ $(1 \le i \le r)$ et les vecteurs $\tilde{v}_{ij}^t$ $(1 \le i < j \le r, 1 \le t \le d)$ obtenus à partir des $\tilde{c}_i$ exactement comme les v_{ij}^t ont été obtenus à partir des c_i.

Proposition 3.1. *Soit $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)$. Soit σ un point critique de g_x appartenant à $\Sigma_{\mathbf{m}}$. Alors la base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$ formée par les vecteurs*

$$\tilde{r}_h^j \ (1 \le h \le \delta) \quad et \quad \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma \quad (1 \le i < j \le r, \quad 1 \le t \le d)$$

est orthogonale par rapport au hessien de g_x.

La dimension du noyau, le rang et la signature du hessien $g_x''(\sigma)$ sont constants sur $\Sigma_{\mathbf{m}}$ et valent respectivement

$$\dim\ker g_x''(\sigma) = d\,\mathrm{Card}\{\gamma \in \Xi_1 \mid \gamma(\boldsymbol{\epsilon}x) = 0\} + \delta\,\mathrm{Card}\{\gamma \in \Xi_2 \mid \gamma(\boldsymbol{\epsilon}x) = 0\}$$

$$\mathrm{rg}\, g_x''(\sigma) = d\,\mathrm{Card}(\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon},x)) + \delta\,\mathrm{Card}(\Xi_2(\boldsymbol{\epsilon},x))$$

$$\mathrm{sgn}\, g_x''(\sigma) = -d \sum_{\gamma\in\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon},x)} \mathrm{sgn}(\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)) \ - \delta \sum_{\gamma\in\Xi_2(\boldsymbol{\epsilon},x)} \mathrm{sgn}(\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)).$$

Le déterminant de la forme bilinéaire induite par le hessien sur l'espace quotient

$$\mathrm{N}(\sigma) := \mathrm{T}_\sigma\Sigma/\ker g_x''(\sigma)$$

est donné par

$$\det(g_x''(\sigma)|_{\mathrm{N}(\sigma)}) = (-1)^{\mathrm{rg} g_x''(\sigma)} \prod_{\gamma\in\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon},x)} (\frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x))^d \prod_{\gamma\in\Xi_2(\boldsymbol{\epsilon},x)} (\frac{1}{2}\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x))^\delta.$$

La fonction de phase est constante sur $\Sigma_{\mathbf{m}}$, avec comme valeur

$$g_x(\sigma) = \sum_{\gamma\in\Xi_2(\boldsymbol{\epsilon},x)} \gamma(\boldsymbol{\epsilon}x).$$

Démonstration. On considère le hessien

$$g_x''(\sigma)(X,X) = -\langle \phi(y)X, X\rangle_E \quad \text{où} \quad X \in \mathrm{T}_\sigma\Sigma.$$

Notons Ψ la forme bilinéaire qui lui est canoniquement associée. En utilisant ([11], Lemma 8) on montre que $\mathcal{B}$ est orthogonale par rapport à Ψ. Nous allons calculer ses éléments diagonaux. On a $Q(\tilde{r}_h^j) = \tilde{c}_j$ et

$$\Psi(\tilde{r}_h^j, \tilde{r}_h^j) = \langle \phi(y)\tilde{r}_h^j, \tilde{r}_h^j \rangle_E = -\langle y, Q(\tilde{r}_h^j) \rangle_V = -\langle y, \tilde{r}_j \rangle_V. \tag{1}$$

Alors le dernier membre de (1) est non nul si et seulement s'il est de la forme $\gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)$ pour une racine $\gamma \in \Xi_2(\boldsymbol{\epsilon}, x)$. La multiplicité de $\gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)$ est alors égale à δ, la dimension commune des espaces R_j. On a aussi

$$\begin{aligned} &\Psi(\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma, \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma) \\ =&\langle y, Q(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma \rangle_V = -\frac{1}{2}\langle y, \tilde{c}_i + \tilde{c}_j \rangle_V \end{aligned}. \tag{2}$$

En effet, d'après ([7], Lemma 1),

$$Q(\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma) = P(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)Q(\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma) = P(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)P(\tilde{v}_{ij}^t)Q(\sigma)$$

et

$$P(\tilde{v}_{ij}^t)e = [2L^2(\tilde{v}_{ij}^t) - L(\tilde{v}_{ij}^t)^2)]e = (\tilde{c}_i + \tilde{c}_j) - \frac{1}{2}(\tilde{c}_i + \tilde{c}_j)$$

d'où (2). Donc

$$\Psi(\phi(y)\tilde{r}_h^j, \phi(y)\tilde{r}_h^j) = -\frac{1}{2}(\epsilon_i\beta_i(x) + \epsilon_j\beta_j(x)).$$

Le deuxième membre de (2) est non nul si et seulement si $\gamma \in \Xi_1(\boldsymbol{\epsilon}, x)$, auquel cas sa multiplicité est égale à la dimension d de l'espace $V_{i,j}$.

Les formules donnant $\dim\ker(\sigma)$, $\operatorname{rg} g_x''(\sigma)$, $\operatorname{sgn} g_x''(\sigma)$, $\det(g_x''(\sigma)|_{\mathrm{N}(\sigma)})$ sont alors immédiates.

Comme $\sigma \in \Sigma_{\mathbf{m}}$, il existe un élément $J \in \mathcal{J}_x$ tel que

$$\sigma = \phi(e_k)\sigma + \phi(C_0)\sigma = \phi(J)\sigma_0 + \phi(C_0)\sigma.$$

Les vecteurs $\phi(C_0)\sigma$ et $\phi(x)\sigma_0$ étant orthogonaux dans E, on a

$$g_x(\sigma) = \langle \phi(x)\sigma, \sigma_0 \rangle_E = \langle \sigma, \phi(x)\sigma_0 \rangle_E = \langle \phi(J)\sigma_0, \phi(x)\sigma_0 \rangle_E = \langle \sigma_0, \phi(J)\phi(x)\sigma_0 \rangle_E$$

et, compte tenu de la décomposition spectrale de x $x = \sum \beta_i(x)C_i$ et du fait que $\phi(J)$ commute avec $\phi(x)$, on obtient la valeur critique $g_x(\sigma)$. ■

On rappelle que y est un point critique *non dégénéré par rapport à une sous-variété Y de X* par rapport à la fonction de phase g si g_y'' induit une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace normal

$$\mathrm{N}_y\mathrm{Y}/\mathrm{X} := \mathrm{T}_y\mathrm{X}/\mathrm{T}_y\mathrm{Y}$$

à Y dans X. Si cette propriété a lieu pour tout $y \in Y$, on dira que Y est une *variété critique non dégénérée.*

On détermine l'espace tangent $\mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}}$ en chaqun de ses points. On considère le groupe de Lie $\Gamma_k = \prod_{i=1}^k K_i$. Soit $\mathfrak{g}_k$ son algèbre de Lie. Alors, $\mathfrak{g}_k = \oplus_{1\leq i\leq k} \mathfrak{k}_i$ où $\mathfrak{k}_i$ est l'algèbre de Lie de K_i, laquelle est canoniquement isomorphe à l'algèbre des dérivations de V_i.

Soit $\sigma \in \Sigma_{\mathbf{m}}$. On sait qu'il s'écrit sous la forme

$$\sigma = \phi(e_k)\sigma + \phi(C_o)\sigma = \phi(J)\sigma_0 + \phi(C_0)\sigma_0$$

où $J \in \mathcal{O}_{\mathbf{m}} \subset \mathcal{J}_x$. Comme $e = e_k + C_0$, tout vecteur tangent $X \in \mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}}$ vérifie

$$X = \phi(e_k)X + \phi(C_0)X. \tag{1}$$

Le vecteur $\phi(e_k)X$ appartient à l'espace tangent $T := \mathrm{T}_{\phi(W_{\mathbf{m}})\sigma_0}(\phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}})\sigma_0)$ à $\phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}})\sigma_0$ au point $\phi(W_{\mathbf{m}})\sigma_0$. Mais $\chi\colon \mathcal{O}_{\mathbf{m}} \to \phi(\mathcal{O}_{\mathbf{m}})\sigma_0$ est un difféomorphisme (proposition 2.3), et l'espace tangent T est engendré par les vecteurs du type

$$\phi(\sum_{i=1}^k D_iJ_i)\sigma_0 \quad \text{oú} \quad D_i \in \mathfrak{k}_i,$$

et, par conséquent, (1) implique

$$X = \phi(\sum_{i=1}^k D_iJ_i)\sigma_0 + \phi(C_0)X. \tag{2}$$

Proposition 3.2. *Soit $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)$. Si σ est un point critique de g_x appartenant à $\Sigma_{\mathbf{m}}$ alors,* $\mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}} = \ker g_x''(\sigma)$.

Démonstration. Soit σ un point critique appartenant à $\Sigma_{\mathbf{m}}$. On sait qu'il s'écrit sous la forme

$$\sigma = \phi(e_k)\sigma + \phi(C_0)\sigma = \phi(J)\sigma_0 + \phi(C_0)\sigma,$$

où $J \in \mathcal{O}_{\mathbf{m}} \subset \mathcal{J}_x$ et $J = \sum_{l=1}^k J_l$. Posons $\Psi = g_x''(\sigma)$ comme précédemment. Nous montrerons que $\ker\Psi = \mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}}$.

L'inclusion $\mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}} \subset \ker\Psi$ étant évidente, montrons l'inclusion inverse.

Soit $X \in \ker\Psi$. On sait (proposition 3.1) que $\ker\Psi$ a une base formée par

(i) les vecteurs $\tilde{r}_h^j$ où $1 \leq h \leq \delta$ et $J\tilde{c}_j = 0$,

(ii) les vecteurs $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma$ où $1 \leq i < j \leq r$, $1 \leq t \leq d$ et $J\tilde{c}_i = J\tilde{c}_j = 0$, et

(iii) les vecteurs $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^t)\sigma$ pour lesquels il existe $l \in \{1, ..., k\}$ tel que

$$J_l\tilde{c}_i = \epsilon_i\tilde{c}_i,\ J_l\tilde{c}_j = \epsilon_j\tilde{c}_j \text{ et } \epsilon_i\epsilon_j = -1.$$

Si X est du type (i) ou (ii), alors la relation (2) ci-dessus implique que $X \in \mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}}$.

Si X est du type (iii), alors il suffit de montrer qu'il existe une dérivation D de l'algèbre $V(C_l, 1)$ telle que le vecteur $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma$ soit égal à $\phi(DJ_l)\sigma_0$. En supposant que $\epsilon_i = 1$ et $\epsilon_j = -1$, on a

$$\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma = \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\sigma_0 = \phi(P(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\tilde{v}_{ij}^s)\sigma_0 = -\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma_0.$$

Soit D la dérivation de l'algèbre $V(C, 1)$ définie par $D = [L(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j), L(\tilde{v}_{ij}^s)]$.

Comme $DJ_l = -\tilde{v}_{ij}^s$, on a $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma = \phi(DJ_l)\sigma_0$. Comme $\dim\ker\Psi$ a une base formée de vecteurs de $\mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}}$, on a le résultat. ∎

Remarque. D'après la proposition 3.2. une variété critique $\Sigma_{\mathbf{m}}$ est dégénérée si et seulement si, $\operatorname{rg} g_x''(\sigma) = 0$, et d'après la proposition 3.1, il faut et il suffit que $\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon}, x) = \emptyset$ et $\delta = 0$. L'ensemble $\Xi_1(\boldsymbol{\epsilon}, x)$ est vide si $\operatorname{rg} V = 2$, $x = s(c_1 + c_2)$ avec $s > 0$ et $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ où $\epsilon_1\epsilon_2 = -1$. Une algèbre de Jordan euclidienne et simple de rang 2 est isomorphe à l'algèbre associée au cône de Lorentz ([6]). Une telle algèbre est de la forme $V = \mathbb{R} \times W$ où W est un espace euclidien de dimension q. En utilisant le théorème 3 de [2] on détermine les représentations régulières des algèbres de Jordan de rang 2 dont l'espace de la représentation E est tel que $\delta = 0$. Elles sont données par la liste (i) $q = 4$ et $\dim E = 8$, (ii) $q = 8$ et $\dim E = 16$, (iii) $q = 2$ et $\dim E = 4$. Mais $\dim V_{12} = q - 1$ et $\delta = 0$ et par conséquent $\dim \Sigma = q - 1$. Par conséquent toutes les variétés critiques de la fonction de phase g_x sont non dégénérées sauf celles qui apparaissent dans les cas cités plus haut.

Notons, pour $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)$, l'espace normal $\mathrm{N}(\sigma) = \mathrm{T}_\sigma\Sigma / \mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}}$ et

$$n_{\mathbf{m}} = \mathrm{dim}\mathrm{N}(\sigma) = \mathrm{dim}\mathrm{T}_\sigma\Sigma - \mathrm{dim}\mathrm{T}_\sigma\Sigma_{\mathbf{m}}.$$

Théorème 3.3. *Soit $x \in \mathcal{C}(\Delta)$ tel que pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)$ la variété critique $\Sigma_{\mathbf{m}}$ soit non dégénérée. Alors, la fonction de Bessel*

$$J(\tau^2 x^2) = \int_\Sigma \exp(-i\tau g_x(\sigma))\, d\sigma$$

admet quand $\tau \to \infty$ le développement asymptotique

$$J(\tau^2 x^2) \sim \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)} \exp(i\tau g_x(\sigma) + \frac{1}{4} i\pi \operatorname{sgn} g_x''(\sigma)) \sum_{l=0}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}n_{\mathbf{m}} - l} p_{\mathbf{m}l}$$

Le coefficient de plus haut degré $p_{\mathbf{m}0}$ est donné par

$$p_{\mathbf{m}0} = |\det(g_x''(\sigma)\mid_{\mathrm{N}(\sigma)})|^{-\frac{1}{2}} \int_{\Sigma_{\mathbf{m}}} d\sigma_{\mathbf{m}}$$

où $d\sigma_{\mathbf{m}}$ désigne la mesure riemannienne induite sur la sous-variété $\Sigma_{\mathbf{m}}$ de Σ.

Démonstration. Soient $A_1, \ldots, A_h$ les composantes connexes de $\Sigma_{\mathbf{m}}$. Pour $j \in \{1, \ldots, h\}$, on note

$$U_j := (\Sigma \setminus \Sigma_{\mathbf{m}}) \cup A_j,$$

qui est un voisinage ouvert de A_j dans Σ tel que $U_j \cap \Sigma_{\mathbf{m}} = A_j$. Les U_j forment un recouvrement ouvert de Σ. On considère une partition de l'unité $(a_j)_{1 \le j \le h}$ subordonnée à (U_j) et on applique le théorème de la phase stationnaire ([1], [3]) à la variété U_j, avec fonction de phase $g_x\mid_{U_j}$, et variété critique A_j. Ensuite, on prend la somme des h développements asymptotiques ainsi obtenus et on obtient le résultat. ∎

Remarque. La signification précise du développement asymptotique est que le reste d'ordre q, défini comme

$$R_q(\tau) := J(\tau^2 x^2) - \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}(x)} \exp(i\tau g_x(\sigma) + \frac{1}{4} i\pi \operatorname{sgn} g_x''(\sigma)) \sum_{l=0}^{\infty} \tau^{-\frac{1}{2}n_{\mathbf{m}} - l} p_{\mathbf{m}l},$$

vérifie

$$|R_q(\tau)| = O(\tau^{-\frac{1}{2}n_{\mathbf{m}} - q - 1}).$$

Proposition 3.4. *Soient $\phi: V \to \mathcal{H}(E)$ la représentation d'une algèbre de Jordan de rang deux où E est un espace euclidien tel que $\delta = 0$. Alors il existe $x \in \overline{\Omega}$ tel que la fonction de Bessel $J(\tau^2 x^2)$ tend vers une constante $c \neq 0$ quand $\tau \to \infty$.*

Démonstration. On sait que les composantes connexes $(\Sigma_j)_{1 \leq j \leq p}$ de Σ sont ouvertes et fermées. Soit $x = s(c_1 + c_2)$ où $s > 0$. Soit $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2)$ avec $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$. On considère la sous-variété $\Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}}$ de la variété critique Σ_x. D'après la proposition 2.3, $\Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}} = \phi(\mathcal{O}_{\boldsymbol{\epsilon}})\sigma_0$ et par conséquent est une sous-variété compacte et connexe de Σ. Il existe alors $j \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}} \subset \Sigma_j$, en particulier $\Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}}$ est un fermé de Σ_j. L'espace tangent $\mathrm{T}_\sigma \Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}}$ est égal à $\ker \Psi$ (proposition 3.2.), dont la dimension est égale à $q - 1$, d'où $\mathrm{T}_\sigma \Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}} = \mathrm{T}_\sigma \Sigma_j$ par conséquent $\Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}}$ est un ouvert de Σ_j d'où $\Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}} = \Sigma_j$. Pour $\sigma \in \Sigma_{x,\boldsymbol{\epsilon}}$ on a $g_x(\sigma) = \langle \phi(\epsilon_1 c_1 + \epsilon_2 c_2)\sigma_0, \sigma_0 \rangle_E = 0$ par conséquent la fonction de Bessel s'écrit

$$J(\tau^2 x^2) = \int_{\Sigma_j} d\sigma_j + \sum_{1 \leq l \neq j \leq p} \int_{\Sigma_l} \exp(-i\tau g_x(\sigma))\, d\sigma_l,$$

et d'après ce qui précède $J(\tau^2 x^2) \to c$ quand $\tau \to \infty$ où $c = \int_{\Sigma_j} d\sigma_j$. ∎

Remarque. Si S est une sous-variété analytique compacte d'un espace euclidien E dont aucune composante connexe n'est contenue dans un hyperplan affine de E, alors la transformée de Fourier de la mesure induite par la structure euclidienne sur S tend vers 0 à l'infini ([10], Theorem 2). D'après le théorème 3.3. et la proposition 3.4, les seuls cas où une composante connexe de la variété de Stiefel est contenue dans un hyperplan affine sont ceux qui sont cités dans la remarque qui suit la proposition 3.2.

4. Estimations uniformes pour la fonction de Bessel

Soit B la fonction K-invariante définie sur $\overline{\Omega}$ par

$$B(x) = \left(\sum_{\boldsymbol{\epsilon} \in \{1,-1\}^r} \prod_{\gamma \in \Xi_1} (1 + |\, \gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)\, |)^{-\frac{d}{2}} \right) \prod_{\gamma \in \Xi_2} (1 + |\, \gamma(x)\, |)^{-\frac{\delta}{2}}.$$

Théorème 4.1. *Il existe une constante positive C telle que pour tout $x \in \overline{\Omega}$,*

$$|J(x^2)| \leq C B(x).$$

Remarque. Les estimations ainsi obtenues sont *précises*, car, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et tout $\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1, 1\}^r$ fixé, le développement asymptotique de $J(\tau^2 x^2)$ quand $\tau \to \infty$ obtenu au théorème 3.3 est équivalent, modulo des facteurs constants, au terme correspondant de $B(x)$.

La démonstration du théorème 4.1 occupe tout ce paragraphe. On commence par une réduction du problème. La K-invariance de la fonction $J(x^2)$

(proposition 1.6.), nous permet de supposer que x appartient à une chambre de Weyl $\mathcal{C}(\Delta)$ de V, qu'on fixe.

Nous allons démontrer le théorème en utilisant les résultats de [5] sur les intégrales oscillantes dépendant d'un paramètre. Plus précisement on appliquera à la fonction de Bessel la proposition suivante qui est une conséquence directe de ([5], Proposition 12.2., Corollary 12.3.).

Proposition 4.2. *Soit X une variété compacte de classe $\mathcal{C}^\infty$ de dimension d. On suppose qu'elle est munie d'une densité positive dx de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit Θ une variété différentielle. Pour chaque $\theta \in \Theta$ on considère la fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^\infty$*

$$\mathbf{g}_\theta = (g_{1,\theta}, \ldots, g_{s,\theta}) \colon X \to \mathbb{R}^s$$

Pour $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_s) \in \mathbb{R}^s$, on note $\boldsymbol{\tau}\mathbf{g}_\theta(x) = \sum_{j=1}^s \tau_j g_{j,\theta}(x)$ et on considère l'intégrale oscillante

$$I(\mathbf{g}_\theta, \boldsymbol{\tau}) := \int_X \exp(-i\boldsymbol{\tau}\mathbf{g}_\theta(x))\, dx.$$

On considére la partie Θ_0 compacte de Θ. On fait les hypothèses suivantes:
1. *Il existe une filtration*

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \ldots \supset X_s \supset X_{s+1} = \emptyset$$

de X par des sous-variétés compactes, chacune munie d'une densité positive, et un ensemble fini P d'indices satisfaisant les conditions:
(i) *Pour tout $p \in P$ et tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, $X_{i,p}$ est une sous-variété compacte de X de dimension pure $d_{i,p}$, munie d'une densité positive de classe $\mathcal{C}^\infty$.*
(ii) *Pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, X_i est une réunion disjointe des $X_{i,p}$:*

$$X_i = \cup_{p \in P(i)} X_{i,p}$$

où $P(i)$ est une partie de P dépendant de i.
(iii) *Pour tout $p \in P$ fixé, on a la filtration*

$$X = X_{0,p} \supset X_{1,p} \supset \ldots \supset X_{s,p} \supset X_{s+1,p} = \emptyset$$

2. *Pour tout $i \in \{0, \ldots, s-1\}$, X_{i+1} est la variété critique non dégénérée de la fonction $g_{i+1,\theta}\,|_{X_i}$.*
3. *Pour tout $i \in \{0, \ldots, s-1\}$, on considère le fibré tangent $\mathrm{T}X_{i+1}$ comme un sous-fibré vectoriel de $(\mathrm{T}X_i)\,|_{X_{i+1}}$. On suppose qu'il existe un sous-fibré N_{i+1} de $(\mathrm{T}X_i)\,|_{X_{i+1}}$ tel que*
(a) $(\mathrm{T}X_i)|_{X_{i+1}} = \mathrm{T}X_{i+1} \oplus N_{i+1}$ et
(b) *pour tout $j > i+1$, $dg_{j,\theta}\,|_{N_{i+1}} = 0$.*

On fixe une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ croissante $l \colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$l(\tau) = \begin{cases} 1 & si\ \tau \leq 1 \\ \tau & si\ \tau \geq 2 \end{cases}$$

Alors il existe une constante $C > 0$ et un réel $\eta \geq 1$ suffisament grand tel que pour tout $\theta \in \Theta_0$ et tout $\boldsymbol{\tau}$ qui vérifie $\tau_1 \geq \eta\tau_2 \geq \ldots \geq \eta^{s-1}\tau_s \geq 0$, on ait

$$|I(\mathbf{g}_\theta,\ \tau)| \leq C \sum_{p\in P} \prod_{j=1}^{s} l(\tau_j)^{-\frac{d_{j,p}-d_{j+1,p}}{2}}.$$

Nous allons maintenant montrer que la fonction de Bessel $J(x^2)$ est une intégrale oscillante dépendant d'un paramètre qui appartient à la chambre de Weyl ouverte $\mathcal{C}(\Delta)^\circ$. Pour cela à chaque partition ordonnée de Δ on associera une partie conique de $\mathcal{C}(\Delta)$. Plus précisement soit Π l'ensemble des partitions ordonnées de l'ensemble Δ des racines de V. Un élément de Π aura la forme $\pi = (S_1, \ldots, S_s)$ où chaque S_l est une partie non vide de Δ et

$$\Delta = \cup_{1\leq l\leq s}\ S_l.$$

Pour $x \in \mathcal{C}(\Delta)$ et $\pi = (S_1, \ldots, S_s) \in \Pi$, et pour chaque $l \in \{1, \ldots, s\}$, on définit la S_l-*composante* de x comme étant

$$S_l[x] = \sum_{\alpha\in S_l} \alpha(x)\alpha^*,$$

et, si $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_s) \in \mathbb{R}^s$, on pose

$$(\boldsymbol{\tau}\ x)_\pi := \sum_{l=1}^{s} \tau_l S_l[x].$$

Pour $\mu \geq 1$, on considère la partie compacte $P(\mu)$ de la chambre de Weyl ouverte $\mathcal{C}(\Delta)^\circ$

$$P(\mu) = \{x \in \mathcal{C}(\Delta)^\circ\ \mid \text{ pour tout } \alpha \in \Delta,\ \frac{1}{\mu} \leq \alpha(x) \leq 1\}.$$

Pour tout $\eta \geq 1$, on définit l'ensemble

$$P(\pi, \mu, \eta) = \{x = (\boldsymbol{\tau}\ x')_\pi\ \mid\ x' \in P(\mu) \text{ et } \tau_1 \geq \eta\tau_2 \geq \ldots \geq \eta^{s-1}\tau_s \geq 0\}.$$

D'après ([5], Lemma 11.5 et la relation 11.24, p.376) la chambre de Weyl est une réunion finie d'ensembles de la forme $P(\pi, \mu, \eta)$. Par conséquent pour un élément x de $\mathcal{C}(\Delta)$ on peut supposer $x \in P(\pi, \mu, \eta)$. La fonction de phase $g_x(\sigma)$ de $J(x^2)$ s'écrit alors

$$g_x(\sigma) = \langle\sigma, \phi(x)\sigma_0\rangle_E = \sum_{j=1}^{s} \tau_j g_{j,x'}(\sigma),$$

où

$$g_{j,x'}(\sigma) = \langle\sigma, \phi(S_j[x'])\sigma_0\rangle_E.$$

La fonction $J(x^2)$ avec les notations de la proposition 4.2 s'écrit

$$J(x^2) = \int_\Sigma \exp(-i\boldsymbol{\tau}\mathbf{g}(\sigma))\, d\sigma = I(\mathbf{g}_{x'}, \boldsymbol{\tau})$$

où $\mathbf{g}_{x'}$ est la fonction vectorielle $\mathbf{g}_{x'} = (g_{1,x'}, \ldots, g_{s,x'}) \colon \Sigma \to \mathbb{R}^s$ c'est-à-dire l'intégrale oscillante associée à la fonction $\mathbf{g}_{x'}$.

Nous allons définir une filtration de la variété de Stiefel Σ qui vérifie les hypothèses de la proposition 4.2. Compte tenu de l'hypothèse 1. (ii) de la proposition 4.2, et les fonctions de la phase $g_{j,x'}$ pour $j \in \{1, \ldots, s\}$, les éléments de la filtration seront les sous-variétés critiques décrites à la proposition 2.3, qui dépendent de la donnée d'une partition ordonnée $\pi \in \Pi$. Pour les définir nous aurons besoin d'introduire quelques notations.

Soit $\pi = (S_1, \ldots, S_s) \in \Pi$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, s\}$, on note

$$\tilde{S}_j := S_1 \cup \ldots \cup S_j \quad \text{et} \quad k(j) := \operatorname{Card} \tilde{S}_j$$

ce qui implique évidemment que $k(s) = \operatorname{Card}\Delta = r$.

On considère l'ensemble des idempotents $\alpha^* \in A$ tels que $\alpha \in \tilde{S}_j$. On ordonne ces éléments selon l'ordre croissant de leur rang:

$$\{\alpha^* \in A \mid \alpha \in \tilde{S}_j\} = \{\alpha^*_{1,j}, \ldots, \alpha^*_{k(j),j}\} \; r_{1,j} < \ldots < r_{k(j),j} \quad \text{où} \quad r_{i,j} := \operatorname{rg} \alpha^*_{i,j}.$$

Ensuite on pose, pour $1 \le i \le k$, $C_{i,j} := \alpha^*_{i,j} - \alpha^*_{i-1,j}$ en convenant que $\alpha^*_{0,j} = 0$ (et donc $r_{0,j} = 0$). Les idempotents $C_{i,j}$ s'expriment aussi en fonction du s.c.i.p.o. (c_l) qu'on a fixé: $C_{i,j} = \sum_{l=r_{i-1,j}+1}^{r_{i,j}} c_l$. Notons e_j l'idempotent

$$e_j = \sum_{i=1}^{k(j)} C_{i,j}.$$

Soit alors $\mathbf{m}_j = (m_{1,j}, \ldots, m_{k(j),j}) \in \mathbf{M}_j := \prod_{i=1}^{k(j)} \{0, \ldots, r_{i,j} - r_{i-1,j}\}$ un $k(j)$-uplet d'entiers vérifiant les inégalités $0 \le m_{i,j} \le r_{i,j} - r_{i-1,j}$. On lui associe l'élément involutif de l'algèbre $V(e_j, 1)$

$$W_{j,\mathbf{m}_j} := \sum_{i=1}^{k(j)} W_{i,j,\mathbf{m}_j},$$

où

$$W_{i,j,\mathbf{m}_j} := \sum_{l=r_{i-1,j}+1}^{r_{i-1,j}+m_{i,j}} c_l - \sum_{l=r_{i-1,j}+m_{i,j}+1}^{r_{i,j}} c_l$$

est un élément involutif de $V(C_{i,j}, 1)$.

Soit $K_{i,j}$ la composante connexe de l'identité du groupe $\operatorname{Aut}(V(C_{i,j}, 1))$ des automorphismes de l'algèbre de Jordan $V(C_{i,j}, 1)$. Soit $\mathcal{O}_{i,j,\mathbf{m}_j}$ l'orbite de $W_{j,\mathbf{m}_j}$ sous l'action de $K_{i,j}$. Un élément involutif $J_{i,j}$ de $\mathcal{O}_{i,j,\mathbf{m}_j}$ sera de la forme

$$J_{i,j} = \sum_{l=r_{i-1,j}+1}^{r_{i,j}} \epsilon_l c'_l,$$

où $\epsilon_l \in \{-1, 1\}$, m_j est le nombre d'indices l pour lesquels $\epsilon_l = 1$ et (c'_l) est un s.c.i.p.o. de $V(C_{i,j}, 1)$.

Un élément involutif J de $V(e_j,1)$ sera dit *compatible à* π s'il a la forme $J_j = \sum_{i=1}^{k(j)} J_{i,j}$ où J_i est un élément involutif de $V(C_{i,j},1)$. On note $\mathcal{J}_j(\pi)$ l'ensemble de ces éléments J. Le groupe produit $\Gamma_j := \prod_{i=1}^{k(j)} K_{i,j}$ opère naturellement sur $\mathcal{J}_j(\pi)$. Soit $\mathcal{O}_{j,\mathbf{m}_j}$ l'orbite de $W_{j,\mathbf{m}}$ sous l'action de Γ_j. Les éléments de $\mathcal{O}_{j,\mathbf{m}_j}$ sont de la forme $J_j = \sum_{i=1}^{k(j)} J_{i,j}$ où chaque $J_{i,j}$ appartient à $\mathcal{O}_{i,j,\mathbf{m}_j}$.

On fixe maintenant une partition $\pi = (S_1,\dots,S_s) \in \Pi$. Pour chaque $j \in \{1,\dots,s\}$, pour chaque $\mathbf{m}_j \in \mathbf{M}_j$, on définit la sous-variété $\Sigma_{j,\mathbf{m}_j}$ de Σ par

$$\Sigma_{j,\mathbf{m}_j} := \{\sigma \in \Sigma \mid \phi(\sum_{i=1}^{k(j)} C_{i,j})\sigma \in \phi(\mathcal{O}_{j,\mathbf{m}_j})\sigma_0\},$$

en convenant que $\Sigma_{0,\mathbf{m}_0} = \Sigma$ et $\Sigma_{j,\mathbf{m}_j} = \emptyset$ pour $j > s$. Soit maintenant $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_r) \in \{-1,1\}^r$. On lui associe l'élément involutif $J_{\boldsymbol{\epsilon}} = \sum_{l=1}^{r} \epsilon_l c_l$ ce qui nous permet de définir $\boldsymbol{\epsilon} C_{i,j} = J_{\boldsymbol{\epsilon}} C_{i,j}$.

Soit alors $m_{i,j}(\boldsymbol{\epsilon})$ la multiplicité de la valeur propre 1 de $\boldsymbol{\epsilon} C_{i,j}$. C'est aussi le nombre d'indices l tels que $r_{i-1,j} < j \le r_{i,j}$ et $\epsilon_l = 1$. Il nous permet de poser

$$\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon}) := (m_{1,j}(\boldsymbol{\epsilon}),\dots,m_{k(j),j}(\boldsymbol{\epsilon})) \in \mathbf{M}_j \quad \text{et} \quad \Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}} := \Sigma_{j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})}.$$

Proposition 4.3. *Soient $\pi = (S_1,\dots,S_s) \in \Pi$ et $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1,\dots,\epsilon_r) \in \{-1,1\}^r$. Pour chaque j tel que $1 \le j \le s$, la sous-variété $\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$ de Σ est compacte et de dimension pure. On a les inclusions $\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}} \subset \Sigma_{j-1,\boldsymbol{\epsilon}}$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.3, $\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$ est une sous-variété compacte de Σ. La proposition 3.2 montre qu'elle est de dimension pure. Soit $\sigma \in \Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$. Il faut montrer que

$$(*) \qquad \phi(\sum_{i=1}^{k(j-1)} C_{i,j-1})\sigma \in \phi(\mathcal{O}_{j-1,\mathbf{m}_{j-1}(\boldsymbol{\epsilon})})\sigma_0.$$

Soient $r_j = \min \operatorname{rg} \beta^*$, et $R_j = \max \operatorname{rg} \beta^*$, où $\beta \in \tilde{S}_j$. Dans un premier temps, on suppose que S_j ne contient qu'une racine, soit α. Ainsi $\tilde{S}_j = \tilde{S}_{j-1} \cup \{\alpha\}$. On distingue trois cas:

Premier cas: $\operatorname{rg} \alpha^* < r_j$. Soit β l'unique élément de $\tilde{S}_j$ tel que $\operatorname{rg} \beta^* = r_j$. L'hypothèse $\sigma \in \Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$ implique alors

$$\phi(\sum_{i=1}^{k(j)} C_{i,j})\sigma \in \phi(\mathcal{O}_{j,\mathbf{m}_j}(\boldsymbol{\epsilon}))\sigma_0.$$

Compte tenu de l'hypothèse $\operatorname{rg} \alpha^* < r_j$, on a $\alpha^* = C_{l,j}$ et $\beta^* - \alpha^* = C_{l+1,j}$. Il est clair par ailleurs que $C_{l,j} + C_{l+1,j} = \beta^* = C_{l,j-1}$. Par définition même des $m_{i,j}$, la multiplicité de la valeur propre 1 de l'involutif $W_{l,j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})}$ est $m_{l,j} + m_{l+1,j} = m_{l,j-1}$. Donc $W_{l,j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})} + W_{l+1,j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})} \in \mathcal{O}_{l,j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})}$. Comme $K_{l,j} \times K_{l+1,j}$ est un sous-groupe de $K_{l,j-1}$, et comme, par hypothèse, $\tilde{S}_j = \tilde{S}_{j-1} \cup \{a\}$, on a $(*)$.

Second cas: $r_j < \mathrm{rg}\alpha^* < R_j$. Soient β et β_1 les deux racines appartenant à $\tilde{S}_{j-1}$ dont les rangs sont consécutifs et telles que $\beta^* < \alpha^* < \beta_1^*$. L'hypothèse $\sigma \in \Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$ implique que σ s'écrit sous la forme $\sigma = \phi(J)\sigma_0 + \phi(e-e_j)\sigma$ pour un élément involutif J de $V(e_j,1)$ appartenant à $\mathcal{O}_{j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})}$.
Soit l l'indice $(1 \leq l \leq k(j))$ tel que $C_{l,j-1} = \beta_1^* - \beta^*$. L'idempotent $C_{l,j-1}$ se décompose en $C_{l,j-1} = C_{l,j} + C_{l+1,j}$ où $C_{l,j} = \alpha^* - \beta^*$ et $C_{l+1,j} = \beta_1^* - \alpha^*$ la multiplicité de la valeur propre 1 de l'élément involutif $W_{l,j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})}$ est $m_{l,j-1} = m_{l,j} + m_{l+1,j}$. Donc $W_{l,j} + W_{l+1,j} \in \mathcal{O}_{l,j,\mathbf{m}_j(\boldsymbol{\epsilon})}$. Il est clair que $K_{l,j} \times K_{l+1,j}$ est un sous-groupe de $K_{l,j-1}$. Par conséquent σ vérifie $(*)$.
Troisième cas: $\mathrm{rg}\,\alpha^* > R_j$ L'hypothèse $\sigma \in \Sigma_{j,\mathbf{m}}$ implique que σ a la forme $\sigma = \phi(J)\sigma_0 + \phi(e-e_j)\sigma$ pour un élément involutif $J \in \mathcal{O}_{j,\mathbf{m}}$. Comme les algèbres $V(C_{i,j},1)$ sont orthogonales

$$\left(\sum_{i=1}^{k(j-1)} C_{i,j-1}\right)J = J' \in \mathcal{O}_{j-1,\mathbf{m}_{j-1}(\boldsymbol{\epsilon})} \quad \text{et} \quad \left(\sum_{i=1}^{k(j-1)} C_{i,j-1}\right)(e-e_j) = 0$$

et par conséquent

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{k(j-1)} C_{i,j-1}\right)\sigma = \phi(J')\sigma_0$$

ce qui montre $(*)$ dans le troisième cas aussi.

Si S_j contient plusieurs racines, on raisonne de proche en proche en combinant les trois cas précédents, et on obtient le résultat. ∎

Pour $1 \leq j \leq s$, on considère la sous-variété réunion disjointe des $\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$

$$\Sigma_j := \cup_{\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r} \Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$$

de la variété de Stiefel, ce qui d'après la proposition 4.3, nous donne bien une filtration

$$\Sigma = \Sigma_0 \supset \Sigma_1 \supset \ldots \supset \Sigma_s \supset \Sigma_{s+1} = \emptyset.$$

Proposition 4.4. *Pour $0 \leq j \leq s$, l'ensemble critique de la restriction de la fonction $g_{j+1,x'}$ à Σ_j est la sous-variété Σ_{j+1}.*

Démonstration. Soit $\Sigma' = \{\sigma \in \Sigma \mid g'_{j+1,x'}(\sigma) = 0\}$ l'ensemble critique de la fonction $g_{j+1,x'}$. Il faut alors montrer que $\Sigma' \cap \Sigma_j = \Sigma_{j+1}$. On suppose que S_{j+1} ne contient qu'une racine, qu'on note α. Si $\sigma \in \Sigma' \cap \Sigma_j$, d'après le lemme 2.2, et la définition de Σ_j, σ vérifie les deux conditions

$$\sigma = \phi(J)\sigma_0 + \phi(e-\alpha^*)\sigma \quad \text{avec} \quad J^2 = \alpha^*\sigma = \phi(J_i)\sigma_0 + \phi(e-e_j)\sigma.$$

Avec les notations de la proposition 4.3 on distingue trois cas:
Premier cas: $\mathrm{rg}\,\alpha^* < r_j$. Alors on a $\phi(C_{1,j})\sigma = \phi(J_{1,j})\sigma_0$ avec $J_{1,j}^2 = C_{1,j}$ et

$$\phi(C_{1,j})\sigma = \phi(\alpha^*)\sigma + \phi(C_1 - \alpha^*)\sigma = \phi(J)\sigma_0 + \phi(C_1 - \alpha^*)\sigma$$

il vient donc

$$\phi(J_{1,j}-J)\sigma_0=\phi(C_{1,j}-\alpha^*)\sigma.$$

On calcule $Q(\phi(J_{1,j}-J)\sigma_0)=Q(\phi(C_{1,j}-\alpha^*)\sigma)$ ce qui implique que $J_{1,j}-J$ est un élément involutif de l'algèbre $V(C_{1,j}-\alpha^*,1)$, et par conséquent $\sigma\in\Sigma_{j+1}$.
Second cas: $r_j<\mathrm{rg}\,\alpha^*<R_j$. Soient β et β_1 les deux racines appartenant à $\tilde{S}_j$ dont les rangs sont consécutifs et telles que $\mathrm{rg}\,\beta^*<\mathrm{rg}\,\alpha^*<\mathrm{rg}\,\beta_1^*$. Soit l l'indice $(1\le l\le k(j))$ tel que $C_{l,j}=\beta_1^*-\beta^*$. On a alors $\phi(C_{l,j})\sigma=\phi(J_{l,j})\sigma_0$ avec $J_{l,j}^2=C_{l,j}$ et $\phi(\alpha^*)\sigma=\phi(J)\sigma_0=\phi(\beta^*)\sigma_0+\phi(\alpha^*-\beta^*)\sigma$ et comme $\phi(\beta^*)\sigma=\phi(J')\sigma_0$ on montre comme dans le premier cas que $J''=J-J'$ est un élément involutif de l'algèbre $V(\alpha^*-\beta^*,1)$. Mais $\phi(\beta_1^*-\beta^*)\sigma=\phi(\beta_1^*-\alpha^*)\sigma+\phi(\alpha^*-\beta^*)\sigma$ ce qui implique que $\phi(\beta_1^*-\alpha^*)\sigma=\phi(J_{l,j}-J'')\sigma_0$ donc $J_{l,j}-J''$ est un élément involutif de l'algèbre $V(\beta_1^*-\alpha^*,1)$ et par conséquent $\sigma\in\Sigma_{j+1}$.
Troisième cas: $\mathrm{rg}\,\alpha^*>R_j$. Alors $\phi(\alpha^*)\sigma\phi(J)\sigma_0=\phi(\alpha^*-e_j)\sigma+\phi(e_j)\sigma$, donc $\phi(\alpha^*-e_j)\sigma=\phi(J-J_j)\sigma_0$, ce qui implique que $J-J_j$ est un élément involutif de l'algèbre $V(\alpha^*-e_j,1)$ et par conséquent $\sigma\in\Sigma_{j+1}$. Si S_{j+1} contient plusieurs racines, on raisonne de proche en proche en combinant les trois cas précédents, d'où l'inclusion $\Sigma'\cap\Sigma_j\subset\Sigma_{j+1}$.

Réciproquement soit $\sigma\in\Sigma_{j+1}$. Compte tenu de la proposition 4.3 il suffit de montrer que $\sigma\in\Sigma'$. On peut supposer que $\sigma\in\Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$. Soit $\alpha\in S_{j+1}$ la racine telle que $\mathrm{rg}\,\alpha^*=\max\mathrm{rg}\,\beta^*$ où $\beta\in S_{j+1}$. Il suffit de montrer qu'il existe $y\in V(\alpha^*,1)$ tel que $\phi(S_{j+1}[x'])\sigma_0=\phi(y)\sigma$. Mais, comme $\sigma\in\Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$, il existe un élément involutif $J_{j+1}\in\mathcal{O}_{j+1,\mathbf{m}_{j+1}}$ tel que l'on ait $\sigma=\phi(J_{j+1})\sigma_0+\phi(e-e_{j+1})\sigma$. Cet élément vérifie $J_{j+1}=\sum_{i=1}^{k(j+1)}J_{i,j+1}$ avec $J_{i,j+1}^2=C_{i,j+1}$ et $J_{i,j+1}J_{i',j+1}=0$ pour $i\neq i'$. Soit $S_{j+1}=\{\alpha_{1,j+1},\dots,\alpha_{p,j+1}\}$ avec, pour tout $i\in\{1,\dots,p-1\}$, $\mathrm{rg}\,\alpha_{i,j+1}^*<\mathrm{rg}\,\alpha_{i+1,j+1}^*$. Alors

$$S_{j+1}[x']=\sum_{i=1}^{p}\alpha_{i,j+1}(x')\alpha_{i,j+1}^*=\sum_{l=1}^{p}\beta_{l,j+1}(x')(\alpha_{l,j+1}^*-\alpha_{l-1,j+1}^*)$$

où $\beta_{l,j+1}:=\sum_{i=j}^{p}\alpha_{i,j+1}$.

On considère les éléments J_l' de $V(\alpha^*,1)$ définis par $J_l':=\alpha_{l,j+1}^*J_{j+1}$ pour $1\le l\le p$. Il est clair alors que $J_l'^2=\alpha_{l,j+1}^*$. En effet, il existe un indice $s\in\{1,\dots,k(j+1)\}$ tel que $\alpha_{l,j+1}^*=\sum_{i=1}^{s}C_{i,j+1}$, donc

$$J_l'=\alpha_{l,j+1}^*J_{j+1}=(\sum_{i=1}^{s}C_{i,j+1})(\sum_{i=1}^{k(j+1)}J_{i,j+1})=\sum_{i=1}^{s}J_{i,j+1}=J_l',$$

et

$$J_l'^2=\sum_{i=1}^{s}J_{i,j+1}^2=\sum_{i=1}^{s}C_{i,j+1}=\alpha_{l,j+1}^*.$$

Soit y l'élément de $V(\alpha^*,1)$ défini par $y=\sum_{l=1}^{p}\beta_{l,j+1}(x')J_{l,j+1}$. On a donc

$$\begin{aligned}\phi(y)\sigma=\phi(y)\phi(J_{j+1})\sigma_0&=\phi(yJ_{j+1})\sigma_0\\&=\phi(\sum_{l=1}^{p}\beta_{l,j+1}(x')J_{l,j+1}^2)\sigma_0=\phi(S_{j+1}[x'])\sigma_0,\end{aligned}$$

et par conséquent $\sigma\in\Sigma'\cap\Sigma_j$, d'où le résultat. ∎

Soient $G_{j,x'}$ les fonctions définies sur la variété de Stiefel par

$$G_{j,x'}(\sigma) = \langle \phi(\tilde{S}_j[x'])\sigma, \sigma_0 \rangle_E.$$

pour $0 \leq j \leq s$. D'après la proposition 2.3, l'ensemble critique de $G_{j,x'}$ est Σ_j.

Proposition 4.5. *Pour tout $j \in \{0, \dots, s-1\}$, le hessien $g''_{j+1,x'}(\sigma)$ de la restriction de la fonction $g_{j+1,x'}$ à $\Sigma_{j,\epsilon}$ est non-dégénéré sur l'espace normal*

$$\mathrm{N}_{j+1,\epsilon} := \mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j,\epsilon} / \mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j+1,\epsilon}.$$

Démonstration. Pour chaque $j \in \{0, \dots, s-1\}$, on considère l'élément

$$y_j = \sum_{i=1}^{k(j)} \beta_{i,j}(\tilde{S}_j[x'])J_{i,j}$$

de sorte que, pour $X \in \mathrm{T}_\sigma \Sigma$,

$$G''_{j,x'}(\sigma)(X, X) = -\langle \phi(y_j)X, X \rangle_E. \tag{1}$$

On utilisera aussi cette relation avec $j+1$ à la place de j. Il s'ensuit que

$$G''_{j,x'}(\sigma)(X, X) - G''_{j-1,x'}(\sigma)(X, X) = \langle \phi(y_j - y_{j+1})X, X \rangle_E \tag{2}$$

et, par polarisation,

$$G''_{j,x'}(\sigma)(X, Y) - G''_{j+1,x'}(\sigma)(X, Y) = \langle \phi(y_j - y_{j+1})X, Y \rangle_E. \tag{3}$$

On considère maintenant la restriction de la forme bilinéaire définie par (3) à l'espace tangent $\mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j,\epsilon}$. D'après la proposition 3.2, $\ker G''_{j,x'}(\sigma) = \mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j,\epsilon}$, et par conséquent (3) implique

$$G''_{j+1,x'}(\sigma)(X, Y) = \langle \phi(y_j - y_{j+1})X, Y \rangle_E. \tag{4}$$

pour $X, Y \in \mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j,\epsilon}$. Et comme y_j et y_{j+1} sont tels que $\phi(y_j)\sigma = \phi(\tilde{S}_j[x'])\sigma_0$ et $\phi(y_{j+1})\sigma = \phi(\tilde{S}_{j+1}[x'])\sigma_0$, on a

$$\phi(y_j - y_{j+1})\sigma = \phi(\tilde{S}_{j+1}[x'])\sigma_0 \tag{5}$$

ce qui montre que σ est un point critique de la restriction de $g_{j+1,x'}$ à $\Sigma_{j,\epsilon}$ (proposition 4.4), et par conséquent on a l'égalité

$$G''_{j+1,x'}(\sigma)(X, Y) = g''_{j+1,x'}(\sigma)(X, Y) \quad X, Y \in \mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j,\epsilon}. \tag{6}$$

Donc pour montrer que $g''_{j+1,x'}(\sigma)$ est une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace normal $\mathrm{N}_{j+1,\epsilon} := \mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j,\epsilon} / \mathrm{T}_\sigma \Sigma_{j+1,\epsilon}$, il suffit de montrer que $G''_{j+1,x'}(\sigma)$ est non dégénérée sur ce même espace.

On considère l'élément involutif $J_{j,\epsilon} = \sum_{i=1}^{k(j)} J_{i,j}$ avec la convention $J_{0,\epsilon} = 0$. D'après la proposition 3.1, une base standard $\mathcal{B}$ de $\mathrm{T}_\sigma\Sigma$ est orthonormée pour le produit scalaire de E et orthogonale pour $G''_{j+1,x'}(\sigma)$. Une base de $\mathrm{N}_{j+1,\epsilon}$ est formée par les vecteurs des trois types suivants de la base $\mathcal{B}$:
(i) les vecteurs $\tilde{r}^i_h$ où $1 \leq h \leq \delta$, $\tilde{c}_i J_{j,\epsilon} = 0$ et $\tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} \neq 0$,
(ii) les vecteurs $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma$ où $1 \leq i < l \leq r$, $1 \leq s \leq d$ et $\tilde{c}_i J_{j,\epsilon} = \tilde{c}_l J_{j,\epsilon} = 0 = \tilde{c}_l J_{j+1,\epsilon} = 0$, et $\tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} \neq 0$ et
(iii) les vecteurs les $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}^s_{ij})\sigma$ pour lesquels il existe:
(a) un indice $l \in \{1, \dots, k(j)\}$ tel que $\tilde{c}_i J_{l,j} = \epsilon_i \tilde{c}_i$, $\tilde{c}_i J_{l,j} = \epsilon_j \tilde{c}_j$, $\epsilon_i \epsilon_j = -1$,
(b) deux indices $p, q \in \{1, \dots, k(j+1)\}$ tels que

$$\tilde{c}_i J_{p,j+1} = \epsilon_i \tilde{c}_i \text{ et } \tilde{c}_j J_{q,j+1} = \epsilon_j \tilde{c}_j .$$

(les vecteurs (i) et (ii) apparaissent si et seulement si $\operatorname{rg} e_j < \operatorname{rg} e_{j+1}$ et $\delta \neq 0$). La matrice de $G''_{j+1,x'}(\sigma)$ par rapport à cette base étant diagonale, il suffit d'en calculer les éléments diagonaux. Les calculs sont analogues à ceux faits dans la preuve de la proposition 3.1,

$$\begin{aligned} G''_{j+1,x'}(\sigma)(\tilde{r}^i_h, \tilde{r}^i_h) &= -\langle \phi(y_{j+1}\tilde{r}^i_h, \tilde{r}^i_h\rangle_E = - \langle \phi(y_{j+1}), Q(\tilde{r}^i_h)\rangle_E \\ &= - \langle y_{j+1}, \tilde{c}_i\rangle_V = \epsilon_i \beta_i(\tilde{S}_{j+1}[x']) \end{aligned} \tag{7}$$

qui est non nul car $\tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} \neq 0$.

Pour les vecteurs du type (ii), on a

$$\begin{aligned} &G''_{j+1,x'}(\sigma)(\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma, \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma) \\ &= - \langle y_{j+1}, Q(\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma)\rangle_V \\ &= - \frac{1}{2}\langle y_{j+1}, \tilde{c}_i + \tilde{c}_l\rangle_V = -\frac{1}{2}\epsilon_i \beta_{i,j+1}(\tilde{S}_{j+1}[x']) \end{aligned} \tag{8}$$

qui est non nul car $\tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} \neq 0$.

Pour les vecteurs du type (iii), on a

$$\begin{aligned} &G''_{j+1,x'}(\sigma)(\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma, \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma) \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_i \beta_{q,j+1}(\tilde{S}_{j+1}[x']) - \frac{1}{2}\epsilon_l \beta_{p,j+1}(\tilde{S}_{j+1}[x']) \end{aligned} \tag{9}$$

qui est non nul car $\beta_{q,j+1}(\tilde{S}_{j+1}[x']) \neq \beta_{p,j+1}(\tilde{S}_{j+1}[x'])$.

Donc $G''_{j+1,x'}(\sigma)$ est non dégénérée, puisque sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale avec tous ses éléments diagonaux non nuls. ∎

Remarque. Les relations (7), (8) et (9) ci-dessus nous permettent, connaissant une partition $\pi \in \Pi$ et un élément x' de $\mathcal{C}(\Delta)^\circ$, d'exprimer la dimension de l'espace normal $\mathrm{N}_{j,\epsilon}(\sigma)$ en fonction des racines de V. Pour cela, considérons l'élément $\tilde{S}_j[x'] = \sum_{i=1}^{k(j)} S_l[x']$ de $\mathcal{C}(\Delta)$, dont la décomposition spectrale est

$$\tilde{S}_j[x'] = \sum_{i=1}^{k(j)} \beta_{i,j}(\tilde{S}_j[x'])C_{i,j}.$$

Les racines $\beta_{i,j}$ appartiennent à Ξ_2 et les $\beta_{i,j}(\tilde{S}_j[x'])$ sont les valeurs propres strictement positives et distinctes de $\tilde{S}_j[x']$. Pour $\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r$, on note comme précédemment

$$\boldsymbol{\epsilon}\tilde{S}_j[x'] = \sum_{i=1}^{k(j)} \beta_{i,j}(\tilde{S}_j[x'])J_{i,j,\boldsymbol{\epsilon}},$$

où pour tout $i \in \{1,\dots,k(j)\}$, $J_{i,j,\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\epsilon}C_{i,j} = \sum_{l=r_{i-1,j}+1}^{r_{i,j}} \epsilon_l c_l$ avec $r_{i,j} = \operatorname{rg}\sum_{p=1}^{j} C_{p,j}$. Posons

$$\Xi_1'(\boldsymbol{\epsilon},\tilde{S}_j[x']) := \{\gamma \in \Xi_1 | \gamma(\boldsymbol{\epsilon}\tilde{S}_j[x']) \neq 0 \text{ et } \gamma(\boldsymbol{\epsilon}\tilde{S}_{j-1}[x']) = 0\},$$

$$\Xi_2'(\boldsymbol{\epsilon},\tilde{S}_j[x']) := \{\gamma \in \Xi_2 | \gamma(\boldsymbol{\epsilon}\tilde{S}_j[x']) \neq 0 \text{ et } \gamma(\boldsymbol{\epsilon}\tilde{S}_{j-1}[x']) = 0\}.$$

Soient $\nu_j = \operatorname{Card}\Xi_1'(\boldsymbol{\epsilon},\tilde{S}_j[x'])$ et $\mu_j = \operatorname{Card}\Xi_2'(\boldsymbol{\epsilon},\tilde{S}_j[x'])$. Le nombre μ_j s'exprime aussi par $\mu_j = r_{i,j} - r_{i+1,j+1}$. Alors, la dimension du sous-espace vectoriel N_1 de $N_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$ engendré par les vecteurs du type (i) est égale à $\delta\mu_{j+1}$. La dimension du sous-espace vectoriel N_2 de $N_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$ engendré par les vecteurs du type (ii) et (iii) est égale à $d\nu_{j+1}$. Comme $N_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}} = N_1 \oplus N_2$,

$$(*) \qquad \dim N_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}} = \delta\mu_{j+1} + d\nu_{j+1}.$$

Enfin on remarque que, pour $x' \in \mathcal{C}(\Delta)^\circ$ et pour $\pi \in \Pi$ fixée, les nombres μ_{j+1} et ν_{j+1} ne dépendent que des multiplicités des valeurs propres de $\tilde{S}_j[x']$, $\tilde{S}_{j+1}[x']$ et $J_{\boldsymbol{\epsilon}}$. On considère l'injection canonique $i_{j+1}\colon \Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}} \to \Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$ et on identifie le fibré tangent $\mathrm{T}\Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$ à son image dans $i_{j+1}^*\mathrm{T}\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$ par l'injection canonique. On note $N_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$ le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{T}\Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$ dans $i_{j+1}^*\mathrm{T}\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$, de sorte que $i_{j+1}^*\mathrm{T}\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}} = \mathrm{T}\Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}} \oplus \mathrm{N}\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}$. C'est un fibré vectoriel sur $\Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$, dont la fibre au-dessus de σ, notée $\mathrm{N}_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$, est canoniquement isomorphe à $\mathrm{T}_\sigma\Sigma_{j,\boldsymbol{\epsilon}}/\mathrm{T}_\sigma\Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$.

Lemme 4.6. *Pour tout $\alpha \in \Delta$ pour tout $j \in \{1,\dots,s-1\}$, et pour tout $\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r$,*

$$\langle \mathrm{N}_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0.$$

Démonstration. Soit $\sigma \in \Sigma_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$. On considère la base de l'espace normal $\mathrm{N}_{j+1,\boldsymbol{\epsilon}}$ vue dans la démonstration de la proposition 4.5. On montre que, si $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma$ est de type (iii), alors quel que soit $\alpha \in \Delta$,

$$\langle \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0.$$

On a

$$\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma = \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)(\epsilon_i\phi(\tilde{c}_i)\sigma_0 + \epsilon_j\phi(\tilde{c}_j)\sigma_0) = \pm\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma_0$$

et, par la décomposition orthogonale de $E = \phi(V)\sigma \oplus \mathrm{T}_\sigma\Sigma$ on a

$$\langle \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_j)\phi(\tilde{v}_{ij}^s)\sigma_0, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0.$$

En particulier ceci montre le résultat si $\operatorname{rg} e_{j+1} = \operatorname{rg} e_j$.

On suppose maintenant que $\operatorname{rg} e_j < \operatorname{rg} e_{j+1}$. L'élément σ de $\Sigma_{j+1,\epsilon}$ s'écrit alors

$$\sigma = \phi(J_{j+1,\epsilon})\sigma_0 + \phi(e - e_{j+1})\sigma$$

où

$$J_{j+1,\epsilon} = \sum_{t=1}^{\operatorname{rg} e_{j+1}} \epsilon_t \tilde{c}_t, \quad e - e_{j+1} = \sum_{p=\operatorname{rg} e_{j+1}+1}^{r} \tilde{c}_p.$$

On note $A_1 = \{1, \dots, \operatorname{rg} e_{j+1}\}$, $A_2 = \{\operatorname{rg} e_{j+1} + 1, \dots, r\}$. On considère les vecteurs de la base de l'espace normal des (i) et (ii), à savoir
(i) les vecteurs $\tilde{r}_h^i$ où $1 \leq h \leq \delta$, $\tilde{c}_i J_{j,\epsilon} = 0$ et $\tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} \neq 0$,
(ii) les vecteurs $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}_{il}^s)\sigma$ où $1 \leq i < l \leq r$, $1 \leq s \leq d$ et $\tilde{c}_i J_{j,\epsilon} = \tilde{c}_l J_{j,\epsilon} = 0 = \tilde{c}_l J_{j+1,\epsilon} = 0$, et $\tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} \neq 0$,
On distingue deux cas.
Premier cas: $\operatorname{rg} \alpha^* \leq \operatorname{rg} e_{j+1}$. Alors,

$$\begin{aligned} &\langle \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}_{il}^s)\sigma, \phi(\alpha^*)\sigma_0 \rangle_E \\ &= -\epsilon_i \langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_i)\sigma_0, \phi(\alpha^*)\sigma_0 \rangle_E + -\epsilon_i \langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_l)\sigma, \phi(\alpha^*)\sigma_0 \rangle_E. \end{aligned} \tag{1}$$

Le premier terme du second membre de (1) est nul car $\phi(\alpha^*)E \subset \phi(e_{j+1})E$ et $\langle \phi(e_{j+1})E, \phi(\tilde{c}_l)E \rangle_E = 0$ quel que soit $l \in A_2$. L'espace $\phi(\tilde{c}_i)E = E_i$ admet la décomposition en somme directe orthogonale

$$E_i = \phi(V_{ii})\sigma \oplus (\phi(c_i)\phi(\oplus_{1 \leq i \neq j \leq r} V_{ij}\sigma)) \oplus \tilde{R}_i.$$

En utilisant le résultat ([11], Lemma 7), on a encore la décomposition en somme directe orthogonale

$$E_i = \phi(V_{ii})\sigma \oplus (\phi(c_i)\phi(\oplus_{j \in A_1 \setminus \{i\}} V_{ij})\sigma) \oplus (\phi(c_i)\phi(\oplus_{p \in A} V_{ip})\sigma) \oplus \tilde{R}_i. \tag{$*$}$$

On a évidemment

$$\tilde{r}_h^i \in \tilde{R}_i \tag{2}$$

et, comme $l \in A_2$,

$$\phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_l)\sigma \in \phi(c_l)\phi(\oplus_{p \in A} V_{ip})\sigma. \tag{3}$$

Le fait que $i \in A_1$ implique que

$$\phi(V_{ii})\sigma \oplus (\phi(c_i)\phi(\oplus_{j \in A_1 \setminus \{i\}} V_{ij})\sigma) = \phi(V_{ii})\sigma_0 + \oplus(\phi(c_i)\phi(\oplus_{j \in A_1 \setminus \{i\}} V_{ij})\sigma_0). \tag{4}$$

L'hypothèse que $\alpha \in \Delta$ et que $\operatorname{rg} \alpha^* \leq \operatorname{rg} e_{j+1}$ implique que $\alpha^* \in V(e_{j+1}, 1)$. On considère la décomposition de Peirce de l'algèbre $V(e_{j+1}, 1)$ par rapport au s.c.i.p.o. $(\tilde{c}_j)_{j \in A_1}$. Par conséquent α^* s'écrit

$$\alpha^* = \sum_{j \in A_1} \alpha_{jj} + \sum_{j<m} \alpha_{jm}, \tag{5}$$

où $\alpha_{jj} \in V_{jj}$ et $\alpha_{jm} \in V_{jm}$. Alors, comme $i \in A_1$

$$\phi(\tilde{c}_i)\phi(\alpha^*)\sigma_0 \in \phi(V_{ii})\sigma_0 + (\phi(c_i)\phi(\oplus_{j\in A_1\setminus\{i\}} V_{ij})\sigma_0). \tag{6}$$

Compte tenu de la décomposition $(*)$, $\langle \tilde{r}_h^i, \phi(\tilde{c}_i)\phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0$ et par conséquent

$$\langle \tilde{r}_h^i, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0. \tag{7}$$

Reste à étudier le second terme du second membre de (1). Il est égal à

$$\langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_l)\sigma, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = \langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_l)\sigma, \phi(\tilde{c}_i)\phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0.$$

Compte tenu des relations (6) et (3) et de la décomposition $(*)$ de E_i,

$$\langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_l)\sigma, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0. \tag{8}$$

Par conséquent le résultat est établi dans le cas où $\operatorname{rg}\alpha^* \le \operatorname{rg} e_{j+1}$.
Deuxlème cas: $\operatorname{rg} e_{j+1} \le \operatorname{rg}\alpha^*$. On considère à nouveau les vecteurs des types (i) et (ii). L'hypothèse implique que α^* s'écrit comme somme de deux idempotents orthogonaux

$$\alpha^* = e_{j+1} + \alpha^* - e_{j+1}. \tag{9}$$

Pour un vecteur du type (ii), c'est à dire de la forme $\phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}_{il}^s)\sigma$ où $\tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} = \epsilon_i\tilde{c}_i$ et $\tilde{c}_l J_{j+1,\epsilon} = \tilde{c}_i J_{j,\epsilon} = \tilde{c}_l J_{j,\epsilon} = 0$,

$$\begin{aligned}\langle \phi(\tilde{c}_i - \tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}_{il}^s)\sigma, \phi(\alpha^*)\sigma\rangle_E = &-\epsilon_i\langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_i)\sigma_0, \phi(e_{j+1})\sigma_0\rangle_E\\ &- \epsilon_i\langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_i)\sigma_0, \phi(\alpha^* - e_{j+1}))\sigma_0\rangle_E\\ &+ \langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_l)\sigma, \phi(e_{j+1})\sigma_0\rangle_E\\ &+ \langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_l)\sigma, \phi(\alpha^* - e_{j+1}))\sigma_0\rangle_E.\end{aligned} \tag{10}$$

Le premier terme du second membre de (10) est égal à 0 car $\forall (i,j) \in A_2 \times A_1$ les espaces E_i et E_j sont orthogonaux. Le troisième terme est égal à 0 comme on l'a vu au premier cas en prenant $\operatorname{rg} e_{j+1} = \operatorname{rg}\alpha^*$. Le quatrième terme est égal à 0 car $E_i \subset \phi(e_{j+1})E$ et $\langle \phi(e_{j+1})E, \phi(\alpha^* - e_{j+1})E\rangle_E = 0$. Il nous reste donc à montrer que

$$\langle \phi(\tilde{v}_{il}^s)\phi(\tilde{c}_i)\sigma_0, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0. \tag{11}$$

On considère la sous-algèbre $V(e - e_{j+1}, 1)$. Alors

$$(e - e_{j+1})(\alpha^* - e_{j+1}) = \alpha^* - e_{j+1} - e_{j+1} + e_{j+1} = \alpha^* - e_{j+1}$$

et par conséquent, $\alpha^* - e_{j+1} \in V(e - e_{j+1}, 1)$.
On considère le s.c.i.p.o. de $V(e - e_{j+1}, 1)$ et la décomposition de Peirce de $V(e - e_{j+1}, 1)$ par rapport à ce s.c.i.p.o. Alors

$$\alpha^* = \sum_{p\in A_2} \alpha_{pp} + \sum_{p<m} \alpha_{pm} \tag{12}$$

où $\alpha_{pm} \in V_{pp}$ (et en particulier $\alpha_{pp} \in V_{pp}$). Comme $l \in A_2$,

$$\phi(\tilde{c}_l)\phi(\alpha^* - e_{j+1})\sigma_0 = \phi(\alpha_{ll})\sigma_0 + \phi(\tilde{c}_l)(\sum_{m\in A_2\setminus\{l\}} \phi(\alpha_{lm})\sigma_0). \tag{13}$$

Comme $\phi(\tilde{c}_l)\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma_0 = \phi(\tilde{v}^s_{il})\phi(\tilde{c}_l)\sigma_0$, la relation (11) s'écrit

$$\langle\phi(\tilde{c}_l)\sigma_0, \phi(\alpha^* - e_{j+1})\sigma_0\rangle_E = 0$$

et à l'aide de (13), ainsi que des lemmes ([11], Lemmas 6, 7) ($i \in A_1$, $j \in A_2$), on trouve

$$\langle\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma_0, \phi(\alpha_{ll})\sigma_0\rangle_E + \langle\phi(\tilde{v}^s_{il})\sigma_0, \phi(\tilde{c}_l)(\sum_{m\in A_2\setminus\{l\}} \phi(\alpha_{lm})\sigma_0)\rangle_E = 0. \tag{14}$$

Il nous reste donc à montrer que, pour les vecteurs du type (i),

$$\langle\tilde{r}^i_h, \phi(\alpha^*)\sigma_0\rangle_E = 0 \quad \text{où} \quad \tilde{c}_i J_{j+1,\epsilon} = \epsilon_i\tilde{c}_i \quad \text{et} \quad \tilde{c}_i J_{j,\epsilon} = 0. \tag{15}$$

En utilisant à nouveau (9),

$$\langle\tilde{r}^i_h, \phi(e_{j+1})\sigma_0\rangle_E + \langle\tilde{r}^i_h, \phi(\alpha^* - e_{j+1})\sigma_0\rangle_E. \tag{16}$$

Le premier terme est égal à 0 car on est dans le premier cas avec $\mathrm{rg}\,\alpha^* = \mathrm{rg}\,e_{j+1}$. Le second terme est égal à 0 car $E_i \subset \phi(e_{j+1})E$ et $\langle\phi(e_{j+1})E, \phi(\alpha^*-e_{j+1})E\rangle_E = 0$. Par conséquent, l'assertion est démontrée. ■

Proposition 4.7. *Pour tout $\sigma \in \Sigma_{j+1,\epsilon}$ et tout $k > j+1$, on a*

$$g'_{k,x'}(\sigma) \mid_{\mathrm{N}_\sigma\Sigma_{j+1,\epsilon}} = 0.$$

Démonstration. Supposons que $S_k = \{\alpha_{1,k}, ..., \alpha_{1,k}\}$ avec $\mathrm{rg}\,\alpha^*_{1,k} < \ldots < \mathrm{rg}\,\alpha^*_{p,k}$. Soit

$$S_k[x'] = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,k}(x')\alpha^*_{i,k}.$$

On considère l'application $g_{k,x'}(\sigma) = \langle\sigma, \phi(S_k[x'])\sigma_0\rangle_E$ où $\sigma \in \Sigma_{j,\epsilon}$. On a

$$g_{k,x'}(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,k}(x')\langle\sigma, \phi(\alpha^*_{i,k})\sigma_0\rangle_E.$$

Si $\sigma \in \Sigma_{j+1,\epsilon}$, on a $g'_{k,x'}(\sigma) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,k}(x')\langle X_\sigma, \phi(\alpha^*_{i,k})\sigma_0\rangle_E$ où $X_\sigma \in \mathrm{T}_\sigma\Sigma_{j+1,\epsilon}$. Mais d'après le lemme 4.6,

$$g'_{k,x'}(\sigma) \mid_{\mathrm{N}_\sigma\Sigma_{j+1,\epsilon}} = 0.$$ ■

Démonstration du théorème 4.1: Les propositions 4.3. à 4.7. impliquent que les hypothèses de la proposition 4.2. sont satisfaites pour les fonctions $g_{j,x'}$ et la filtration (Σ_j) de la variété de Stiefel.

On prend comme Θ_0 la partie compacte $P(\mu)$ $(\mu \geq 1)$ de la chambre de Weyl ouverte $\mathcal{C}(\Delta)^\circ$. D'après la Proposition 4.2, pour tout $\pi \in \Pi$ et tout $\mu \geq 1$, il existe une constante positive C' et un réel $\eta(\pi,\mu) \geq 1$ tels que pour tout $x \in P(\pi,\mu,\eta(\pi,\mu))$ on ait

$$(*) \qquad |J(x^2)| \leq C' \sum_{\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r} \prod_{j=1}^{s} l(\tau_j)^{-\frac{1}{2} n_{j,\boldsymbol{\epsilon}}}$$

où d'après la remarque suivant la proposition 4.5 la dimension de l'espace normal est donnée par

$$(1) \qquad n_{j,\boldsymbol{\epsilon}} = \dim \mathrm{N}_{j,\boldsymbol{\epsilon}} = \delta\mu_j + d\nu_j.$$

Soit $x \in P(\pi,\mu,\eta(\pi,\mu))$. Soit p le plus grand indice j tel que, pour tout $\alpha \in S_j$, $\alpha(x) > 0$. Ainsi, $S_{p+1}[x] = \ldots = S_s[x] = 0$, ou, de façon équivalente, $\tau_{p+1} = \ldots = \tau_s = 0$.

Pour $\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r$ fixé,

$$(**) \qquad \prod_{j=1}^{s} l(\tau_j)^{-\frac{1}{2} n_{j,\boldsymbol{\epsilon}}} \leq \prod_{j=1}^{p} l(\tau_j)^{-\frac{1}{2} n_{j,\boldsymbol{\epsilon}}}$$

puisque $l(\tau_j) \geq 1$ pour tout j.

Soit $\gamma \in \Xi_1$. Soit le plus petit indice $j \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $\gamma \in \Xi_1'(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{S}_j[x])$, ce qui implique que $\gamma(\boldsymbol{\epsilon}\tilde{S}_j[x])) \neq 0$. Ceci entraîne que, parmi les racines dont γ est combinaison linéaire, il y a $\alpha \in S_j$. Il est alors clair que $\alpha(S_j[x]) > 0$. Par conséquent,

$$(2) \qquad 1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)| \leq (2r+1)\tau_j.$$

Soit $\gamma \in \Xi_2$. On suppose que $\gamma \in \Xi_2'(\boldsymbol{\epsilon}, \tilde{S}_l[x])$ pour un indice $l \in \{1,\ldots,p\}$. A nouveau $\gamma(\boldsymbol{\epsilon}\tilde{S}_l[x]) \neq 0$ et, pour la même raison que ci-dessus,

$$(3) \qquad 1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)| \leq (2r+1)\tau_l.$$

Les relations $(**)$, (1), (2) et (3) impliquent

$$(4) \quad \prod_{j=1}^{p} l(\tau_j)^{-\frac{1}{2} n_{j,\boldsymbol{\epsilon}}} \leq C'(2r+1)^{\dim \Sigma} \prod_{\gamma \in \Xi_1} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)|)^{-\frac{d}{2}} \prod_{\gamma \in \Xi_2} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)|)^{-\frac{\delta}{2}}.$$

On en déduit l'estimation de la fonction de Bessel

$$(5) \qquad |J(x^2)| \leq C'(2r+1)^{\dim \Sigma} \prod_{\gamma \in \Xi_1} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)|)^{-\frac{d}{2}} \prod_{\gamma \in \Xi_2} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon}x)|)^{-\frac{\delta}{2}},$$

comme pour $\gamma \in \Xi_2'$ on a $|\gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)| = |\gamma(x)|$ en posant $C'(2r+1)^{\dim \Sigma} = C''$ on obtient

$$|J(x^2)| \leq C'' \left(\sum_{\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r} \prod_{\gamma \in \Xi_1} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)|)^{-\frac{d}{2}} \right) \prod_{\gamma \in \Xi_2} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)|)^{-\frac{\delta}{2}}. \tag{6}$$

L'estimation (6) est uniforme sur $P(\pi, \mu, \eta(\pi, \mu))$. Mais la chambre de Weyl $\mathcal{C}(\Delta)$ est réunion finie d'ensembles de la forme $P(\pi, \mu, \eta(\pi, \mu))$ ([5], Lemma 11.5. et la relation 11.24, p.376), par conséquent il existe une constante positive C telle que pour tout $x \in \mathcal{C}(\Delta)$

$$|J(x^2)| \leq C \left(\sum_{\boldsymbol{\epsilon} \in \{-1,1\}^r} \prod_{\gamma \in \Xi_1} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)|)^{-\frac{d}{2}} \right) \prod_{\gamma \in \Xi_2} (1 + |\gamma(\boldsymbol{\epsilon} x)|)^{-\frac{\delta}{2}}. \tag{7}$$

Compte tenu de la K-invariance de la fonction de Bessel, on obtient l'estimation uniforme sur $\overline{\Omega}$

$$|J(x^2)| \leq CB(x)$$

et le théorème est complètement démontré. ∎

Références

[1] Chazarain, J., *Formule de Poisson pour les varétés riemanniennes*, Inv. Math. **24** (1974), 65–82.

[2] Clerc, J.–L., *Représentations d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel*, J. reine ang. Math. **423** (1992), 47–71.

[3] Colin de Verdière, Y., *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques*. Comp. Math. **27** (1973), 159–184.

[4] Constantine, A. G., *Some non-central Distribution Problems and Multivariate Analysis*, Ann. Math. Statist. **34** (1963), 1270–1285.

[5] Duistermaat, J. J., J.A.C. Kolk, V.S. Varadarajan, *Functions, Flows and Oscillatory Integrals on Flag Manifolds and Conjugacy Classes in Real Semisimple Lie Groups*, Comp. Math. **49** (1989), 309–398.

[6] Faraut, J., and A. Korányi, "Analysis on symmetric cones", Oxford 1994.

[7] Faraut, J., and G. Travaligni, *Bessel Functions associated with Representations of Formally Real Jordan Algebras*, J. Funct. Anal. **71** (1987), 123–141.

[8] Herz, C., *Bessel Functions of Matrix Arguments*, Ann. of Math. **61** (1955), 474–523.

[9] Muirhead, R., "Aspects of Multivariate Statistical Theory", John Wiley & Sons, 1982.

[10] Stein, E. M., "Beijing lectures in Harmonic Analysis", Ann. of Math. Studies 112, 1986.

[11] Travaligni, G., *Representations of Jordan Algebras and Special Functions*, Colloquium Math. **62** (1991), 259–266.

Antonis Kalliterakis
7 av. Watteau
94130 Nogent sur Marne
FRANCE
antonis.kalliterakis@free.fr

Received August 11, 1998
and in final form November 3, 2000