Journal of Lie Theory
Volume **12** (2002) 137–190

Méthode des orbites et formules du caractère pour les représentations tempérées d'un groupe algébrique réel réductif non connexe

Jean-Yves Ducloux

Communicated by J. Faraut

Abstract. Let G be a non-connected reductive real Lie group. In this paper, I parametrize the set of irreductible tempered characters of G. Afterwards, I describe these characters by means of some "Kirillov's formulas", using the descent method near each elliptic element in G.

If G is linear and connected, the parameters that I use are "final basic" parameters in the sense of Knapp and Zuckerman (cf. [KZ 82, p. 453]).

Table des matières

ISSN 0949–5932 / $2.50

Introduction et notations générales

Dans cet article, je vais décrire par la méthode des orbites le dual tempéré d'un groupe de Lie réel réductif, en m'appuyant sur les quatre travaux suivants :

– la description du dual tempéré d'un groupe de Lie réel réductif connexe par J. Adams, D. Barbasch et D. Vogan dans [ABV 92, ch. 11] ;

– la paramétrisation par M. Duflo des classes d'équivalence des représentations d'un groupe de Lie réel réductif qui sont tempérées irréductibles avec un caractère infinitésimal régulier, obtenue via la « théorie de Mackey » dans [Duf 82a, III] ;

– la formule du caractère « à la Kirillov » de A. Bouaziz dans [Bou 87], qui exprime le caractère de ces représentations à l'aide des transformées de Fourier d'orbites coadjointes semi-simples régulières ;

– les formules de W. Rossmann dans [Ros 82] (où « principal » se traduit par « régulier », et « regular » par « semi-simple régulier ») qui relient les transformées de Fourier des orbites régulières à celles des orbites semi-simples régulières.

Un théorème de M. Duflo dans [Duf 82b, p. 189] ramène la classification des duaux unitaires des groupes linéaires algébriques réels à la classification des duaux unitaires des groupes réductifs « presque algébriques à noyau fini ». Ce sont donc ces groupes réductifs qui m'intéressent.

Hypothèse. *On se donne un groupe de Lie réel à base dénombrable G d'algèbre de Lie notée $\mathfrak{g}$, un groupe linéaire algébrique $\mathbb{G}$ défini sur $\mathbb{R}$, et un morphisme de groupes de Lie de G dans $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ de noyau fini central dont l'image est ouverte pour la topologie usuelle. Ainsi, tout élément de G (respectivement $\mathfrak{g}$) a une « décomposition de Jordan réelle » en composantes elliptique, positivement hyperbolique et unipotente (respectivement composantes infinitésimalement elliptique, hyperbolique et nilpotente) décrite dans [DV 93, haut p. 36 et lem. 31 p. 38]. On suppose que $\mathfrak{g}$ est réductive avec un centre formé d'éléments semi-simples.*

M. Duflo a paramétré dans [Duf 82a, lem. 8 p. 173] une partie du dual unitaire $\widehat{G}$ de G (précisée ci-dessus), en termes d'orbites coadjointes semi-simples régulières, en se ramenant par induction aux séries discrètes de certains sous-groupes de G. Quand G est connexe, cette partie de $\widehat{G}$ avait été décrite par Harish-Chandra (cf. [Har 76, th. 1 p. 198]). Je paramètre ici dans le *théorème 9.6 (b)* p. 169, en termes d'orbites coadjointes régulières « généralisées », la partie plus grosse de $\widehat{G}$, égale au dual tempéré de G, obtenue en remplaçant au début de l'induction les représentations des séries discrètes par les représentations limites de séries discrètes. Quand G est connexe, mon énoncé reproduit une partie du théorème 11.14 de [ABV 92, p. 131] (voir aussi [Kna 86, th. 14.76 p. 598]) avec l'apport suivant : l'égalité de deux représentations se traduit exactement par la conjugaison sous G de couples de « bons paramètres » qui leur sont associés.

L'expression « bons paramètres » renvoie aux contraintes imposées à ces paramètres. En voici le principe heuristique (cf. [Duf 82a, th. 1 p. 193] et [Duf 82b, th. 19 p. 211]). Une représentation unitaire irréductible T de G sera paramétrée dans les cas favorables par l'orbite sous G d'un couple $(\widetilde{\lambda}, \tau)$. Le terme $\widetilde{\lambda}$ doit être une sorte de forme linéaire dont la composante semi-simple l correspond au caractère $\chi_{\mathrm{i}\,l}^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ par lequel le centralisateur $(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ de G dans $U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ agit sur l'espace des vecteurs C^∞ de l'espace de T (cf. 8.4 (a)). Dans cet article, ce premier paramètre est relié à une limite de série discrète dont T va en gros être une induite. Pour cette raison, il s'écrira sous la forme $\widetilde{\lambda} = (\lambda, \mathcal{F}^+)$, où $\mathcal{F}^+$ est une chambre de Weyl pour des racines imaginaires (cf. [Zuc 77, th. 5.7 p. 305]). Sa « composante semi-simple » est la forme linéaire $l := \lambda$, en un sens compatible avec les définitions concernant le cas des orbites coadjointes (cf. 2.2 (a)). On note $G(\widetilde{\lambda})$ le stabilisateur de $\widetilde{\lambda}$ dans G. Le terme τ doit être une représentation projective de $G(\widetilde{\lambda})/G(\widetilde{\lambda})_0$, remontée en une représentation unitaire d'un revêtement de degré 2 de $G(\widetilde{\lambda})$, telle que $\mathrm{d}_1\tau = \mathrm{i}\,l\,\mathrm{id}$ et le caractère central de τ prolonge celui de T (cf. 8.4 (b)). Dans cet article, ce second paramètre est une représentation unitaire (peut-être non irréductible) d'un analogue adéquat pour $\widetilde{\lambda}$ du revêtement « de Duflo » du stabilisateur $G(f)$ dans G d'un élément f de $\mathfrak{g}^*$. En fait, mes constructions utiliseront un couple de paramètres $((\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}), \tau_+)$ au lieu de $(\widetilde{\lambda}, \tau)$, où $\mathfrak{a}^{*+}$ est une certaine chambre de Weyl pour des racines restreintes, et τ_+ est une représentation unitaire irréductible d'un revêtement de $\mathrm{N}_{G(\tilde{\lambda})}(\mathfrak{a}^{*+})$. Ce nouveau couple de paramètres satisfait encore les conditions décrites ci-dessus. Le couple $(\widetilde{\lambda}, \tau)$ se révèlera être « plus canonique » quand le caractère de T aura été calculé, mais il n'aura qu'un rôle secondaire. Les G-orbites de $(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ et $((\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}), \tau_+)$ s'identifient respectivement à celles de $\widetilde{\lambda}$ et $(\widetilde{\lambda}, \tau)$. Dans l'énoncé des résultats ci-dessous, je ferai intervenir l'ensemble X_G^{Ind} des couples $(\widetilde{\lambda}, \tau)$. Il sera défini plus précisément dans la partie II., en relation avec la notion de « caractère final » (cf. 5.5 (c)).

Le résultat principal de cet article est le *théorème 10.2* p. 173 qui décrit le caractère des représentations tempérées T de G en terme de transformées de Fourier des mesures canoniques sur certaines orbites coadjointes régulières reliées à un paramètre $\widetilde{\lambda}$ attaché à T. Ces formules du caractère montrent la nécessité d'adapter le point de vue « orbites nilpotentes » de la méthode des orbites en oubliant l'aspect « orbite coadjointe » de $G\cdot\widetilde{\lambda}$. Par exemple les orbites coadjointes associées aux deux limites de la série discrète de $SL(2,\mathbb{R})$, qui sont l'un ou l'autre des deux demi-cônes nilpotents ouverts, n'ont pas de point fixe sous l'action de la « rotation » $\mathrm{Ad}^*\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ (cf. remarque 3.3 (3)) ; elles doivent être remplacées par les ensembles des demi-droites incluses dans l'intérieur de leurs enveloppes convexes respectives, au produit par i près. On verra aussi dans la remarque 6.2 que ce nouveau point de vue permet de comprendre pourquoi certaines orbites nilpotentes « admissibles » au sens de M. Duflo ne correspondent à aucune représentation.

Mes deux théorèmes se résument comme suit (voir l'index des notations).

Résultats. *Il existe une bijection « canonique »* $G\cdot(\widetilde{\lambda}, \tau) \mapsto T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$ *de* $G \backslash X_G^{Ind}$ *sur le dual tempéré de* G*. Elle est déterminée par des formules du type :*

$$k_e(X)\ \operatorname{tr} T^G_{\tilde{\lambda},\tau}(e \exp X) \ = \sum_{\substack{\dot{\tilde{\lambda}}' \in G(e)\backslash G\cdot\tilde{\lambda} \cap \widetilde{\mathfrak{g}^*_{reg}}(e) \\ \textit{tel que } \tilde{\lambda}'[e] \in \widetilde{\mathfrak{g}(e)^*_{reg}}}} c_{\widehat{e'},\tilde{\lambda}}\ \operatorname{tr} \tau(\widehat{e'})\ \widehat{\beta}_{G(e)\cdot\tilde{\lambda}'[e]}(X)$$

où $(\widetilde{\lambda},\tau)\in X_G^{Ind}$, *e décrit l'ensemble des éléments elliptiques de* G,
X *est un élément d'un certain voisinage* $\mathcal{V}_e$ *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}(e)$ *tel que* $e\exp X$ *est semi-simple régulier dans* G *(auquel cas* X *est semi-simple régulier dans* $\mathfrak{g}(e)$*),*
$\widehat{e'}$ *est un élément du revêtement double* $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(i\rho_{\mathcal{F}^+})}$ *(en posant* $\widetilde{\lambda}=(\lambda,\mathcal{F}^+)$*)*
qui se projette sur $e'=g^{-1}eg$ *pour un* $g\in G$ *tel que* $\widetilde{\lambda}'=g\widetilde{\lambda}$,
et, $k_e(X)$ *et* $c_{\widehat{e'},\widetilde{\lambda}}$ *sont certains nombres complexes non nuls.*

Les idées qui m'ont permis d'obtenir ces résultats sont les suivantes. Les constructions de M. Duflo reprises étape par étape vont fournir une bijection d'un ensemble d'orbites sur le dual tempéré de G, grâce au *lemme 9.3 (b)* p. 166. Pour passer du cas connexe au cas non connexe, j'aurai besoin d'une généralisation d'un résultat de D. Vogan utilisé par M. Duflo pour une construction homologique. Celle-ci se trouve à la page 555 du livre [KV 95] de A. Knapp et D. Vogan. Au vu du cas connexe (cf. [Ros 80, p. 64]), il est ensuite naturel de chercher à récupérer les caractères des représentations tempérées irréductibles par passage à la limite à partir de ceux associés aux orbites semi-simples régulières. Dans le cas non connexe, le calcul du caractère des représentations se décomposera avant tout en deux étapes dont la première est peu commode.

Étape 1. On induit une représentation limite de la série discrète d'un sous-groupe de G à la composante neutre de la composante de Levi M' (en général hors de la classe d'Harish-Chandra) d'un certain « sous-groupe parabolique » $M'U$ de G. L'analogue de cette représentation induite dans le cas connexe était seulement une représentation limite de la série discrète de la composante de Levi M d'un sous-groupe parabolique cuspidal MAN de G. La méthode ici comme dans le cas connexe, est d'appliquer le foncteur de translation de Zuckerman (adapté au cas du groupe non connexe M') pour se ramener aux représentations de M' dont on connaît le caractère. Une difficulté est qu'on passe de M'_0 à M' avec une étape homologique. Sur le conseil d'A. Bouaziz, je me suis inspiré des points (i) et (ii) de la page 550 de son article [Bou 84] pour calculer l'action d'un groupe $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ dans un espace poids de l'homologie d'un M'_0-module translaté au sens de G. Zuckerman.

Étape 2. On induit ensuite de $M'U$ à G. Le terrain aura été préparé dans la partie I. par des rappels et compléments concernant des résultats de W. Rossmann pour le calcul des limites de transformées de Fourier des mesures canoniques sur des orbites semi-simples régulières. En particulier, dans la section 3., j'aurai mis en évidence ce que donne le passage de G à $G(e)$ au niveau des paramètres $\widetilde{\lambda}$. Le reste de cette étape consiste à utiliser les méthodes et résultats d'A. Bouaziz.

Les définitions et notations qui suivent vont me permettre, d'abord de préciser mes conventions générales, et ensuite d'introduire les conventions relatives aux groupes réductifs que j'utiliserai le plus fréquemment.

Conventions 1. **(a)** On note $|A|$ le cardinal d'un ensemble A et $\dot{a}$ la classe d'un élément a de A modulo une relation d'équivalence $\sim$ sur A, $f|_{B'}:B'\to C$ la restriction d'une application $f:B\to C$ à une partie B' de B, $\overline{F}$ l'adhérence d'un sous-ensemble F d'un espace topologique E (dans les sections 2. et 12.), $l^{\mathbb{C}}$ la complexifiée d'une application $\mathbb{R}$-linéaire l, $\overline{w}$ et $\overline{W}$ les conjugués d'un vecteur w et d'un sous-espace vectoriel W dans le complexifié $V_{\mathbb{C}}$ d'un espace vectoriel réel V (dans les sections 1., 3., 4., 5., 8. et 9.), u_Y et $u_{X/Y}$ les endomorphismes induits sur Y et X/Y par un endomorphisme u d'un espace vectoriel X laissant invariant un sous-espace vectoriel Y de X.

(b) Soient A un groupe de Lie réel à base dénombrable et $\mathfrak{a}$ son algèbre de Lie. On note 1 l'élément neutre de A, A_0 la composante neutre de A, $\exp_A$ (ou exp) l'application exponentielle de $\mathfrak{a}$ dans A, Ad^* et ad^* les représentations coadjointes de A et de $\mathfrak{a}$, $\operatorname{int}\mathfrak{a}$ le sous-groupe du groupe linéaire de $\mathfrak{a}$ engendré par les éléments $\exp(\operatorname{ad} X)$ quand X décrit $\mathfrak{a}$, $\mathrm{Z}(A)$ et $\mathrm{D}(A)$ le centre et le groupe dérivé de A, $\mathrm{Z}(\mathfrak{a})$ et $\mathrm{D}(\mathfrak{a})$ le centre et l'algèbre dérivée de $\mathfrak{a}$, $\mathrm{Z}(U\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ le centre de l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$, $\widehat{A}$ le dual unitaire de A. À toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$, on associe les sous-groupes de Lie

$$\mathrm{C}_A(\mathfrak{b}) = \{x \in A \mid (\operatorname{Ad} x)|_{\mathfrak{b}} = \mathrm{id}\} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_A(\mathfrak{b}) = \{x \in A \mid \operatorname{Ad} x.\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}\}$$

de A, dont les algèbres de Lie sont

$$\mathrm{C}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \{X \in \mathfrak{a} \mid (\operatorname{ad} X)|_{\mathfrak{b}} = 0\} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{b}) = \{X \in \mathfrak{a} \mid \operatorname{ad} X.\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}\}.$$

(c) Soit M une variété C^∞ séparée à base dénombrable de dimension m. Une densité C^∞ sur M est une mesure de Radon complexe ρ sur M qui se lit dans toute carte de M centrée en un point x sous la forme $a\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_m$, où a est une fonction C^∞ sur un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^m$. Elle « s'identifie » à la famille formée des applications $\rho(x)$ avec $x \in M$ qui envoient un élément de $\bigwedge^m T_xM \setminus\{0\}$ d'image ω_0 par la carte précédente, sur $a(0)\,|(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_m)(\omega_0)|$. Une fonction généralisée sur M est une forme linéaire continue sur l'espace des densités C^∞ à support compact sur M, muni de la topologie de Schwartz.

(d) Soient A un groupe de Lie réel à base dénombrable et d_A une mesure de Haar à gauche sur A. Une représentation continue T de A dans un espace de Hilbert complexe est dite traçable si les opérateurs $T(\varphi\,\mathrm{d}_A)$ avec $\varphi \in C_c^\infty(A)$ sont traçables ; dans ce cas $\operatorname{tr} T : \varphi\,\mathrm{d}_A \mapsto \operatorname{tr} T(\varphi\,\mathrm{d}_A)$ est une fonction généralisée sur A. Pour toute représentation unitaire continue π d'un sous-groupe fermé B de A muni d'une mesure de Haar à gauche d_B, on note $\operatorname{Ind}_B^A \pi$ la représentation unitaire de A « induite » à partir de π comme dans [B.. 72, p. 99].

(e) Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie. La transformée de Fourier d'une distribution tempérée μ sur V^* est la fonction généralisée $\widehat{\mu}$ sur V définie par l'égalité $\widehat{\mu}(v) = \displaystyle\int_{V^*} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,l(v)} \mathrm{d}\mu(l)$ de fonctions généralisées en $v \in V$.

Conventions 2. **(a)** On note $\operatorname{Car}\mathfrak{g}$ l'ensemble des sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$. On fixe un système de racines positives $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, arbitrairement (sauf indication contraire), dans l'ensemble $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ des racines de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

On note $W(G, \mathfrak{h})$ le groupe fini $\mathrm{N}_G(\mathfrak{h})/\mathrm{C}_G(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$ les composantes infinitésimalement elliptique et hyperbolique de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_{(\mathbb{R})} = \mathrm{i}\,\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}$, $T_0 = \exp\mathfrak{t}$ et $A = \exp\mathfrak{a}$, $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$ la demi-somme des éléments de $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, et H_α la racine duale d'une α dans le système de racines $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.

Une racine $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est dite complexe (respectivement réelle, imaginaire, ou compacte) quand sa conjuguée $\overline{\alpha} : X \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \mapsto \overline{\alpha(\overline{X})}$ vérifie $\overline{\alpha} \notin \{\alpha, -\alpha\}$ (respectivement $\overline{\alpha} = \alpha$, $\overline{\alpha} = -\alpha$, ou $(\mathbb{C}H_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}) \cap \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{su}(2)$).

(b) On fixe une forme bilinéaire G-invariante non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ sur $\mathfrak{g}$ dont la complexifiée (encore notée $\langle\ ,\ \rangle$) se restreint en un produit scalaire sur chaque $\mathfrak{h}_{(\mathbb{R})}$, $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$. On note $\perp^{\langle\, ,\, \rangle}$ la relation de $\langle\ ,\ \rangle$-orthogonalité. Soient $x \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$ semi-simples. On note $G(x)$ (resp. $G(X)$) et $\mathfrak{g}(x)$ (resp. $\mathfrak{g}(X)$) les commutants de x (resp. X) dans G et $\mathfrak{g}$. Le $G(x)$-module $\mathfrak{g}(x)^*$ (resp. le $G(X)$-module $\mathfrak{g}(X)^*$) est canoniquement isomorphe par restriction à l'ensemble $\mathfrak{g}^*(x)$ (resp. $\mathfrak{g}^*(X)$) des éléments de $\mathfrak{g}^*$ fixes sous $\operatorname{Ad}^* x$ (resp. annulés par $\operatorname{ad}^* X$), c'est-à-dire nuls sur $\mathfrak{g}(x)^{\perp^{\langle\, ,\, \rangle}}$ (resp. $\mathfrak{g}(X)^{\perp^{\langle\, ,\, \rangle}}$).

(c) Soit $f \in \mathfrak{g}^*$. On note $G(f)$ le stabilisateur de f dans G et $\mathfrak{g}(f)$ l'algèbre de Lie de $G(f)$. Dans la mesure du possible, je désignerai par μ, ν, $\lambda = \mu+\nu$, et ξ les « composantes infinitésimalement elliptique, hyperbolique, semi-simple et nilpotente de f » (notions issues de $\mathfrak{g}$ à l'aide de $\langle\ ,\ \rangle$). On identifie $\mathfrak{g}(\lambda)^*$ à l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*$ nuls sur $\mathfrak{g}(\lambda)^{\perp^{\langle\, ,\, \rangle}}$.

(d) Soit $\mathfrak{m}$ le commutant dans $\mathfrak{g}$ d'un élément semi-simple X de $\mathfrak{g}$. Étant données des mesures de Haar $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{m}}$ sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{m}$, on pose pour tout $f \in \mathfrak{m}^*$:
$$\left|\Pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{m}}\right|(f) = \tfrac{1}{k!}\left|\left(B_f|_{[\mathfrak{g},X]^2}\right)^k(\omega)\right| \times \left(\mathrm{d}_{[\mathfrak{g},X]}(0)(\omega)\right)^{-1} \quad \text{(cf. (b) et conventions 1 (c))},$$
avec $k = \frac{1}{2}\dim[\mathfrak{g},X]$, $B_f = f([\cdot,\cdot])$, $\omega \in \bigwedge^{2k}[\mathfrak{g},X] \setminus \{0\}$, et $\mathrm{d}_{[\mathfrak{g},X]} = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}/\mathrm{d}_{\mathfrak{m}}$.

Les autres notations utilisées dans les énoncés sont accessibles au moyen de l'index des notations qui se trouve à la fin de cet article.

I. Les paramètres « forme linéaire »

La méthode des orbites, proposée initialement par A. Kirillov dans le cas des groupes de Lie nilpotents simplement connexes, consiste à paramétrer les représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie à l'aide des orbites de sa représentation coadjointe. Quand la représentation est traçable, son caractère au voisinage de l'élément neutre doit être relié à la transformée de Fourier (à supposer qu'elle existe) de la mesure canonique sur l'orbite associée.

Une légère modification de ce point de vue va être nécessaire ici. À chaque représentation tempérée irréductible de G sera associée une orbite $\widetilde{\Omega}$ de G dans un certain ensemble $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ autre que $\mathfrak{g}^*$, et à cette orbite $\widetilde{\Omega}$ sera attachée une somme finie de mesures canoniques sur des orbites coadjointes. En vue d'un prochain article, j'introduis aussi ci-dessous des parties $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_I$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{Inc}$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$.

Je vais exploiter dans cette partie certains résultats de W. Rossmann.

1. Les paramètres $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg,G}$

On construit dans cette section un ensemble $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ muni d'une action de G dans lequel l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ semi-simples régulières s'injectera de manière G-équivariante.

Définition 1.1. On note $\mathfrak{g}^*_{reg}$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ régulières (c'est-à-dire l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ pour lesquelles la dimension de $\mathfrak{g}(f)$ est égale au rang de $\mathfrak{g}$), $\mathfrak{g}^*_{ss}$ l'ensemble des $f \in \mathfrak{g}^*$ semi-simples et $\mathfrak{g}^*_{ss\,reg} = \mathfrak{g}^*_{ss} \cap \mathfrak{g}^*_{reg}$.

On note aussi $\mathfrak{g}^*_{ssI}$ (respectivement: $\mathfrak{g}^*_{ssInc}$) l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{g}^*_{ss}$ telles que $\mathfrak{g}(\lambda)$ a une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}$ pour laquelle les racines de $(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ sont imaginaires (respectivement: imaginaires non compactes).

Soient $\lambda\in \mathfrak{g}^*_{ss}$ et $\mathfrak{h}\in \operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda)$. On note $C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$ l'ensemble des chambres (ouvertes) dans $\mathfrak{h}^*_{(\mathbb{R})}$ pour les racines imaginaires de $(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et $C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})_{reg}$ l'ensemble des $\mathcal{F}^+\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$ telles que les racines imaginaires de $(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ qui sont simples relativement à $\mathcal{F}^+$ sont non compactes.

On pose $\quad \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg} = \Big\{(\lambda,\mathcal{F}^+)\,;\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss},\ \mathfrak{h}\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda) \text{ et } \mathcal{F}^+\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})_{reg}\Big\}$

et $\quad \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg,G} = \Big\{(\lambda,\mathcal{F}^+)\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg} \mid \forall Z\in \operatorname{Ker}\exp_{T_0}\ \ e^{(\mathrm{i}\,\lambda+\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}})(Z)}=1\Big\}$

indépendamment du choix d'un système de racines positives $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ associé à l'élément $\mathfrak{h}$ de $\operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda)$ attaché à $\mathcal{F}^+$.

On pose aussi

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond} = \Big\{(\lambda,\mathcal{F}^+)\,;\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss},\ \mathfrak{h}\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda) \text{ fondamentale et } \mathcal{F}^+\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})_{reg}\Big\}$$

$$\text{et}\quad \mathfrak{g}^*_{ssfond,G} = \Big\{\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss} \mid \forall Z\in \operatorname{Ker}\exp_{T_0}\ \ e^{(\mathrm{i}\,\lambda+\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}})(Z)}=1\Big\}$$

indépendamment du choix d'une $\mathfrak{h}\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda)$ fondamentale et d'un système de racines positives $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, $\mathfrak{g}^*_{ssI,G}=\mathfrak{g}^*_{ssI}\cap\mathfrak{g}^*_{ssfond,G}$ et $\mathfrak{g}^*_{ssInc,G}=\mathfrak{g}^*_{ssInc}\cap\mathfrak{g}^*_{ssfond,G}$.

On note ensuite $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{I}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{Inc}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond,G}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{I,G}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{Inc,G}$ les images réciproques de $\mathfrak{g}^*_{ssI}$, $\mathfrak{g}^*_{ssInc}$, $\mathfrak{g}^*_{ssfond,G}$, $\mathfrak{g}^*_{ssI,G}$ et $\mathfrak{g}^*_{ssInc,G}$ par la première projection de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$ dans $\mathfrak{g}^*_{ss}$.

Remarque 1.2. **(1)** En appliquant [Ros 82, th. p. 217] à $\mathfrak{g}(\lambda)$ pour trois sous-algèbres de Cartan (une égale à $\mathfrak{h}$, une sans racine imaginaire, une fondamentale) et tenant compte de [Ros 82, lem. A $(a)\Rightarrow(c)$ p. 220 et suppl. C p. 218], on constate que les images des applications canoniques de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$ dans $\mathfrak{g}^*$ sont formées des $\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss}$ tels que $\mathfrak{g}(\lambda)$ a une sous-algèbre de Cartan sans racine imaginaire.

(2) D'après [Kna 96, th. 6.74 p. 341 et th. 6.88 p. 344], chaque algèbre de Lie semi-simple complexe a, à isomorphisme près, une unique forme réelle $\mathfrak{g}_0$ qui possède une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_0$ pour laquelle le système de racines $R(\mathfrak{g}_{0\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{0\mathbb{C}})$ a une base constituée de racines imaginaires non compactes. Compte tenu de (1) ci-dessus (ou de [Kna 96, pb. 18 p. 369 et p. 557]), l'image de l'application canonique de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{I}$ dans $\mathfrak{g}^*$ est formée des $\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss}$ tels que chacun des idéaux simples de $\mathfrak{g}(\lambda)$ est isomorphe à l'une des algèbres de Lie suivantes:
$\mathfrak{su}(p,p)$ avec $p\geq 1$ et $\mathfrak{su}(p,p-1)$ avec $p\geq 2$, $\mathfrak{so}(p,p-1)$ avec $p\geq 3$, $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$ (notée $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$ dans [Kna 96]) avec $n\geq 3$, $\mathfrak{so}(p,p)$ avec p pair ≥ 4 et $\mathfrak{so}(p,p-2)$ avec p pair ≥ 6, $E\,II$, $E\,V$, $E\,VIII$, $F\,I$, G.

(3) La somme de deux racines imaginaires non compactes n'est jamais une racine non compacte d'après [Kna 96, (6.99) p. 352]. Ainsi, $\mathfrak{g}^*_{ssInc}$ est formé des $\lambda\in\mathfrak{g}^*$ semi-simples telles que les idéaux simples de l'algèbre de Lie réductive $\mathfrak{g}(\lambda)$ sont isomorphes à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. ∎

À partir de certains paramètres enrichis $(\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+})$, je vais construire canoniquement deux systèmes de racines positives pour $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, qui auront les mêmes racines non complexes. Le système de racines positives $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est attaché à une certaine forme linéaire régulière λ_+. Il permettra, par des passages à la limite (section 11.) et par une translation (section 13.), de construire dans la partie III. des représentations en se ramenant au cas d'un caractère infinitésimal régulier. Le système de racines positives $R^+_{\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}$ a pour sous-ensemble de racines complexes à conjuguée négative, une partie invariante sous l'action du groupe $G(\widetilde{\lambda})$ défini ci-dessous. Il interviendra dans la définition 5.5 (c) et dans le lemme 9.3 (b). On verra dans le lemme 9.1 une autre paramétrisation des classes de représentations dans laquelle le paramètre $(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ sera remplacé par $\widetilde{\lambda}$, et le rôle de $(R^+_{\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}, \lambda_+)$ sera tenu par un certain couple $(R^+_{\widetilde{\lambda}}, \lambda_{can})$ déduit de $\widetilde{\lambda}$.

Définition 1.3. Soient $\lambda \in \mathfrak{g}^*_{ss}$, $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car} \mathfrak{g}(\lambda)$ et $\mathcal{F}^+ \in C(\mathfrak{g}(\lambda), \mathfrak{h})$. On note μ et ν (resp. $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$) les composantes infinitésimalement elliptique et hyperbolique de λ (resp. $\mathfrak{h}$). On pose $\widetilde{\lambda} = (\lambda, \mathcal{F}^+)$.

(a) On note $G(\widetilde{\lambda})$ le normalisateur de $\mathcal{F}^+$ dans $G(\lambda)$ et $\mathfrak{g}(\widetilde{\lambda})$ son algèbre de Lie. On associe à $\widetilde{\lambda}$ la demi-somme $\rho_{\mathcal{F}^+} \in \mathrm{i}\mathfrak{t}^*$ des $\alpha \in R(\mathfrak{g}(\lambda)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ imaginaires tels que $\mathcal{F}^+(H_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. (Ainsi $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$ sans racine imaginaire, et donc $G \cdot (\lambda, \mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$ détermine $G \cdot \widetilde{\lambda}$.)

On fixe pour la suite de cette définition une chambre $\mathfrak{a}^{*+}$ de $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}), \mathfrak{a})$.

(b) On introduit le système de racines positives suivant :

$$R^+(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) = \{\, \alpha \in R(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) \mid \mathfrak{a}^{*+}(H_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\,\}.$$

On fixe $\epsilon > 0$ assez petit pour que, en posant $\nu_+ = \nu + \epsilon\, \rho_{\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{h}} \in \mathfrak{a}^*$ on ait : $a \cdot \nu_+ \neq \nu_+$ pour tout automorphisme a du système de racines $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ tel que $a \cdot \nu \neq \nu$. On choisit même ϵ de façon que la propriété précédente reste valable quand on remplace ϵ par $t\epsilon$, $t \in]0,1]$. On a donc : $\mathfrak{g}(\nu_+) = \mathfrak{g}(\nu)(\rho_{\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{h}})$.

On utilisera les systèmes de racines positives suivants :

$$R^+(\mathfrak{g}(\nu_+)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) = \left\{ \alpha \in R(\mathfrak{g}(\nu_+)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) \;\middle|\; \mathrm{i}\mu(H_\alpha) > 0 \text{ ou } \left\{ \begin{smallmatrix} \mathrm{i}\mu(H_\alpha)=0 \\ \text{et} \\ \rho_{\mathcal{F}^+}(H_\alpha)>0 \end{smallmatrix} \right. \right\}$$

et $\quad R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) = \{\alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) \mid \nu_+(H_\alpha) > 0\} \cup R^+(\mathfrak{g}(\nu_+)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$.

On pose $\mu_+ = \mu - 2\mathrm{i}\rho_{\mathfrak{g}(\nu_+),\mathfrak{h}} \in \mathfrak{t}^*$ et $\lambda_+ = \mu_+ + \nu_+$
(donc $R^+(\mathfrak{g}(\nu_+)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) = \{\, \alpha \in R(\mathfrak{g}(\nu_+)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) \mid \mathrm{i}\mu_+(H_\alpha) > 0\}$).

Dans certains cas on notera $\lambda_{\mathfrak{g},\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\epsilon}$, $\mu_{\mathfrak{g},\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}$ et $\nu_{\mathfrak{g},\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\epsilon}$ pour λ_+, μ_+ et ν_+.

(c) On introduit l'ensemble

$$R^+_{\widetilde{\lambda}} = \left\{ \alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) \;\middle|\; \nu(H_\alpha) > 0 \text{ ou } \left\{ \begin{smallmatrix} \nu(H_\alpha)=0 \\ \text{et} \\ \mathrm{i}\mu(H_\alpha)>0 \end{smallmatrix} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{smallmatrix} \lambda(H_\alpha)=0 \\ \text{et} \\ \rho_{\mathcal{F}^+}(H_\alpha)>0 \end{smallmatrix} \right. \right\},$$

la demi-somme ρ_{can} des éléments de $R^+_{\widetilde{\lambda}} \cap R(\mathfrak{g}(\nu)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$, et le système de racines positives $R^+_{\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}} = R^+_{\widetilde{\lambda}} \cup R^+(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ de $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$.

On pose $\mu_{can} = \mu - 2\mathrm{i}\rho_{can} \in \mathfrak{t}^*$ et $\lambda_{can} = \mu_{can} + \nu$
(donc en utilisant [KV 95, cor. 4.69 p. 271], on constate que $\mathfrak{g}(\lambda_{can}) = \mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$ et $R^+_{\widetilde{\lambda}} \cap R(\mathfrak{g}(\nu)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) = \{\, \alpha \in R(\mathfrak{g}(\nu)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C}) \mid \mathrm{i}\mu_{can}(H_\alpha) > 0\}$).

Voici maintenant le lemme clef qui permettra de se ramener de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ à $\mathfrak{g}^*_{ss\,reg}$.

Lemme 1.4. *On se place dans les conditions de la définition précédente. Soit* $t \in]0,1]$. *On pose* $\nu_t = \nu + t\epsilon\, \rho_{\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{h}}$, $\mu_t = \mu - 2\mathrm{i}t\rho_{\mathfrak{g}(\nu_+),\mathfrak{h}}$ *et* $\lambda_t = \mu_t + \nu_t$.

On a : $\mathfrak{g}(\widetilde{\lambda}) = \mathfrak{h}$, $\lambda_t \in \mathfrak{g}^*_{ss\,reg}$ *et* $\mathrm{N}_{G(\tilde{\lambda})}(\mathfrak{a}^{*+}) = G(\lambda_t)$.

Donc $G(\lambda_+) = G(\widetilde{\lambda})$ *quand* $\mathfrak{a}^{*+} = \mathfrak{a}^*$ *(par exemple quand* $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_I$*).*

Démonstration du lemme. On a $G(\widetilde{\lambda}) \subseteq \mathrm{N}_G(\mathfrak{h})$, donc $\mathfrak{g}(\widetilde{\lambda}) = \mathfrak{h}$.

Par construction de ϵ, on a $\mathfrak{g}(\nu_t) = \mathfrak{g}(\nu)(\rho_{\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{h}}) = \mathfrak{g}(\nu_+)$. En outre, on a $\mathrm{i}\mu_t(H_\alpha) = \mathrm{i}\mu(H_\alpha) + 2t\rho_{\mathfrak{g}(\nu_+),\mathfrak{h}}(H_\alpha) > 0$ pour tout $\alpha \in R^+(\mathfrak{g}(\nu_+)_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Donc $\lambda_t \in \mathfrak{g}^*_{ss\,reg}$. Un argument de continuité en t permet d'en déduire que :

$$R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \left\{ \alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \;\middle|\; \nu_t(H_\alpha) > 0 \text{ ou } \left\{ \begin{smallmatrix} \nu_t(H_\alpha)=0 \\ \text{et} \\ \mathrm{i}\mu_t(H_\alpha)>0 \end{smallmatrix} \right. \right\}.$$

L'inclusion $\mathrm{N}_{G(\tilde{\lambda})}(\mathfrak{a}^{*+}) \subseteq G(\lambda_t)$ est immédiate. Soit $g \in G(\lambda_t)$. On a $g \cdot \mathfrak{h} = g \cdot \mathfrak{g}(\lambda_t) = \mathfrak{h}$ et $(\operatorname{Ad} g)|_{\mathfrak{h}}$ est un automorphisme du système de racines $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ tel que $g \cdot \nu_t = \nu_t$, donc $g \cdot (\nu_t - \nu) = (\nu_t - \nu)$ puis $g \cdot \nu_+ = \nu_+$. Comme g laisse stable $R(\mathfrak{g}(\nu_+)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cap R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on a: $g \cdot \rho_{\mathfrak{g}(\nu_+),\mathfrak{h}} = \rho_{\mathfrak{g}(\nu_+),\mathfrak{h}}$ puis $g \cdot \mu = \mu$. Ensuite, comme g laisse stable l'ensemble des racines imaginaires de $R(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cap R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on a: $g \cdot \mathcal{F}^+ = \mathcal{F}^+$. Enfin, comme g laisse stable l'ensemble des $\alpha_{|\mathfrak{a}}$ avec $\alpha \in R(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \cap R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on a: $g \cdot \mathfrak{a}^{*+} = \mathfrak{a}^{*+}$. □

Le lemme qui suit expliquera pourquoi, dans certaines formules que j'écrirai plus tard dans un autre article, et dans lesquelles apparaissent en facteur les valeurs absolues de Pfaffiens $\left|\Pi_{\mathfrak{g},\mathrm{C}_{\mathfrak{g}(\mu)}(\mathfrak{a})}\right|$, seuls interviennent les éléments de $\mathfrak{g}^*_{ssI}$.

Pour rendre ces Pfaffiens plus accessibles au calcul, je précise d'abord une formule de [DV 88, p. 301]. La forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ des conventions 2 (b) détermine une mesure de Haar d_V sur tout sous-espace vectoriel V de $\mathfrak{g}$ sur lequel elle a une restriction non dégénérée, par la condition $\mathrm{d}_V(0)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = |\det(\langle v_i, v_j\rangle)_{1\le i,j\le n}|^{\frac{1}{2}}$ pour toute base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V. Soit $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$. On fixe $\lambda_0 = \mu_0 + \nu_0 \in \mathfrak{h}^*$ régulière dans $\mathfrak{g}^*$. On lui associe le système de racines positives

$$R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \left\{ \alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \;\middle|\; \nu_0(H_\alpha) > 0 \text{ ou } \left\{ \begin{smallmatrix} \nu_0(H_\alpha)=0 \\ \text{et} \\ \mathrm{i}\mu_0(H_\alpha)>0 \end{smallmatrix} \right. \right\}.$$

On prend pour $\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{d}_{\mathfrak{h}}$ les mesures de Haar sur $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ déduites de $\langle\ ,\ \rangle$. Pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et tout $\omega_0 \in \bigwedge^{2k}[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]\backslash\{0\}$ élément de l'orientation $\mathcal{O}(B_{\lambda_0})_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ (cf. 4.2 (b) et 5.1 (a)) de $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, B_{\lambda_0})$, on a

$$(*) \quad \tfrac{1}{k!}\left(B_\lambda|_{[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]^2}\right)^k(\omega_0) \times \left(\mathrm{d}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]}(0)(\omega_0)\right)^{-1} = \mathrm{i}^{n_0} \prod_{\alpha \in R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \langle \lambda, \alpha \rangle$$

avec $k = \frac{1}{2}\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$, $\mathrm{d}_{[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]} = \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}/\mathrm{d}_{\mathfrak{h}}$ et $n_0 = \left|\{\alpha \in R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \mid \overline{\alpha} \notin R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\}\right|$, en notant encore $\langle\ ,\ \rangle$ la forme bilinéaire sur $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ duale de la restriction à $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ de $\langle\ ,\ \rangle$.

Lemme 1.5. *Soit $f \in \mathfrak{g}^*$ de composantes infinitésimalement elliptique, hyperbolique, semi-simple et nilpotente μ, ν, $\lambda = \mu + \nu$ et ξ. On fixe $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$ telle que $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On note $\mathfrak{a}$ la composante hyperbolique de $\mathfrak{h}$.*

(a) *On a $f \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ si et seulement si $\xi \in \mathfrak{g}(\lambda)^*_{reg}$.*

(b) *On a $\lambda \in \mathfrak{g}^*_{ssI}$ et $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda)$ est fondamentale, si et seulement si $\left|\Pi_{\mathfrak{g},\mathrm{C}_{\mathfrak{g}(\mu)}(\mathfrak{a})}\right|(\lambda) \neq 0$.*

Démonstration du lemme. **(a)** Il est clair que l'égalité $\dim \mathfrak{g}(f) = \operatorname{rg} \mathfrak{g}$ équivaut à $\dim \mathfrak{g}(\lambda)(\xi) = \operatorname{rg} \mathfrak{g}(\lambda)$.

(b) Pour tous $X \in \mathfrak{h}$ et $\lambda' \in \mathfrak{h}^*$, les sous-espaces vectoriels supplémentaires $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}(X)] = [\mathfrak{g}, X]$ et $[\mathfrak{g}(X), \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{g}(X)$ de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ étant à la fois orthogonaux pour $B_{\lambda'}$ et pour $\langle\ ,\ \rangle$, on a: $\left|\Pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}\right|(\lambda') = \left|\Pi_{\mathfrak{g},\mathfrak{g}(X)}\right|(\lambda') \times \left|\Pi_{\mathfrak{g}(X),\mathfrak{h}}\right|(\lambda')$. En choisissant $X \in \mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{g}(X) = \mathrm{C}_{\mathfrak{g}(\mu)}(\mathfrak{a})$, on trouve d'après $(*)$ que:

$$\left|\Pi_{\mathfrak{g},\mathrm{C}_{\mathfrak{g}(\mu)}(\mathfrak{a})}\right|(\lambda) = \prod_{\substack{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ \alpha \notin R(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}(\mu)}(\mathfrak{a})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})}} |\langle \lambda, \alpha \rangle|^{\frac{1}{2}}.$$

Cela donne le résultat. □

2. Les mesures $\beta_{G\cdot\tilde{\lambda}}$

On va maintenant attacher à chaque orbite $\widetilde{\Omega} \in G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ une mesure de Radon $\beta_{\widetilde{\Omega}}$ sur $\mathfrak{g}^*$ de façon que $\beta_{G\cdot\tilde{\lambda}}$ coïncide avec la mesure canonique sur $G\cdot\lambda$ quand $\lambda \in \mathfrak{g}^*_{ss\ reg}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(\lambda)$ et $\widetilde{\lambda} = (\lambda, \mathfrak{h}_{(\mathbb{R})}^*)$.

Définition 2.1. Soient $\lambda \in \mathfrak{g}^*_{ss}$, $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}(\lambda)$ et $\mathcal{F}^+ \in C(\mathfrak{g}(\lambda), \mathfrak{h})$.

(a) On note $\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{a}^* + \mathfrak{t}^{*+}$, où $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$ sont les composantes infinitésimalement elliptique et hyperbolique de $\mathfrak{h}$ et $\mathcal{F}^+$ s'écrit $\mathcal{F}^+ = \mathfrak{a}^* + i\mathfrak{t}^{*+}$ avec $\mathfrak{t}^{*+} \subseteq \mathfrak{t}^*$.

(b) On note $\mathrm{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(G\cdot(\lambda, \mathcal{F}^+))$ la réunion dans $\mathfrak{g}^*_{reg}$ des $G\cdot(\omega + \{\lambda\})$, où ω décrit l'ensemble des orbites nilpotentes régulières de $G(\lambda)$ dans $\mathfrak{g}(\lambda)^*$ incluses dans l'adhérence de $G(\lambda)\cdot\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}$ (cf. le lemme 1.5 (a) et la remarque 2.4 (1)).

La proposition suivante est donnée dans le but de faciliter l'utilisation de la formule du caractère 10.2. Elle permettra aussi, dans certains cas, de passer directement des caractères des représentations aux paramètres associés (cf. 9.7).

Proposition 2.2. **(a)** *L'ensemble $G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$ est en bijection avec $G\backslash\mathfrak{g}^*_{reg}$ par l'application R_G qui envoie $G\cdot\widetilde{\lambda}$ sur* $\mathrm{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(G\cdot\widetilde{\lambda})$.

(b) *Soient $\lambda \in \mathfrak{g}^*_{ss}$, $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}(\lambda)$ et $\mathcal{F}^+ \in C(\mathfrak{g}(\lambda), \mathfrak{h})$.*
La partie $\mathrm{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(G\cdot(\lambda, \mathcal{F}^+))$ *de $\mathfrak{g}^*_{reg}$ est la réunion des $R_G(G\cdot(\lambda, \mathcal{F}'^+))$ avec $\mathfrak{h}' \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}(\lambda)$ fondamentale et $\mathcal{F}'^+ \in C(\mathfrak{g}(\lambda), \mathfrak{h}')_{reg}$ vérifiant $G(\lambda)\cdot\rho_{\mathcal{F}^+} \cap \overline{\mathcal{F}'^+} \neq \emptyset$.*

Démonstration de la proposition. **(a)** Soit tout d'abord $(\lambda, \mathcal{F}^+) \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$. D'après [Ros 82, th. p. 217 et suppl. A(b) p. 218] appliqué à $G_0(\lambda)$, il existe une unique orbite nilpotente régulière ω_0 de $G_0(\lambda)$ dans $\overline{G_0(\lambda)\cdot\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}}$. L'ensemble $\omega := G(\lambda)\cdot\omega_0$ est donc une orbite nilpotente régulière de $G(\lambda)$ dans $\overline{G(\lambda)\cdot\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}}$. Toute orbite nilpotente régulière ω' de $G(\lambda)$ dans $\overline{G(\lambda)\cdot\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}}$ coupe $u\cdot\overline{G_0(\lambda)\cdot\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}}$ pour un certain $u \in G(\lambda)$, donc vérifie $\omega' \supseteq u\cdot\omega_0$ puis $\omega' = \omega$.
Cela permet de définir R_G.

On abandonne maintenant les notations du début de cette démonstration.

Soit $f \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ de composantes semi-simple et nilpotente λ et ξ.

On fixe $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}(\lambda)$ fondamentale. D'après le lemme 1.5 (a) et [Ros 82, lem. A p. 220], on peut passer par une suite finie de transformations de Cayley inverses (cf. [Ros 82, p. 218]) de $\mathfrak{h}$ à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}(\lambda)$ sans racine imaginaire. D'après [Ros 82, suppl. A(a) et B et C p. 218, et th. p. 221], il existe $\mathcal{F}^+ \in C(\mathfrak{g}(\lambda), \mathfrak{h})_{reg}$ unique à l'action de $\mathrm{N}_{G_0(\lambda)}(\mathfrak{h})$ près pour lequel $\omega_0 := G_0(\lambda)\cdot\xi$ est l'orbite nilpotente régulière de $G_0(\lambda)$ dans $\overline{G_0(\lambda)\cdot\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}}$. Ainsi, $G\cdot f$ est l'image de $G\cdot(\lambda, \mathcal{F}^+)$ par R_G.

Soit $G\cdot(\lambda', \mathcal{F}'^+)$ un antécédent de $G\cdot f$ par R_G. On a $\mathcal{F}'^+ \in C(\mathfrak{g}(\lambda'), \mathfrak{h}')_{reg}$ pour une certaine $\mathfrak{h}' \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}(\lambda')$ fondamentale. On note ω'_0 l'orbite nilpotente régulière de $G_0(\lambda')$ dans $\overline{G_0(\lambda')\cdot\mathcal{F}'^+_{\mathfrak{h}'}}$. Vu le début de cette démonstration, il existe $g \in G$ tel que $g\xi \in \omega'_0$ et $g\lambda = \lambda'$. Les sous-algèbres de Cartan $\mathfrak{h}$ et $g^{-1}\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}(\lambda)$ étant fondamentales, il existe $x \in G(\lambda)_0$ tel que $g^{-1}\mathfrak{h}' = x\mathfrak{h}$. Par conséquent, ω_0 qui est égal à $g^{-1}\omega'_0$ est aussi l'orbite nilpotente régulière de $G_0(\lambda)$ dans $\overline{G_0(\lambda)\cdot x^{-1}g^{-1}\mathcal{F}'^+}$. D'où : $x^{-1}g^{-1}\cdot(\lambda', \mathcal{F}'^+) \in \mathrm{N}_{G_0(\lambda)}(\mathfrak{h})\cdot(\lambda, \mathcal{F}^+)$. Il s'ensuit que $G\cdot(\lambda, \mathcal{F}^+)$ est l'unique antécédent de $G\cdot f$ par R_G.

(b) Avec un argument du début de la démonstration du (a), on constate que $\operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(G\cdot(\lambda,\mathcal{F}^+))$ est le saturé sous G de $\operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(G_0\cdot(\lambda,\mathcal{F}^+))$. On est donc ramené à prouver le (b) pour G_0 avec $\lambda = 0$. On se place dans ce cas. On fixe une sous-algèbre de Cartan fondamentale $\mathfrak{h}'$ de $\mathfrak{g}$ qui contient la forme linéaire infinitésimalement elliptique $-\mathrm{i}\,\rho_{\mathcal{F}^+}$. On pose $l_0 = -\mathrm{i}\,\rho_{\mathcal{F}^+}$ dans $\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}$. On va reprendre rapidement les idées de [Ros 82, proof of suppl. C p. 228].

D'après [Var 77, th. 23 p. 50] et [Ros 82, $(L1)\Leftrightarrow(L2)\Leftrightarrow(L3)$ p. 216], on a:

$$\sum_{\Omega\,\in\, G_0\backslash \operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(G_0\cdot(0,\mathcal{F}^+))} \beta_\Omega(\varphi) \;=\; \lim_{t\to 0^+}\sum_{\Omega'\in L_t}\beta_{\Omega'}(\varphi) \quad \text{pour tout } \varphi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}^*),$$

où *on utilise 2.3 (c)* et pose $L_t = \lim\limits_{\substack{l'\in\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}\cap\,\mathfrak{g}^*_{reg}\\ l'\to tl_0}} G_0\cdot l'$ dans $G_0\backslash\mathfrak{g}^*_{reg}$ quand $t>0$.

Par [Ros 82, lignes 2 à 9 p. 217], l'application canonique de $G_0(l_0)\backslash\mathfrak{g}(l_0)^*_{reg}$ dans $G_0\backslash\mathfrak{g}^*_{reg}$ se restreint en une bijection de $\lim\limits_{\substack{l''\in\mathcal{F}^+[l_0]_{\mathfrak{h}}\cap\,\mathfrak{g}(l_0)^*_{reg}\\ l''\to tl_0}} G_0(l_0)\cdot l''$ sur L_t pour tout $t>0$, où la limite est prise dans $G_0(l_0)\backslash\mathfrak{g}(l_0)^*_{reg}$ et $\mathcal{F}^+[l_0]$ est l'élément de $C(\mathfrak{g}(l_0),\mathfrak{h})$ contenant $\mathcal{F}^+$.

Les racines de $(\mathfrak{g}(l_0)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ sont non imaginaires et celles de $(\mathfrak{g}(l_0)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}'_{\mathbb{C}})$ sont non réelles. D'après [Ros 82, suppl. C p. 218], on en déduit que:

$$\lim_{\substack{l''\in\mathcal{F}^+[l_0]_{\mathfrak{h}}\cap\,\mathfrak{g}(l_0)^*_{reg}\\ l''\to tl_0}} G_0(l_0)\cdot l'' \;=\; \bigcup_{\dot{\mathcal{F}'^+}\,\in\, W(G_0(l_0),\mathfrak{h}')\backslash\mathcal{E}} \;\lim_{\substack{l''\in\mathcal{F}'^+[l_0]_{\mathfrak{h}'}\cap\,\mathfrak{g}(l_0)^*_{reg}\\ l''\to tl_0}} G_0(l_0)\cdot l''$$

où $\mathcal{E} := \left\{\mathcal{F}'^+\in C(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')\;\middle|\; l_0\in\overline{\mathcal{F}'^+_{\mathfrak{h}'}}\right\}$ et $\mathcal{F}'^+[l_0]$ est l'élément de $C(\mathfrak{g}(l_0),\mathfrak{h}')$ contenant $\mathcal{F}'^+$. En outre, la réunion précédente est une réunion d'ensembles deux à deux disjoints au vu de [Ros 82, suppl. B p. 218].

Les mesures de Radon β_Ω avec $\Omega\in G_0\backslash\mathfrak{g}^*_{reg}$ (cf. 2.3 (c)) sont linéairement indépendantes. À l'aide de [Ros 82, th. p. 217], on trouve que $\operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(G_0\cdot(0,\mathcal{F}^+))$ est réunion disjointe des $R_{G_0}(G_0\cdot(0,\mathcal{F}'^+))$ où $\dot{\mathcal{F}'^+}\in W(G_0(l_0),\mathfrak{h}')\backslash C(\mathfrak{g},\mathfrak{h}')_{reg}$ et $\rho_{\mathcal{F}^+}\in\overline{\mathcal{F}'^+}$. Cela conduit au résultat. □

Définition 2.3. **(a)** On note $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ la fonction sur $\mathfrak{g}$ dont la valeur en $X\in\mathfrak{g}$ est le coefficient de T^r dans $\det(T\,\mathrm{id}-\operatorname{ad}X)$, où r est le rang de $\mathfrak{g}$. Elle est polynomiale et invariante sous $\operatorname{Ad}G$.

(b) On note $\mathfrak{g}_{ss\,reg}$ l'ensemble des $X\in\mathfrak{g}$ semi-simples tels que $\mathfrak{g}(X)$ est commutative. Donc $\mathfrak{g}_{ss\,reg}$ est l'ouvert dense de complémentaire négligeable de $\mathfrak{g}$ formé des points où $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}$ ne s'annule pas (cf. [Var 77, (2) et lem. 1 p. 9]).

(c) Soit $\Omega\in G\backslash\mathfrak{g}^*$. On note β_Ω la mesure positive image sur $\mathfrak{g}^*$ de la mesure de Liouville de la variété symplectique Ω (cf. [B.. 72, 2.6 p. 20]). C'est une mesure de Radon sur $\mathfrak{g}^*$ (cf. [Ran 72, th. 2 p. 509]).

(d) Soit $\widetilde{\Omega}_0\in G_0\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$. On pose $\beta_{\widetilde{\Omega}_0} = \sum\limits_{\Omega_0\,\in\, G_0\backslash\operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(\widetilde{\Omega}_0)}\beta_{\Omega_0}$.

(e) Soit $\widetilde{\Omega}\in G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$. On pose $\beta_{\widetilde{\Omega}} = \sum\limits_{\widetilde{\Omega}_0\,\in\, G_0\backslash\widetilde{\Omega}}\beta_{\widetilde{\Omega}_0}$ (cf. fin 2.6 (a)).

Remarque 2.4. **(1)** Soit $\widetilde{\Omega}\in G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$. D'après le début de la démonstration de la proposition 2.2 (b), l'ensemble $\operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(\widetilde{\Omega})$ est la réunion des orbites $\Omega\in G\backslash\mathfrak{g}^*_{reg}$ telles que $\beta_{\widetilde{\Omega}}(\Omega)\neq 0$.

Il découle aussi de la définition ci-dessus que $\beta_{\widetilde{\Omega}} = \sum_{\Omega_0 \in G_0 \setminus \operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(\widetilde{\Omega})} m_{\Omega_0}\, \beta_{\Omega_0}$ où m_{Ω_0} est le nombre (non nul) de $\widetilde{\Omega}_0 \in G_0\backslash\widetilde{\Omega}$ vérifiant $\Omega_0 \subseteq \operatorname{Supp}_{\mathfrak{g}^*}(\widetilde{\Omega}_0)$.
En particulier : $\beta_{\widetilde{\Omega}} = \beta_{R_G(\widetilde{\Omega})}$ quand $\widetilde{\Omega} \in G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$.

(2) L'exemple de G égal au produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $SL(2,\mathbb{R})^2$ où l'élément non trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur $SL(2,\mathbb{R})^2$ par permutation des coordonnées, et de $\widetilde{\Omega}$ de la forme $G\cdot(0,\mathcal{F}^+)$ pour une chambre $\mathcal{F}^+$ associée à $\mathfrak{h} \in \operatorname{Car}\mathfrak{g}$ ni fondamentale ni déployée, montre que les coefficients m_{Ω_0} du (1) ci-dessus peuvent prendre des valeurs différentes de 1.

(3) D'après (1) et 2.2 (a), l'application $\widetilde{\Omega} \mapsto \beta_{\widetilde{\Omega}}$ est injective sur $G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$.

Quand $G = SL(3,\mathbb{R})$, les deux éléments $\widetilde{\Omega}$ de $G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ de la forme $G\cdot(0,\mathcal{F}^+)$ (dont l'un est dans $G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$) correspondent à une même mesure $\beta_{\widetilde{\Omega}}$, égale à la mesure de Liouville de l'unique orbite nilpotente régulière de G dans $\mathfrak{g}^*$. ■

Voici un résultat bien connu. Comme le (b) ne me sera pas utile, je me contente d'en donner une démonstration abrégée, suggérée par J.-Y. Charbonnel.

Proposition 2.5. **(a)** *La fonction* $|\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}|^{-1/2}$ *est localement intégrable sur* $\mathfrak{g}$.

(b) *Les mesures de Radon* β_Ω *sur* $\mathfrak{g}^*$ *avec* $\Omega \in G\setminus\mathfrak{g}^*$ *sont tempérées.*

(c) *Soit* $\Omega \in G\setminus\mathfrak{g}^*$. *La fonction généralisée* $\widehat{\beta}_\Omega$ *est (la classe modulo l'égalité presque partout d') une fonction localement intégrable sur* $\mathfrak{g}$ *et analytique sur* $\mathfrak{g}_{ss\ reg}$.

Démonstration de la proposition. **(a)** Cette première assertion est démontrée dans [Var 77, prop. 15 p. 66].

(b) On considère un groupe linéaire algébrique réel H. On note $\mathfrak{h}$ son algèbre de Lie. On se donne une orbite coadjointe Ω de H dont la mesure de Liouville β_Ω est une mesure de Radon sur $\mathfrak{h}^*$. On reprend les arguments de [Cha 96, 3.2 p. 220]. Soient W_0 un ouvert de $\mathbb{P}(\mathfrak{h}^*\times\mathbb{R})$ correspondant à la non-nullité d'une coordonnée homogène, et U un ouvert relativement compact dans W_0 pour la topologie usuelle. On construit une certaine fonction régulière $q : U \to \mathbb{R}^+\setminus\{0\}$. Soit $s\in\mathbb{C}$. D'après [Cha 96, p. 217], l'application qui à $\phi \in C_c^\infty(\mathfrak{h}^*\cap U)$ associe l'intégrale (holomorphe en s) $\int_{\Omega\cap U} q(l)^s\,\phi(l)\,\mathrm{d}\beta_\Omega(l)$ est continue pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathfrak{h}^*)$. Il en résulte que la mesure β_Ω sur $\mathfrak{h}^*$ est tempérée.

(c) Voir [Var 77, prop. 13 p. 65, th. 17 p. 66, th. 28 p. 95, et bas p. 105]. □

La proposition suivante sera intéressante quand on voudra se ramener, par passage à la limite ou par translation, à des formes linéaires semi-simples régulières.

Proposition 2.6. *Soient* $\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss}$, $\mathfrak{h}\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda)$ *et* $\mathcal{F}^+\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$. *On pose* $\widetilde{\lambda} = (\lambda,\mathcal{F}^+)$. *On note* $\mathfrak{a}$ *la composante hyperbolique de* $\mathfrak{h}$, *et se donne une chambre* $\mathfrak{a}^{*+}$ *de* $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{a})$.

(a) *Les mesures positives* $\beta_{\widetilde{\Omega}}$ *avec* $\widetilde{\Omega}\in G\backslash\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ *sont des mesures de Radon tempérées. Soit* $\varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$. *On a*

$$\lim_{\substack{\lambda'\in\mathcal{F}^+_{\mathfrak{h}}\cap\,\mathfrak{g}^*_{reg}\\ \lambda'\to\lambda}} \left(|W(G,\mathfrak{h})(\lambda')|\ \beta_{G\cdot\lambda'}(\varphi)\right) = \begin{cases} |W(G,\mathfrak{h})(\lambda_+)|\ \beta_{G\cdot\widetilde{\lambda}}(\varphi) & \text{si } \widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

En particulier $\beta_{G\cdot\tilde\lambda}(\varphi)=\lim\limits_{t\to 0^+}\beta_{G\cdot\lambda_t}(\varphi)$ *quand* $\widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ *(cf. 1.4).*

(b) *Pour tout* $X\in\mathfrak{g}_{ss\,reg}$*, on a en tenant compte de 2.5 (c)*

$$\lim_{\substack{\lambda'\in\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^+\cap\,\mathfrak{g}^*_{reg}\\ \lambda'\to\lambda}}\Big(|W(G,\mathfrak{h})(\lambda')|\ \widehat{\beta}_{G\cdot\lambda'}(X)\Big)=\begin{cases}|W(G,\mathfrak{h})(\lambda_+)|\ \widehat{\beta}_{G\cdot\tilde\lambda}(X) & si\ \widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

En particulier $\beta_{G\cdot\tilde\lambda}(X)=\lim\limits_{t\to 0^+}\beta_{G\cdot\lambda_t}(X)$ *quand* $\widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ *(cf. 1.4).*

Plus précisément, étant donnés $\mathfrak{j}\in\mathrm{Car}\,\mathfrak{g}$*,* $y\in\mathrm{int}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ *pour lequel* $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}=y\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$*, un système de racines positives* $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ *de* $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$*, une composante connexe* Γ *de* $\mathfrak{j}\cap\mathfrak{g}_{ss\,reg}$ *et une composante connexe* $\mathfrak{h}^{*+}$ *de* $\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^+\cap\mathfrak{g}^*_{reg}$ *à laquelle* λ *est adhérent, il existe une famille* $(c_w)_{w\in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}$ *de nombres complexes telle que, pour tout* $X\in\Gamma$*, on ait*

$$\sum_{w\in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}c_w\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy\lambda'(X)}=\prod_{\alpha\in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}\alpha(X)\ \times\ \widehat{\beta}_{G_0\cdot\lambda'}(X)\quad quand\ \lambda'\in\mathfrak{h}^{*+}$$

et

$$\sum_{w\in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}c_w\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy\lambda(X)}=\begin{cases}\displaystyle\prod_{\alpha\in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})}\alpha(X)\ \times\ \widehat{\beta}_{G_0\cdot\tilde\lambda}(X) & si\ \widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}\\ 0 & sinon.\end{cases}$$

Démonstration de la proposition. **(a)** Soit $\varphi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}^*)$ positive. D'après [Ros 82, $(L1)\Leftrightarrow(L2)\Leftrightarrow(L3)$ p. 216, lignes 9 à 12 p. 217, et th. p. 217], on a

$$\lim_{\substack{\lambda'\in\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^+\cap\,\mathfrak{g}^*_{reg}\\ \lambda'\to\lambda}}\beta_{G_0\cdot\lambda'}(\varphi)=\begin{cases}\beta_{G_0\cdot\tilde\lambda}(\varphi) & \text{si } \widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathfrak{g}^*$. D'après [Var 77, (i) p. 40], il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que la famille formée des $\displaystyle\int_{\mathfrak{g}^*}(1+\|l\|)^{-N}\mathrm{d}\beta_{\Omega_0}(l)$ avec $\Omega_0\in G_0\backslash\mathfrak{g}^*_{ss\,reg}$ est bornée. On en déduit que $\beta_{G_0\cdot\tilde\lambda}$ est une mesure de Radon tempérée quand $\widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$, et que le passage à la limite ci-dessus reste valable en remplaçant la condition « $\varphi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}^*)$ positive » par « $\varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ ».

On obtient ensuite, pour tout $\varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$:

$$\lim_{\substack{\lambda'\in\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^+\cap\,\mathfrak{g}^*_{reg}\\ \lambda'\to\lambda}}\sum_{\dot x\in G/G_0}\beta_{G_0\cdot x\lambda'}(\varphi)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\dot x\in G/G_0}\beta_{G_0\cdot x\tilde\lambda}(\varphi) & \text{si } \widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On transforme d'abord la somme de gauche pour $\lambda'\in\mathcal{F}_{\mathfrak{h}}^+\cap\mathfrak{g}^*_{reg}$:

$$\sum_{\dot x\in G/G_0}\beta_{G_0\cdot x\lambda'}=|G(\lambda')G_0/G_0|\ \beta_{G\cdot\lambda'}=\frac{|W(G,\mathfrak{h})(\lambda')|}{|\mathrm{C}_G(\mathfrak{h})/\mathrm{C}_{G_0}(\mathfrak{h})|}\ \beta_{G\cdot\lambda'}\,.$$

Par ailleurs, les chambres de $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{a})$ sont conjuguées sous $\mathrm{N}_{G(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_0}(\mathfrak{a})$ et *a fortiori* sous $G_0(\widetilde\lambda)$, ce qui prouve que $G(\widetilde\lambda)=G_0(\widetilde\lambda)\ \mathrm{N}_{G(\tilde\lambda)}(\mathfrak{a}^{*+})$.

Quand $\widetilde\lambda\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$, on a donc d'autre part à l'aide du lemme 1.4 :

$$\sum_{\dot x\in G/G_0}\beta_{G_0\cdot x\tilde\lambda}=|G(\tilde\lambda)G_0/G_0|\ \beta_{G\cdot\tilde\lambda}=\frac{|W(G,\mathfrak{h})(\lambda_+)|}{|\mathrm{C}_G(\mathfrak{h})/\mathrm{C}_{G_0}(\mathfrak{h})|}\ \beta_{G\cdot\tilde\lambda}\,.$$

Cela fournit (a).

(b) L'avant dernière égalité de cet énoncé est extraite de [Var 77, th. 4 p. 108]. Elle montre que $\widehat{\beta}_{G_0\cdot\lambda'}$ converge simplement sur $\mathfrak{g}_{ss\,reg}$ vers une fonction G_0-invariante continue quand $\lambda'\to\lambda$ avec $\lambda'\in\mathfrak{h}^{*+}$. Soit $\psi\in C_c^\infty(\mathfrak{g}_{ss\,reg})$. D'après la démonstration de (a), on a

$$\lim_{\substack{\lambda'\in\mathfrak{h}^{*+}\\ \lambda'\to\lambda}} \int_{\mathfrak{g}_{ss\ reg}} \widehat{\beta}_{G_0\cdot\lambda'}(X)\ \psi(X)\ \mathrm{d}_{\mathfrak{g}}(X) = \begin{cases} \widehat{\beta}_{G_0\cdot\tilde{\lambda}}(\psi\,\mathrm{d}_{\mathfrak{g}}) & \text{si } \widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Compte tenu des majorations $\left|c_w\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy\lambda'(X)}\right| \le |c_w|$ de [Var 77, th. 7 p. 111], on voit que les fonctions G_0-invariantes $|\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}|^{1/2}\times\widehat{\beta}_{G_0\cdot\lambda'}$ sur $\mathfrak{g}_{ss\ reg}$ avec $\lambda'\in\mathfrak{h}^{*+}$ sont uniformément bornées. La proposition 2.5 (a) permet donc d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans le passage à la limite ci-dessus. D'où la dernière égalité de l'énoncé.

Le passage de G_0 à G se fait comme dans la démonstration du (a). □

3. Points fixés par un élément elliptique

On se donne un élément elliptique e de G.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(e)$ est réductive car $\mathfrak{g}(e)_{\mathbb{C}}$ a pour forme réelle $\mathfrak{c}(e)$, où $\mathfrak{c}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal de $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ qui contient la projection dans $\mathbb{G}(\mathbb{R})$ de l'élément e de G. De plus toute sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}_e$ de $\mathfrak{g}(e)$ coupe $\mathfrak{g}_{ss\ reg}$, ce qui signifie que le commutant $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{h}_e$ dans $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (cf. [Bou 87, lem. 1.4.1 p. 6]). Par conséquent $G(e)$ vérifie l'hypothèse de l'introduction portant sur G (cf. [DV 93, bas p. 38]).

Définition 3.1. On note $\mathfrak{g}^*_{reg}(e)$ (respectivement $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_I(e)$, $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{Inc}(e)$, $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}(e)$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e)$) l'ensemble des éléments de $\mathfrak{g}^*_{reg}$ (respectivement $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_I$, $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{Inc}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{fond}$ et $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$) qui sont fixes sous l'action de e.

Parmi les résultats du lemme qui suit, seul le point (a) est important. Le point (b) sera utilisé dans la remarque 9.7 et le point (c) dans un article ultérieur.

Lemme 3.2. *Soient $\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss}$, $\mathfrak{h}\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}(\lambda)$ de composantes infinitésimalement elliptique et hyperbolique $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$, et $\mathcal{F}^+\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$ tels que e fixe $\widetilde{\lambda}:=(\lambda,\mathcal{F}^+)$. On suppose qu'il existe une chambre $\mathfrak{a}^{*+}$ de $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{a})$ stable par e.*

(a) *On a $\lambda\in\mathfrak{g}(e)^*_{ss}$, $\mathfrak{h}(e)\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}(e)(\lambda)$, et l'élément $\rho_{\mathcal{F}^+}$ de $\mathfrak{h}(e)^*_{(\mathbb{R})}$ est régulier pour les racines imaginaires de $(\mathfrak{g}(e)(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$.*

On note par définition $\mathcal{F}^+[e]$ l'élément de $C(\mathfrak{g}(e)(\lambda),\mathfrak{h}(e))$ contenant $\rho_{\mathcal{F}^+}$ et $\widetilde{\lambda}[e]=(\lambda,\mathcal{F}^+[e])$. (On dira que « $\widetilde{\lambda}[e]$ existe » quand e stabilise une chambre $\mathfrak{a}^{*+}$.)

(b) *Il existe $e_0\in e\exp\mathfrak{t}(e)$ tel que : si $\mathcal{F}'^+\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$ et $\rho_{\mathcal{F}'^+}\in\widetilde{\mathcal{F}^+[e_0]}$, alors $\mathcal{F}'^+=\mathcal{F}^+$. Quand $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_I$ on peut même choisir e_0 tel que $\widetilde{\lambda}[e_0]\in\mathfrak{g}(e_0)^*_I$.*

(c) *On suppose que $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_I$. Le cardinal de l'ensemble des $\widetilde{\lambda}'\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_I(e)$ vérifiant $\widetilde{\lambda}'[e]=\widetilde{\lambda}[e]$ est égal à $\frac{|W(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})(\mathrm{Ad}^*e)|}{|W(\mathfrak{g}(e)(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})|}$, où $W(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})(\mathrm{Ad}^*e)$ désigne le commutant de $(\mathrm{Ad}^*e^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{h}^*_{\mathbb{C}}}$ dans $W(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.*

Démonstration du lemme. **(a)** D'après le lemme 1.4, on a : $\lambda_+\in\mathfrak{g}(e)^*_{ss\ reg}$, puis $\mathfrak{h}(e)=\mathfrak{g}(e)(\lambda_+)\in\operatorname{Car}\mathfrak{g}(e)(\lambda)$. Soit $\alpha'\in R(\mathfrak{g}(e)(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$ imaginaire. Il existe $\alpha\in R(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ tel que $\alpha'=\alpha_{|\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}}}$. On a : $\langle\nu_+,\alpha\rangle=\langle\nu_+,\alpha'\rangle=0$ et $\langle\rho_{\mathcal{F}^+},\alpha\rangle=\langle\rho_{\mathcal{F}^+},\alpha'\rangle$. Donc $\langle\rho_{\mathcal{F}^+},\alpha'\rangle\neq 0$, car $R^+(\mathfrak{g}(\nu_+)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ est un système de racines positives.

(b) Soit B la base de $R(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ associée à $\mathcal{F}^+$. Pour chaque $\alpha\in B$, on note $m_{\dot\alpha}$ le cardinal de l'orbite $\dot\alpha$ de α sous l'action dans B du sous-groupe

$\langle e\rangle$ de G engendré par e, et on choisit $t_{\dot\alpha}\in\mathbb{R}$ tel que $((\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})^{m_{\dot\alpha}})_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t_{\dot\alpha}}\,\mathrm{id}$. On prend $e_0=e\exp(X_0)$, où X_0 est l'unique élément de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}\cap \mathrm{D}(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})\,(\lambda)_{\mathbb{C}})$ tel que $\alpha(X_0)=-it_{\dot\alpha}/m_{\dot\alpha}$ pour tout $\alpha\in B$. Il est clair que $\widetilde{\lambda}[e_0]$ existe.
Chaque $\alpha_{|\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}}}$ avec $\alpha\in B$ est un poids de $\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}(e_0)_{\mathbb{C}}$ dont l'espace propre contient $(1+e_0+\cdots+{e_0}^{m_{\dot\alpha}-1})\cdot\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$. Soit $\mathcal{F}'^{+}\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$ tel que $\rho_{\mathcal{F}'^{+}}\in\mathcal{F}^{+}[e_0]$, (donc $e_0\mathcal{F}'^{+}=\mathcal{F}'^{+}$). Pour tout $\alpha\in B$, on a : $\langle\rho_{\mathcal{F}^{+}},\alpha_{|\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}}}\rangle=\langle\rho_{\mathcal{F}^{+}},\alpha\rangle>0$ et $\langle\rho_{\mathcal{F}'^{+}},\alpha\rangle=\langle\rho_{\mathcal{F}'^{+}},\alpha_{|\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}}}\rangle$, donc la racine $\alpha_{|\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}}}$ de $R(\mathrm{C}_{\mathfrak{g}(e_0)}(\mathfrak{a}(e))(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$ est positive relativement à $\mathcal{F}^{+}[e_0]$ et ensuite $\langle\rho_{\mathcal{F}'^{+}},\alpha\rangle>0$. D'où $\mathcal{F}'^{+}=\mathcal{F}^{+}$.

On suppose maintenant que $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{I}$. Toute racine de $(\mathfrak{g}(e_0)(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$ est restriction d'une racine de $(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. Les racines $\alpha'=\alpha_{|\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}}}$ avec $\dot\alpha\in\langle e\rangle\backslash B$ décrivent donc lorsque $\dot\alpha$ varie (de façon injective car $\dim\mathfrak{g}(e_0)_{\mathbb{C}}^{\alpha'}=1$) l'ensemble des racines simples relativement à $\mathcal{F}^{+}[e_0]$ dans $R(\mathfrak{g}(e_0)(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$. Ces racines α' sont non compactes car $\alpha([\,\cdot\,,\overline{\cdot}\,])$ est positive sur le sous-espace vectoriel $\mathfrak{g}(e_0)_{\mathbb{C}}^{\alpha'}$ de la somme directe orthogonale $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}\oplus e_0\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}\oplus\cdots\oplus{e_0}^{m_{\dot\alpha}-1}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$.

(c) L'application $\pi_e: W(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\cdot\rho_{\mathcal{F}^{+}}\cap\mathfrak{h}(e)^{*}_{\mathbb{C}}\to C(\mathfrak{g}(e)(\lambda),\mathfrak{h}(e))$ qui à une forme linéaire associe la chambre qui la contient, commute à l'action du groupe $W(\mathfrak{g}(e)(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$. Les groupes $W(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})(\mathrm{Ad}^{*}e)$ et $W(\mathfrak{g}(e)(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$ opèrent simplement transitivement respectivement sur les ensembles de départ et d'arrivée de π_e. Les fibres de π_e ont donc un cardinal égal à $\frac{|W(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})(\mathrm{Ad}^{*}e)|}{|W(\mathfrak{g}(\lambda)(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})|}$. L'ensemble des $\widetilde{\lambda}'=(\lambda',\mathcal{F}'^{+})\in\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{I}(e)$ tels que $\widetilde{\lambda}'[e]=\widetilde{\lambda}[e]$, dont les éléments vérifient $\lambda'=\lambda$ et $\mathfrak{g}(\widetilde{\lambda}')=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}(e)(\widetilde{\lambda}'[e]))=\mathfrak{h}$, est en bijection avec $\pi_e^{-1}(\{\mathcal{F}^{+}[e]\})$ par l'application $(\lambda',\mathcal{F}'^{+})\mapsto\pi_1^{-1}(\mathcal{F}'^{+})$. Cela permet de calculer son cardinal. $\square$

Remarque 3.3. **(1)** Il peut arriver qu'un $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{I}(e)$ vérifie $\widetilde{\lambda}[e]\notin\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^{*}_{I}$. (Cependant la condition $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{Inc}(e)$ implique $\widetilde{\lambda}[e]\in\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^{*}_{Inc}$.) Par exemple : $G=Sp(4,\mathbb{R})$, $\widetilde{\lambda}=(0,\mathcal{F}^{+})$ tel que $\mathfrak{h}:=\mathfrak{g}(\widetilde{\lambda})$ est égale à sa composante infinitésimalement elliptique et le système de racines positives de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ associé à $\mathcal{F}^{+}$ s'écrit $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,2\alpha_1+\alpha_2\}$ avec pour seule racine compacte $\alpha_1+\alpha_2$. En prenant $e=\exp E$ où $E\in\mathfrak{h}$ est déterminé par $\alpha_1(E)=-\alpha_2(E)=\mathrm{i}\pi$, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(e)$ est ici isomorphe à $\mathfrak{u}(2)$ et donc $C(\mathfrak{g}(e),\mathfrak{h}(e))_{reg}=\emptyset$.

(2) On peut aussi trouver des $\widetilde{\lambda}_e\in\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^{*}_{reg}$ qui ne sont pas de la forme $\widetilde{\lambda}[e]$ pour un $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{reg}(e)$. Par exemple: $G=SU(2)$, $e=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ et $\widetilde{\lambda}_e=(0,\mathrm{i}\,\mathfrak{so}(2)^{*})$.

(3) Pour certains $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{fond}(e)$ il n'existe pas de $f\in\mathfrak{g}^{*}_{reg}(e)$ tel que $G\cdot f=R_G(G\cdot\widetilde{\lambda})$. C'est le cas, avec $G=SL(2,\mathbb{R})$ et $e=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, des éléments de $\widetilde{\mathfrak{g}}^{*}_{fond}(e)$ de la forme $(0,\mathcal{F}^{+})$ tels que $\mathcal{F}^{+}\subseteq\mathrm{i}\,\mathfrak{so}(2)^{*}$. ■

II. Les paramètres « représentation projective »

Les paramètres de cette partie sont calqués sur ceux introduits par M. Duflo, qui étaient adaptés au cas des orbites coadjointes semi-simples régulières de G.

4. Rappels sur les groupes spécial-métalinéaire et métaplectique

Ma référence concernant le groupe métaplectique et les fonctions orientation de M. Duflo et M. Vergne qui lui sont attachées, est leur article [DV 93]. Je choisis comme eux d'éviter l'utilisation du caractère de la représentation métaplectique en suivant le point de vue de [Ver 94, conjecture p. 291] (au signe de la forme symplectique sur les orbites coadjointes près).

Définition 4.1. On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie.

(a) On note $DL(V) \to SL(V)$ « le » revêtement double de $SL(V)$, unique à isomorphisme de revêtements près, qui est connexe quand $\dim V \geq 2$. (Le (b) ci-dessous fournira une description canonique d'un tel revêtement, comme ensemble de couples formés d'un élément de $SL(V)$ et d'une orientation d'un certain sous-espace vectoriel de V.)

(b) Soit $\hat{a} \in DL(V)$ au-dessus d'un $a \in SL(V)$ elliptique.

Quand $\dim V \geq 2$, on note

$\mathcal{O}(\hat{a})_{(1-a)\cdot V} = (-1)^{\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_p}{2\pi}}\ \mathrm{sg}(\sin(\frac{\beta_1}{2})\ldots\sin(\frac{\beta_q}{2})) \times \mathbb{R}^+ \setminus\{0\}\,(w_1\wedge\cdots\wedge w_{2q})$,
où « sg » représente la fonction signe sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, indépendamment du choix d'un $A \in \mathfrak{sl}(V)$ infinitésimalement elliptique tel que $\hat{a} = \exp_{DL(V)}A$, et d'une base $(v_1,\ldots,v_{2p},w_1,\ldots,w_{2q})$ de $A\cdot V$ dans laquelle la matrice de la restriction de A est de la forme

$$(**)\quad \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_p \\ \alpha_p & 0 \end{pmatrix} & & & \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} 0 & -\beta_q \\ \beta_q & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_1,\ldots,\alpha_p \in 2\pi\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et $\beta_1,\ldots,\beta_q \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Quand $\dim V \leq 1$, $\mathcal{O}(\hat{a})_{\{0\}}$ vaut $\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ ou $\mathbb{R}^-\setminus\{0\}$ suivant que $\hat{a}$ est trivial ou non.

(c) Soit $A \in \mathfrak{sl}(V)$ infinitésimalement elliptique. On note

$\mathcal{O}(A)_{A\cdot V} = \mathrm{sg}(\beta_1\ldots\beta_q) \times \mathbb{R}^+\setminus\{0\}\,(w_1\wedge\cdots\wedge w_{2q})$,
indépendamment du choix d'une base $(w_1,\ldots,w_{2q})$ de $A\cdot V$ dans laquelle la matrice de la restriction de A est de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\beta_1 \\ \beta_1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & -\beta_q \\ \beta_q & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

avec $\beta_1,\ldots,\beta_q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Définition 4.2. On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une forme bilinéaire B alternée non dégénérée. On désigne encore par B le prolongement bilinéaire complexe de cette forme bilinéaire à $V_{\mathbb{C}}$.

(a) On note $Mp(V)$ l'image réciproque de $Sp(V)$ dans $DL(V)$.

(b) On note $\mathcal{O}(B)_V$ l'orientation de V sur laquelle $B^{\frac{1}{2}\dim V}$ est positive. On appelle « base symplectique » de (V,B) toute base $(P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_n)$ de V telle que $B(P_i,P_j) = B(Q_i,Q_j) = 0$ et $B(P_i,Q_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker) pour $1 \leq i,j \leq n$.

(c) On appelle « lagrangien » de $(V_{\mathbb{C}},B)$ tout sous-espace vectoriel de $V_{\mathbb{C}}$ égal à son orthogonal pour B. On appelle « lagrangien positif » de $(V_{\mathbb{C}},B)$ tout lagrangien de $(V_{\mathbb{C}},B)$ sur lequel la forme sesquilinéaire hermitienne $(v,w) \mapsto \mathrm{i}\,B(v,\overline{w})$ est positive.

Soit $\mathcal{L}$ un lagrangien de $(V_{\mathbb{C}}, B)$. On note $Mp(V)_{\mathcal{L}}$ le normalisateur de $\mathcal{L}$ dans $Mp(V)$. À chaque $\hat{x} \in Mp(V)_{\mathcal{L}}$ au-dessus d'un élément x de $Sp(V)$, on associe le nombre $n_{\mathcal{L}}(x)$ de valeurs propres comptées avec multiplicité dans $]1, +\infty[$ de la restriction de $x^{\mathbb{C}}$ à $\mathcal{L}$, et le nombre $q_{\mathcal{L}}(x)$ de composantes strictement négatives dans la matrice de la forme sesquilinéaire hermitienne $(v, w) \mapsto \mathrm{i}\, B(v, \overline{w})$ sur $(1 - x^{\mathbb{C}}) \cdot \mathcal{L}$ relativement à une base orthogonale.

(d) Soit $\mathcal{L}$ un lagrangien de $(V_{\mathbb{C}}, B)$. Pour tout $\hat{x} \in Mp(V)_{\mathcal{L}}$ de composante elliptique $\hat{x}_e$ (au sens de [DV 93, lem. 31 p. 38]) au-dessus d'un élément x de $Sp(V)$ de composante elliptique x_e, on pose

$$\rho_{\mathcal{L}}(\hat{x}) \;=\; (-1)^{q_{\mathcal{L}}(x_e)}\ \frac{\mathcal{O}(\hat{x}_e)_{(1-x_e)\cdot V}}{\mathcal{O}(B)_{(1-x_e)\cdot V}} \prod_{1 \leq k \leq n} (\sqrt{r_k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_k/2}),$$

où $r_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_1}, \ldots, r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_n}$ sont les valeurs propres comptées avec multiplicité de la restriction de $x^{\mathbb{C}}$ à $\mathcal{L}$, avec $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in\,]-2\pi, 0]$.

(e) Soit $\hat{x} \in Mp(V)$ de composante elliptique $\hat{x}_e$ au-dessus d'un élément semi-simple x de $Sp(V)$ de composante elliptique x_e. On pose

$$\delta(\hat{x}) \;=\; \frac{\mathcal{O}(\hat{x}_e)_{(1-x_e)\cdot V}}{\mathcal{O}(B)_{(1-x_e)\cdot V}} \prod_{1 \leq k \leq n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_k/2},$$

indépendamment (compte tenu de la démonstration du (c) de la proposition ci-dessous) du choix d'un $E \in \mathfrak{sp}(V)$ infinitésimalement elliptique tel que $x_e = \exp_{Sp(V)} E$, et d'une base symplectique $(P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n)$ de (V, B) pour laquelle la matrice de E relativement à $(P_1, Q_1, \ldots, P_n, Q_n)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{pmatrix} 0 & \theta_q \\ -\theta_q & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

avec $\theta_1, \ldots, \theta_n \in\,]-2\pi, 0]$.

(f) Soit $\hat{x} \in Mp(V)$ de composante elliptique $\hat{x}_e$ au-dessus d'un élément semi-simple x de $Sp(V)$ de composante elliptique x_e. On pose

$$\Phi(\hat{x}) \;=\; \frac{\mathcal{O}(\hat{x}_e)_{(1-x_e)\cdot V}}{\mathcal{O}(B)_{(1-x_e)\cdot V}}\ \mathrm{i}^{-\frac{1}{2}\dim(1-x_e)\cdot V}\ \left|\det\,(1-x)_{(1-x)\cdot V}\right|^{-1/2}.$$

On va maintenant voir, comme le sous-entend M. Vergne dans [Ver 94, prop. p. 289] (avec la représentation de Weil contragrédiente de celle utilisée dans [DHV 84], déduite de celle de [DHV 84] en remplaçant au choix B par $-B$ ou le caractère central du groupe de Heisenberg par son conjugué), que les fonctions que je viens d'introduire dans les points (d), (e), (f) sont les fonctions $\rho_{\mathcal{L}}$ et δ de [Duf 82a] et la fonction Φ de [DHV 84].

Proposition 4.3. *On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V de dimension finie muni d'une forme bilinéaire B alternée non dégénérée.*

(a) *Le revêtement $Mp(V) \to Sp(V)$ est connexe quand $V \neq \{0\}$.*

(b) *Soit $\mathcal{L}$ un lagrangien de $(V_{\mathbb{C}}, B)$. La fonction $\rho_{\mathcal{L}}$ est un morphisme de groupes de Lie de $Mp(V)_{\mathcal{L}}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{d}_1 \rho_{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\,\cdot\,^{\mathbb{C}})_{\mathcal{L}}$. Pour tout $\hat{x} \in Mp(V)_{\mathcal{L}}$ au-dessus d'un élément semi-simple x de $Sp(V)$, on a*

$$\Phi(\hat{x}) = (-1)^{n_{\mathcal{L}}(x) + q_{\mathcal{L}}(x)}\, \rho_{\mathcal{L}}(\hat{x})\, \left(\det\,(1-x^{\mathbb{C}})_{(1-x^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L}}\right)^{-1}.$$

(c) *Soit $\hat{x} \in Mp(V)$ au-dessus d'un $x \in Sp(V)$ de composante elliptique x_e. Il existe un lagrangien positif de $(V_{\mathbb{C}}, B)$ stable par $x^{\mathbb{C}}$. Pour tout lagrangien $\mathcal{L}$ de $(V_{\mathbb{C}}, B)$ stable par $x^{\mathbb{C}}$, on a*

$$\rho_{\mathcal{L}}(\hat{x})\ |\rho_{\mathcal{L}}(\hat{x})|^{-1} \ = \ \delta(\hat{x}) \prod_{z\in\mathrm{Sp}(x_e)} z^{q_z}\,,$$

où $\mathrm{Sp}(x_e)$ *est le spectre de* x_e *et, pour chaque* $z \in \mathrm{Sp}(x_e)$, (p_z, q_z) *est la signature de la forme sesquilinéaire hermitienne* $(v,w)\mapsto \mathrm{i}\,B(v,\overline{w})$ *sur le sous-espace propre de* $(x_e^{\mathbb{C}})_{\mathcal{L}}$ *associé à* z.

Démonstration de la proposition. **(a)** On suppose que V est non nul. Soit $(P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_n)$ une base symplectique de (V,B). On note T_{Sp} le tore maximal de $Sp(V)$ formé des endomorphismes de V dont les matrices dans la base $(P_1,Q_1,\ldots,P_n,Q_n)$ sont diagonales par blocs avec des blocs dans $SO(2)$, et $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie. Le tore $T_{Mp} := \exp_{Mp(V)}\mathfrak{t}$ est un tore maximal de $DL(V)$.

On choisit un élément A de $\mathrm{Ker}\exp_{T_{Sp}}$ tel que $\mathcal{O}(\exp_{DL(V)}A)_{\{0\}} = \mathbb{R}^-\setminus\{0\}$ (il en existe). Le chemin $t\in[0,1]\mapsto \exp_{T_{Mp}}(tA)$ joint dans $Mp(V)$ les deux points du noyau du morphisme de groupes canonique de $Mp(V)$ dans $Sp(V)$.

(b) Soit $\hat{x}\in Mp(V)_{\mathcal{L}}$ au-dessus d'un élément semi-simple x de $Sp(V)$ de composante elliptique x_e.

On note $\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}}$ le morphisme de groupes de Lie de $Mp(V)_{\mathcal{L}}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ défini dans [Duf 84, p. 107]. D'après [Duf 84, (10) p. 108], on a

$$|\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}}(\hat{x})| = \left|\det(x^{\mathbb{C}})_{\mathcal{L}}\right|^{1/2} = |\rho_{\mathcal{L}}(\hat{x})| \quad\text{et}\quad \mathrm{d}_1\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\,\cdot\,^{\mathbb{C}})_{\mathcal{L}}.$$

Ces égalités permettent de prouver, compte tenu de [DV 93, fin du lemme 30 p. 37], que les applications $\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}}$ et $\rho_{\mathcal{L}}$ commutent aux prises de composantes elliptique, positivement hyperbolique et unipotente sur les groupes $Mp(V)_{\mathcal{L}}$ et $GL(\mathbb{C})$, et ont mêmes restrictions aux parties de $Mp(V)_{\mathcal{L}}$ formées de ses éléments positivement hyperboliques ou de ses éléments unipotents.

On note $\widetilde{\Phi}$ la fonction (indépendante de $\mathcal{L}$) de l'ensemble des éléments semi-simples de $Mp(V)$ dans $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ définie dans [DHV 84, p. 102]. Elle s'écrit

$$\widetilde{\Phi}(\hat{x}) = (-1)^{n_{\mathcal{L}}(x)+q_{\mathcal{L}}(x)}\ \widetilde{\rho}_{\mathcal{L}}(\hat{x})\ \left(\det\,(1-x^{\mathbb{C}})_{(1-x^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L}}\right)^{-1}.$$

En outre, l'application $\dot{v}\mapsto B(v,.)$ de $(1-x^{\mathbb{C}})\cdot V_{\mathbb{C}}\,/\,(1-x^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L}$ dans $((1-x^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L})^*$ est une bijection linéaire qui commute à l'action de $1-x$. Il s'ensuit que

$$|\widetilde{\Phi}(\hat{x})| = |\det\,(1-x)_{(1-x)\cdot V}|^{-1/2} = |\Phi(\hat{x})|.$$

Pour montrer que $\widetilde{\Phi}=\Phi$ (respectivement $\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}}=\rho_{\mathcal{L}}$), vu [Duf 84, (9) p. 108] il reste à prouver que $\widetilde{\Phi}/|\widetilde{\Phi}|$ et $\Phi/|\Phi|$ (respectivement $\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}}$ et $\rho_{\mathcal{L}}$) coïncident en un des deux points de $Mp(V)$ situés au-dessus de x (respectivement de x_e).

On note V^z (respectivement $V_{\mathbb{C}}^z$) le sous-espace propre de x (respectivement $x^{\mathbb{C}}$) associé à une valeur propre $z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (respectivement $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$), et $\perp^B$ la relation de B-orthogonalité. On considère maintenant une valeur propre $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ de $x^{\mathbb{C}}$ telle que $\mathrm{Im}\,z\geq 0$ et $|z|\geq 1$. On va lui associer une certaine base symplectique $\mathcal{B}_z$ de $((V_{\mathbb{C}}^z + V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}} + V_{\mathbb{C}}^{\bar{z}} + V_{\mathbb{C}}^{\bar{z}^{-1}})\cap V, B)$.

Si $z\in\mathbb{R}$ et $|z|\geq 1$: quand $|z|=1$, on fixe une base symplectique $\mathcal{B}_z = (P_1^0,\ldots,P_{n^0}^0,Q_1^0,\ldots,Q_{n^0}^0)$ de V^z ; quand $|z|>1$, on fixe une base $(P_1^0,\ldots,P_{n^0}^0)$ de V^z, et en déduit une unique base symplectique $\mathcal{B}_z = (P_1^0,\ldots,P_{n^0}^0,Q_1^0,\ldots,Q_{n^0}^0)$ de $V^z\oplus V^{z^{-1}}$ telle que $Q_1^0,\ldots,Q_{n^0}^0\in V^{z^{-1}}$, car V^z et $V^{z^{-1}}$ sont en dualité avec $V^z\perp^B V^z$ et $V^{z^{-1}}\perp^B V^{z^{-1}}$.

Si $\mathrm{Im}\,z>0$ et $|z|>1$: on fixe une base $(P_1+\mathrm{i}P_2,\ldots,P_{2n-1}+\mathrm{i}P_{2n})$ de $V_{\mathbb{C}}^z$ telle que $P_1,\ldots,P_{2n}\in V$; on en déduit une unique base symplectique $(P_1+\mathrm{i}P_2,\ldots,P_{2n-1}+\mathrm{i}P_{2n},Q_1-\mathrm{i}Q_2,\ldots,Q_{2n-1}-\mathrm{i}Q_{2n})$ de $V_{\mathbb{C}}^z\oplus V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}$ muni de

$B/2$ telle que $Q_1-\mathrm{i}Q_2,\ldots,Q_{2n-1}-\mathrm{i}Q_{2n}\in V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}$ et $Q_1,\ldots,Q_{2n}\in V$, car $V_{\mathbb{C}}^{z}$ et $V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}$ sont en dualité avec $V_{\mathbb{C}}^{z}\perp^B V_{\mathbb{C}}^{z}$ et $V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}\perp^B V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}$; puis on obtient la base symplectique $\mathcal{B}_z:=(P_1,\ldots,P_{2n},Q_1,\ldots,Q_{2n})$ de $(V_{\mathbb{C}}^{z}\oplus V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}\oplus V_{\mathbb{C}}^{\bar z}\oplus V_{\mathbb{C}}^{\bar z^{-1}})\cap V$, car $V_{\mathbb{C}}^{z}\perp^B V_{\mathbb{C}}^{\bar z}$, $V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}\perp^B V_{\mathbb{C}}^{\bar z^{-1}}$ et $V_{\mathbb{C}}^{z}\perp^B V_{\mathbb{C}}^{\bar z^{-1}}$.

Si $\operatorname{Im} z>0$ et $|z|=1$: on fixe une base $(P_1'+\mathrm{i}Q_1',\ldots,P_p'+\mathrm{i}Q_p',P_1''-\mathrm{i}Q_1'',\ldots,P_q''-\mathrm{i}Q_q'')$ de $V_{\mathbb{C}}^{z}$ telle que $P_1',Q_1',\ldots,P_p',Q_p',P_1'',Q_1'',\ldots,P_q'',Q_q''\in V$, dans laquelle la forme sesquilinéaire hermitienne non dégénérée $(v,w)\mapsto iB/2\,(v,\overline{w})$ a pour matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_p\end{pmatrix}$; elle fournit la base symplectique $\mathcal{B}_z:=(P_1',\ldots,P_p',P_1'',\ldots,P_q'',Q_1',\ldots,Q_p',Q_1'',\ldots,Q_q'')$ de $(V_{\mathbb{C}}^{z}\oplus V_{\mathbb{C}}^{\bar z})\cap V$, car $V_{\mathbb{C}}^{z}\perp^B V_{\mathbb{C}}^{z}$ et $V_{\mathbb{C}}^{\bar z}\perp^B V_{\mathbb{C}}^{\bar z}$.

On constate que le sous-espace vectoriel $\mathcal{L}_x^+$ (respectivement $\mathcal{L}_{x,e}^+$) de $V_{\mathbb{C}}$ engendré par les différents vecteurs $P_1^0,\ldots,P_{n^0}^0$, ou, $P_1,\ldots,P_{2n}$, ou, $P_1'+\mathrm{i}Q_1'$, $\ldots,P_p'+\mathrm{i}Q_p',P_1''+\mathrm{i}Q_1'',\ldots,P_q''+\mathrm{i}Q_q''$ (respectivement $P_1^0+\mathrm{i}Q_1^0,\ldots,P_{n^0}^0+\mathrm{i}Q_{n^0}^0$, ou, $P_1+\mathrm{i}Q_1,\ldots,P_{2n}+\mathrm{i}Q_{2n}$, ou, $P_1'+\mathrm{i}Q_1',\ldots,P_p'+\mathrm{i}Q_p',P_1''+\mathrm{i}Q_1'',\ldots,P_q''+\mathrm{i}Q_q''$) lorsque z varie, est un lagrangien positif de $(V_{\mathbb{C}},B)$ stable par $x^{\mathbb{C}}$ (respectivement $x_e^{\mathbb{C}}$).

On note E (respectivement H) l'élément de $\mathfrak{sp}(V)$ stabilisant les espaces vectoriels $(V_{\mathbb{C}}^{z}+V_{\mathbb{C}}^{z^{-1}}+V_{\mathbb{C}}^{\bar z}+V_{\mathbb{C}}^{\bar z^{-1}})\cap V$ avec $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $r\geq 1$, $-2\pi<\theta\leq 0$, et dont la restriction à un tel espace a dans la base $\mathcal{B}_z$ une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont les matrices
$\begin{pmatrix} 0&\theta\\ -\theta&0\end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix}\ln r&0\\ 0&-\ln r\end{pmatrix}$) relativement à (P_k^0,Q_k^0),
ou, $\begin{pmatrix} 0&\theta&&\\ -\theta&0&&\\ &&0&-\theta\\ &&\theta&0\end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix}\ln r&&&\\ &\ln r&&\\ &&-\ln r&\\ &&&-\ln r\end{pmatrix}$) relativement à $(P_{2k-1},P_{2k},Q_{2k-1},-Q_{2k})$,
ou, $\begin{pmatrix} 0&\theta\\ -\theta&0\end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0&0\\ 0&0\end{pmatrix}$) relativement à (P_k',Q_k') et $\begin{pmatrix} 0&-\theta\\ \theta&0\end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix} 0&0\\ 0&0\end{pmatrix}$) relativement à (P_l'',Q_l'').

Les éléments $\hat x_{E,H}=\exp_{Mp(V)}E\,\exp_{Mp(V)}H$ et $\hat x_E=\exp_{Mp(V)}E$ de $Mp(V)$ sont respectivement au-dessus de x et x_e. D'après [Duf 84, (15) p. 109], on a :

$$\frac{\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}_x^+}}{|\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}_x^+}|}(\hat x_{E,H})=\widetilde{\rho}_{\mathcal{L}_{x,e}^+}(\exp_{Mp(V)}E)=\mathrm{e}^{\frac12\operatorname{tr}(E^{\mathbb{C}})_{\mathcal{L}_{x,e}^+}}.$$

D'où les égalités suivantes, qui permettent d'obtenir le résultat :

$$\frac{\widetilde{\Phi}}{|\widetilde{\Phi}|}(\hat x_{E,H})=(-1)^{n_{\mathcal{L}_x^+}(x)}\,\mathrm{e}^{\frac12\operatorname{tr}(E^{\mathbb{C}})_{\mathcal{L}_{x,e}^+}}\left(\frac{\det\,(1-x^{\mathbb{C}})_{(1-x^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L}_x^+}}{\left|\det\,(1-x^{\mathbb{C}})_{(1-x^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L}_x^+}\right|}\right)^{-1}=\cdots=\frac{\Phi}{|\Phi|}(\hat x_{E,H})$$

$$\text{et}\quad \widetilde{\rho}_{\mathcal{L}}(\hat x_E)=(-1)^{q_{\mathcal{L}}(x_e)}\,\frac{\Phi}{|\Phi|}(\hat x_E)\,\frac{\det\,(1-\exp E^{\mathbb{C}})_{(1-\exp E^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L}}}{\left|\det\,(1-\exp E^{\mathbb{C}})_{(1-\exp E^{\mathbb{C}})\cdot\mathcal{L}}\right|}=\cdots=\rho_{\mathcal{L}}(\hat x_E).$$

(c) L'existence d'un lagrangien positif de $(V_{\mathbb{C}},B)$ stable par $x^{\mathbb{C}}$ est démontrée dans [B.. 72, cor. p. 82]. On suppose V non nul et note $\hat x_e$ la composante elliptique de $\hat x$. Par définition $\delta(\hat x)$ est égal à $\rho_{\mathbb{C}(P_1+\mathrm{i}Q_1)+\cdots+\mathbb{C}(P_n+\mathrm{i}Q_n)}(\hat x_e)$, avec les notations de 4.2 (e). L'égalité [Duf 84, (15) p. 109] prouve que ce nombre complexe est indépendant du choix de $(P_1,\ldots,P_n,Q_1,\ldots,Q_n)$.

On se donne un lagrangien $\mathcal{L}$ de $(V_{\mathbb{C}},B)$ stable par $x^{\mathbb{C}}$ et un supplémentaire $\mathcal{S}$ de $\mathcal{L}\cap\overline{\mathcal{L}}$ dans $\mathcal{L}$ qui est stable par $x_e^{\mathbb{C}}$. On note W le sous-espace symplectique de (V,B) égal à l'orthogonal de $\mathcal{S}+\overline{\mathcal{S}}$ dans V. On fixe une base $(P_1^0,\ldots,P_{n^0}^0,P_1^{\mathbb{R}},\ldots,P_{2m}^{\mathbb{R}})$ du lagrangien $\mathcal{L}\cap\overline{\mathcal{L}}$ de $(W_{\mathbb{C}},B)$, formée de vecteurs de V, telle que $P_1^0,\ldots,P_{n^0}^0$ sont des vecteurs propres de x_e associés à des valeurs propres réelles et $P_1^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}P_2^{\mathbb{R}},\ldots,P_{2m-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}P_{2m}^{\mathbb{R}}$ sont des vecteurs propres de $x_e^{\mathbb{C}}$ associés à des valeurs propres non réelles. Elle se complète en une base symplectique $(P_1^0,\ldots,P_{n^0}^0,P_1^{\mathbb{R}},\ldots,P_{2m}^{\mathbb{R}},Q_1^0,\ldots,Q_{n^0}^0,2Q_1^{\mathbb{R}},\ldots,2Q_{2m}^{\mathbb{R}})$ de (W,B) telle que $Q_1^0,\ldots,Q_{n^0}^0$ et $Q_1^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}Q_2^{\mathbb{R}},\ldots,Q_{2m-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}Q_{2m}^{\mathbb{R}}$ sont des vecteurs propres de $x_e^{\mathbb{C}}$.

En effet, on peut construire $(Q_1^{\mathbb{R}},\dots,Q_{2m}^{\mathbb{R}})$ par récurrence sur $m=\frac{1}{2}\dim(x_e^2-1)\cdot W$, en associant au vecteur $P:=P_{2m-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}P_{2m}^{\mathbb{R}}$ de $(x_e^2-1)\cdot(\mathcal{L}\cap\overline{\mathcal{L}})$ un vecteur propre $Q=Q_{2m-1}^{\mathbb{R}}-\mathrm{i}Q_{2m}^{\mathbb{R}}$ de $x_e^{\mathbb{C}}$ avec $Q_{2m-1}^{\mathbb{R}},Q_{2m}^{\mathbb{R}}\in(x_e^2-1)\cdot W$ tel que $B(P,Q)=1$ et $B(Q,\overline{Q})=0$ (cette dernière égalité se réalise en remplaçant Q par $Q-\frac{1}{2}B(Q,\overline{Q})\,\overline{P}$). On fixe aussi une base $(P_1'+\mathrm{i}Q_1',\dots,P_p'+\mathrm{i}Q_p',P_1''-\mathrm{i}Q_1'',\dots,P_q''-\mathrm{i}Q_q'')$ de $\mathcal{S}$ formée de vecteurs propres de $x_e^{\mathbb{C}}$ avec $P_1',Q_1',\dots,P_p',Q_p',P_1'',Q_1'',\dots,P_q'',Q_q''\in V$, dans laquelle la forme sesquilinéaire hermitienne non dégénérée $x_e^{\mathbb{C}}$-invariante $(v,w)\mapsto iB/2\,(v,\overline{w})$ a pour matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0\\ 0 & -I_p\end{pmatrix}$.

La base de $\mathcal{L}$ constituée des vecteurs propres $P_1^0,\dots,P_{n^0}^0,P_1^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}P_2^{\mathbb{R}},P_1^{\mathbb{R}}-\mathrm{i}P_2^{\mathbb{R}},\dots,P_{2m-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}P_{2m}^{\mathbb{R}},P_{2m-1}^{\mathbb{R}}-\mathrm{i}P_{2m}^{\mathbb{R}}$ et $P_1'+\mathrm{i}Q_1',\dots,P_p'+\mathrm{i}Q_p',P_1''-\mathrm{i}Q_1'',\dots,P_q''-\mathrm{i}Q_q''$ de $x_e^{\mathbb{C}}$ fournit une expression pour $\rho_{\mathcal{L}}(\hat{x}_e)$. On calcule $\delta(\hat{x})$ à l'aide de la base symplectique $(P_1^0,\dots,P_{n^0}^0,P_1^+,\dots,P_{2m}^+,P_1',\dots,P_p',P_1'',\dots,P_q'',Q_1^0,\dots,Q_{n^0}^0,Q_1^+,\dots,Q_{2m}^+,Q_1',\dots,Q_p',Q_1'',\dots,Q_q'')$ de (V,B),
où $P_{2k-1}^+ +\mathrm{i}Q_{2k-1}^+ := (P_{2k-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}P_{2k}^{\mathbb{R}})+\mathrm{i}(Q_{2k-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}Q_{2k}^{\mathbb{R}})$
et $P_{2k}^+-\mathrm{i}Q_{2k}^+ := -\mathrm{i}(P_{2k-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}P_{2k}^{\mathbb{R}})-(Q_{2k-1}^{\mathbb{R}}+\mathrm{i}Q_{2k}^{\mathbb{R}})$ pour $1\le k\le m$.

On en déduit facilement le résultat. □

5. Les paramètres $\tau\in X_G^{Ind}(\widetilde{\lambda})$

Dans les deux sections qui suivent, on se donne $\widetilde{\lambda}=(\lambda,\mathcal{F}^+)\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$. On pose $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(\widetilde{\lambda})$. On note $\mathfrak{a}$ la composante hyperbolique de $\mathfrak{h}$ et fixe une chambre $\mathfrak{a}^{*+}$ de $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{a})$. On note aussi μ et ν les composantes infinitésimalement elliptique et hyperbolique de λ.

Afin de fournir une paramétrisation canonique d'un sous-ensemble de $\widehat{G}$ qui permette de donner une description de la formule de Plancherel, M. Duflo a introduit les objets du (a) de la définition ci-dessous. Quand $\lambda\in\mathfrak{g}^*_{ss\,reg}$, ces objets seront compatibles avec les miens, car on pourra prendre $t\in[0,1]$ en posant $\lambda_0=\lambda$ dans le lemme 5.2, et on aura $X_G^{Ind}(\widetilde{\lambda})=X_G^{irr}(\lambda)$ dans la définition 5.5 (c).

Définition 5.1. **(a)** Soit $f\in\mathfrak{g}^*$. On note
B_f la forme bilinéaire alternée non dégénérée $(\dot{X},\dot{Y})\mapsto f([X,Y])$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$,
$G(f)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$ le sous-groupe de Lie de $G(f)\times DL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ formé des couples $(x,\hat{a})$ tels que $(\operatorname{Ad}x)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$ est l'image de $\hat{a}$ dans $SL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ (cf. 4.3 (a)),
$\{1,\iota\}$ et $G(f)_0^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$ les images réciproques de $\{1\}$ et $G(f)_0$ par le morphisme de groupes de Lie surjectif canonique de $G(f)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$ dans $G(f)$,
$X_G^{irr}(f)$ l'ensemble fini des classes d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles τ de $G(f)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$ telles que $\tau(\iota)=-\operatorname{id}$ et $\tau(\exp X)=e^{\mathrm{i}\,f(X)}\operatorname{id}$ pour $X\in\mathfrak{g}(f)$ (dans ce cas τ est de dimension finie).

(b) On note $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ l'image réciproque de $G(\widetilde{\lambda})$ dans $G(\lambda_{can})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda_{can})}$. On posera aussi $G(\widetilde{\lambda})_0^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}=G(\lambda_+)_0^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ (cf. $G(\widetilde{\lambda})_0=G(\lambda_+)_0$ et $\mathfrak{g}(\lambda_+)=\mathfrak{h}$).

Lorsque $\mathfrak{a}^{*+}=\mathfrak{a}^*$, on a $\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})=\mathfrak{h}$ et $G(\widetilde{\lambda})=G(\lambda_+)$, et on notera dans ce cas $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ pour désigner $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ et $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.

Dans la suite, on identifiera les fonctions complexes sur $G(\lambda_+)$ aux fonctions complexes sur le revêtement $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ qui sont constantes sur les fibres.

Lemme 5.2. *On fixe un réel* $t \in]0,1]$. *On utilise les systèmes de racines positives de la définition 1.3 (b) et la notation* λ_t *du lemme 1.4.*
On pose $\mathcal{L}_{\lambda_t} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum\limits_{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ *et,* $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g}(\nu_+)$ *en anticipant sur la partie III.*

(a) *On a* $G(\lambda_t)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *et* $\mathcal{L}_{\lambda_t}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ *est un lagrangien de* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, B_{\lambda_t})$ *stable par* $G(\lambda_t)$. *La fonction complexe* $\delta_{\lambda_t}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *sur* $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *et le morphisme de groupes de Lie* $\rho_{\lambda_t}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *de* $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *dans* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *qu'on en déduit (cf. 4.2 (e) et 4.3 (b)) sont indépendants de* t, *et donc respectivement égaux à* $\delta_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *et* $\rho_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$.
On a $\mathrm{d}_1\rho_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}} = \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$.

(b) *Soit* $\hat{e} \in G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *au-dessus d'un élément elliptique* e *de* $G(\lambda_+)$. *On a*

$$\rho_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\hat{e}) \;=\; \delta_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}(\hat{e}) \times \det\big(\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}}\big)_{\sum\limits_{\alpha' \in R_K^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha'}} \times \prod_{\mathcal{O} \in \langle e\rangle\backslash \widetilde{R}_{\mathbb{C}}^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} (-1)^{m_{\mathcal{O}}-1} u_{\mathcal{O}}$$

où $R_K^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ *est l'ensemble des* $\alpha' \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ *compactes,* $\widetilde{R}_{\mathbb{C}}^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ *est l'ensemble des classes des* $\beta \in R^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ *complexes modulo l'identification de* β *avec* $-\overline{\beta}$, *et, pour chaque orbite* $\mathcal{O}$ *d'un élément* $\{\beta,-\overline{\beta}\}$ *de* $\widetilde{R}_{\mathbb{C}}^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ *sous l'action du sous-groupe* $\langle e\rangle$ *de* G *engendré par* e, *on note* $m_{\mathcal{O}}$ *le cardinal de* $\mathcal{O}$ *et* $u_{\mathcal{O}}$ *l'unique valeur propre de* $(\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})^{m_{\mathcal{O}}}$ *associée à un vecteur propre qui s'écrive* $X_\beta - \overline{X_{-\beta}}$ *pour au moins un* $X_\beta \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta}$ *et un* $X_{-\beta} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\beta}$ *vérifiant* $[X_\beta, X_{-\beta}] = H_\beta$.

Démonstration du lemme. **(a)** La première égalité provient du lemme 1.4. Il est immédiat que $\mathcal{L}_{\lambda_t}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est un lagrangien de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, B_{\lambda_t})$ stable par $G(\lambda_t)$.

On note φ_t la forme sesquilinéaire hermitienne $(v,w) \mapsto \mathrm{i}\, B_{\lambda_t}(v,\overline{w})$ sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})_{\mathbb{C}}$. On va se servir des notations de l'énoncé du (b). L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{\lambda_t}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est somme directe des projections des espaces vectoriels suivants qui sont deux à deux orthogonales pour φ_t avec une signature de forme hermitienne restreinte précisée entre parenthèse : les $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha'}$ avec $\alpha' \in R_K^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (signature $(0,1)$), les $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha''}$ avec $\alpha'' \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ imaginaire non compacte (signature $(1,0)$), les $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\overline{\beta}}$ avec $\{\beta,-\overline{\beta}\} \in \widetilde{R}_{\mathbb{C}}^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (signature $(1,1)$), et les $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\gamma}$ avec $\gamma \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ hors de $R^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (signature $(0,0)$).

Soit e un élément elliptique de $G(\lambda_+)$. Par ce qui précède, la forme sesquilinéaire hermitienne φ_t est non dégénérée sur $(\mathcal{L}_{\lambda_t} \cap \mathfrak{m}'_{\mathbb{C}})/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et nulle sur son orthogonal. De plus, $(\mathcal{L}_{\lambda_t} \cap \mathfrak{m}'_{\mathbb{C}})/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est somme directe orthogonale pour φ_t de l'image et du noyau de $1 - \mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}}$. Donc la restriction de φ_t à chacun d'entre eux est non dégénérée. Un argument de continuité prouve ensuite que les signatures de ces restrictions, et *a fortiori* $q_{\mathcal{L}_{\lambda_t}}(e)$, sont indépendants de t. De même, l'orientation $o(B_{\lambda_t})_{(1-\mathrm{Ad}\, e)\cdot(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}$ est indépendante de t. Cela peut être précisé comme dans la preuve de 5.4. On utilise ensuite la définition 4.2 (d) et la proposition 4.3 (c).

La formule pour $\mathrm{d}_1\rho_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ se déduit de la proposition 4.3 (b).

(b) Il s'agit d'appliquer la proposition 4.3 (c) en tenant compte de la démonstration du (a). On utilise la notation φ_t de cette démonstration.

Soit $\mathcal{O}$ l'orbite sous $\langle e\rangle$ d'un $\{\beta,-\overline{\beta}\} \in \widetilde{R}_{\mathbb{C}}^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. On fixe $(X_\beta, X_{-\beta}) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\beta}$ tel que $[X_\beta, X_{-\beta}] = H_\beta$. La condition « $X_\beta - \overline{X_{-\beta}}$ est vecteur propre de $(\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})^{m_{\mathcal{O}}}$ » est satisfaite (pour une unique valeur propre de $(\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})^{m_{\mathcal{O}}}$) quand $e^{m_{\mathcal{O}}}\beta = \beta$, et se réalise (à nouveau avec unicité de la valeur propre) en remplaçant X_β et $X_{-\beta}$ par certains de leurs multiples quand $e^{m_{\mathcal{O}}}\beta = -\overline{\beta}$. Sous cette condition, les vecteurs propres $\sum\limits_{0 \le k \le m_{\mathcal{O}}-1} \zeta^{-k} (\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})^k\, (X_\beta - \overline{X_{-\beta}})$ de $\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}}$, où ζ décrit l'ensemble des racines $m_{\mathcal{O}}^{\text{ièmes}}$ de $u_{\mathcal{O}}$, ont des projections dans $\mathcal{L}_{\lambda_t}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ deux à deux orthogonales pour φ_t avec des « carrés » strictement négatifs. Cela conduit à la formule annoncée. □

Remarque 5.3. Soit $f \in \mathrm{Supp}_{\mathfrak{g}(\lambda)^*}(G(\lambda)_0 \cdot \widetilde{\lambda})$.

On note ξ la composante nilpotente de f. Il existe une unique sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}}$ sur laquelle ξ est nulle. En effet, d'après le lemme 1.5 (a) et [Kos 59, cor. 5.3 p. 997 et cor. 5.6 p. 1001], l'élément de $\mathrm{D}(\mathfrak{g}(\lambda))$ auquel ξ s'identifie à l'aide de la forme bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ appartient à une unique sous-algèbre formée d'éléments nilpotents maximale de $\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}}$, dont l'orthogonal pour $\langle\ ,\ \rangle$ convient. L'unicité de $\mathfrak{b}$ montre que $\overline{\mathfrak{b}} = \mathfrak{b}$.

On note $\mathfrak{n}_\lambda$ la somme des espaces propres pour l'action de $\mathrm{Z}(\mathfrak{g}(\lambda))_{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, dont le poids $\alpha \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g}(\lambda))_{\mathbb{C}}^*$ (toujours restriction d'un poids de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$) vérifie : $\langle \nu, \alpha\rangle > 0$ ou $(\langle \nu, \alpha\rangle = 0$ et $i\langle \mu, \alpha\rangle > 0)$. On pose $\mathcal{L}_f = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{n}_\lambda$. On constate que $\mathcal{L}_f$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ en décomposant $\mathcal{L}_f$ en sous-espaces propres relativement à une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ incluse dans $\mathfrak{b}$.

Les inclusions $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Ker}\,\xi$ et $[\mathcal{L}_f, \mathfrak{n}_\lambda] \subseteq \mathfrak{n}_\lambda \subseteq (\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}})^{\perp\langle\ ,\ \rangle}$ fournissent les égalités $f([\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]) = 0$ et $f([\mathcal{L}_f, \mathcal{L}_f]) = 0$. Donc $\mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{b}$ et $\mathcal{L}_f/\mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}}$ est un lagrangien de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}}, B_f)$, clairement stable par $G(f)$. D'après 4.3 (b) le morphisme de groupes de Lie $\rho_f^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$ de $G(f)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ qu'on en déduit vérifie $\mathrm{d}_1 \rho_f^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\cdot^{\mathbb{C}})_{\mathcal{L}_f/\mathfrak{g}(f)_{\mathbb{C}}}$. ■

J'adapte maintenant les paramètres de Duflo à la situation qui m'intéresse.

Lemme 5.4. **(a)** *L'espace vectoriel* $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in R^+_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ *(cf. 1.3 (c)) fournit le lagrangien* $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ *de* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, B_{\lambda_+})$. *On note* $\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}$ *le caractère complexe de* $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *qui lui est associé (cf. 4.3 (b)). La restriction de* $\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}(\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+})^{-1}$ *à* $\mathrm{C}_{G_0}(\mathfrak{h})$ *est indépendante de* $\mathfrak{a}^{*+}$.

(b) *La restriction de* B_{λ_+} *au sous-espace vectoriel* $\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})/\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *est non dégénérée. L'orthogonal de* $\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})/\mathfrak{h}$ *dans* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *muni de* B_{λ_+} *est la projection dans* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ *de la trace sur* $\mathfrak{g}$ *de la somme des* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ *lorsque* α *décrit* $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ *privé de* $R(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. *On l'identifiera à* $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$.

Soit $e \in G(\lambda_+)$ *elliptique. Les orientations* $\mathcal{O}(B_{\lambda_+})_{(1-\mathrm{Ad}\,e)(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}))}$ *et* $\mathcal{O}(B_{\lambda_{can}})_{(1-\mathrm{Ad}\,e)(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}))}$ *sont égales.*

(c) *L'espace vectoriel* $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}} = \mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in R^+_{\tilde{\lambda}}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha$ *(cf. 1.3 (c)) fournit le lagrangien* $\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}$ *de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}$, *à la fois pour* $B_{\lambda_{can}}$ *et pour* B_{λ_+}. *On note* $\rho_{\tilde{\lambda}}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ *le caractère complexe de* $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ *qui est associé à* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, B_{\lambda_{can}})$ *(cf. 4.3 (b)). Il prolonge le caractère complexe de l'image réciproque de* $G(\lambda_+)$ *dans* $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ *qui est associé à* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, B_{\lambda_+})$.

Démonstration du lemme. **(a)** Soit $e \in \mathrm{C}_{G_0}(\mathfrak{h})$ elliptique. L'indépendance de $\big(\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}(\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+})^{-1}\big)(e)$ par rapport à $\mathfrak{a}^{*+}$ s'obtient en reprenant la démonstration du lemme 5.2 (b).

(b) Au début, on utilise le fait que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ est somme directe B_{λ_+}-orthogonale des projections des sous-espaces vectoriels $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^\alpha \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ avec $\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$.

On pose $V = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$ et $V(e) = \mathfrak{g}(e)/\mathfrak{g}(e)(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$. L'espace vectoriel V est somme directe des sous-espaces vectoriels $V(e)$ et $(1-\mathrm{Ad}\, e)(V)$, qui sont orthogonaux simultanément pour $B_{\lambda_{can}}$ et pour B_{λ_+}. Pour chaque $\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, on fixe $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$ et $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. On constate que les orientations $o(B_{\lambda_+})_V$ et $o(B_{\lambda_{can}})_V$ sont toutes deux dirigées par le produit extérieur des vecteurs suivants : les $X_\alpha \wedge X_{-\alpha}$ avec $\alpha \in R^+_{\tilde{\lambda}}$ réelle, les $\mathrm{i}(X_\alpha \wedge X_{-\alpha})$ avec $\alpha \in R^+_{\tilde{\lambda}}$ imaginaire, et les $X_\alpha \wedge X_{-\alpha} \wedge \overline{X_\alpha} \wedge \overline{X_{-\alpha}}$ où $\dot{\alpha}$ décrit les classes des $\beta \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \setminus R(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ complexes modulo l'action du groupe engendré par la conjugaison et le passage à l'opposé. On prouve de même que les orientations $o(B_{\lambda_+})_{V(e)}$ et $o(B_{\lambda_{can}})_{V(e)}$ sont égales, en utilisant le système de racines $R(\mathfrak{g}(e)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}(e)_{\mathbb{C}})$ et le couple $(\lambda, \rho_{\mathcal{F}^+})$. Donc $o(B_{\lambda_+})_{(1-\mathrm{Ad}\, e)(V)} = o(B_{\lambda_{can}})_{(1-\mathrm{Ad}\, e)(V)}$.

(c) Soient $e \in G(\lambda_+)$ elliptique et $\widehat{e} \in G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ au-dessus de e. On note φ_{can} et φ_+ les formes sesquilinéaires hermitiennes $(v, w) \mapsto \mathrm{i}\, B_{\lambda_{can}}(v, \overline{w})$ et $(v, w) \mapsto \mathrm{i}\, B_{\lambda_+}(v, \overline{w})$ sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}$. L'espace vectoriel $\mathcal{L} := \mathcal{L}_{\tilde{\lambda}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}$ est somme directe des sous-espaces vectoriels $\mathcal{L}(e) := (\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}} \cap \mathfrak{g}(e)_{\mathbb{C}})/\mathfrak{g}(e)(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}$ et $(1 - \mathrm{Ad}\, e)(\mathcal{L})$, qui sont orthogonaux simultanément pour φ_{can} et pour φ_+. On s'inspire du début de la démonstration du lemme 5.2 (b). Le nombre de composantes strictement négatives dans la matrice de l'une ou l'autre des formes sesquilinéaires φ_{can} et φ_+ sur $\mathcal{L}$, relativement à une base orthogonale, est égal à : la moitié du nombre de racines compactes dans $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \setminus R(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ plus le quart du nombre de racines complexes dans $R(\mathfrak{g}(\nu)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \setminus R(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$. On a une propriété analogue pour $\mathcal{L}(e)$. D'après (b) et la définition 4.2 (d), les fonctions ρ associées à $B_{\lambda_{can}}$ et B_{λ_+} prennent donc les mêmes valeurs en $\widehat{e}$. ◻

Définition 5.5. **(a)** Soit $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelle. On note $n_\alpha = \frac{1}{2} \sum_\beta \beta(H_\alpha)$ où la somme porte sur les $\beta \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ tels que $\beta + \overline{\beta} \in \mathbb{R}^+\alpha$. À deux vecteurs $X_\alpha \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \cap \mathfrak{g}$ et $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha} \cap \mathfrak{g}$ tels que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$, on associe l'élément elliptique $\gamma_\alpha = \exp(\pi(X_\alpha - X_{-\alpha}))$ de $\mathrm{C}_{G_0}(\mathfrak{h})$. (On sait que $n_\alpha \in \mathbb{N}$ et que l'ensemble $\{\gamma_\alpha, \gamma_\alpha^{-1}\}$ est indépendant du choix de $(X_\alpha, X_{-\alpha})$, cf. [DV 88, p. 327].)

(b) On note $X_G^{irr,+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ l'ensemble fini des classes d'isomorphisme des représentations unitaires irréductibles τ_+ de $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ telles que $\tau_+(\iota) = -\,\mathrm{id}$ et $\tau_+(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(X)}\,\mathrm{id}$ pour $X \in \mathfrak{h}$ (une telle τ_+ est de dimension finie),
et $X_G^{final,+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ l'ensemble des $\tau_+ \in X_G^{irr,+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ tels que pour toute racine $\alpha \in R(\mathfrak{g}(\lambda)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelle, $(\delta_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\tau_+)(\gamma_\alpha)$ n'admette pas la valeur propre $(-1)^{n_\alpha}$. (Quand G est connexe, la démonstration de 9.3 (b) montrera que cette condition peut être remplacée par $(\delta_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}\tau_+)(\gamma_\alpha) \neq (-1)^{n_\alpha}\,\mathrm{id}$.)
On note aussi $X_G^{final,+}$ l'ensemble des $(\widetilde{\lambda}', \mathfrak{a}'^{*+}, \tau'_+)$ avec $\widetilde{\lambda}' = (\lambda', \mathcal{F}'^+) \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$, $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}(\widetilde{\lambda}')$, $\mathfrak{a}'$ est la composante hyperbolique de $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{a}'^{*+}$ est une chambre de $(\mathfrak{g}(\lambda')(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}'^+}), \mathfrak{a}')$, et $\tau'_+ \in X_G^{final,+}(\widetilde{\lambda}', \mathfrak{a}'^{*+})$.

(c) On note $X_G(\widetilde{\lambda})$ (resp. $X_G^{irr}(\widetilde{\lambda})$) l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations unitaires (resp. unitaires irréductibles) τ de $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ telles que $\tau(\iota) = -\,\mathrm{id}$ et $\tau(\exp X) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(X)}\,\mathrm{id}$ pour $X \in \mathfrak{h}$,
et $X_G^{Ind}(\widetilde{\lambda})$ l'ensemble (indépendant du choix de $\mathfrak{a}^{*+}$) formé des classes d'isomorphisme des représentations unitaires τ de $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ telles que

$$\frac{\rho_{\tilde\lambda}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}}{|\rho_{\tilde\lambda}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}|}\,\tau \;=\; \mathrm{Ind}_{G(\lambda_+)}^{G(\tilde\lambda)}\Big(\frac{\rho_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^{*+}}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}{|\rho_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^{*+}}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}|}\,\tau_+\Big)$$

pour un $\tau_+ \in X_G^{\mathit{final},+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ (donc $X_G^{\mathit{Ind}}(\widetilde{\lambda}) \subseteq X_G(\widetilde{\lambda})$).
On pose aussi : $X_G^{\mathit{Ind}} = \Big\{(\widetilde{\lambda}', \tau') \,;\, \widetilde{\lambda}' \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{\mathit{reg}} \text{ et } \tau' \in X_G^{\mathit{Ind}}(\widetilde{\lambda}')\Big\}$.

6. Condition d'intégrabilité

On conserve les notations de la section précédente.

Le lemme suivant est une adaptation de [Duf 82a, remarque 2 p. 154]. Il ne sera pas utilisé dans la suite de cet article.

Lemme 6.1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) $X_G^{\mathit{irr},+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}) \neq \emptyset$;

(ii) *il existe un caractère unitaire* $\chi_{\tilde\lambda}^G$ *(unique) de* $G(\widetilde{\lambda})_0^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ *tel que :*

$$\chi_{\tilde\lambda}^G(\iota) \;=\; -1 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}_1\chi_{\tilde\lambda}^G \;=\; \mathrm{i}\lambda|_{\mathfrak{h}} \;;$$

(iii) $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{\mathit{reg},G}$.

Démonstration du lemme. **(i)⇔(ii)** L'implication « (i) ⇒ (ii) » est claire. On suppose (ii) vérifié. La restriction à $G(\widetilde{\lambda})_0^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ de la représentation unitaire $\mathrm{Ind}_{G(\lambda_+)_0^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}^{G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}\chi_{\tilde\lambda}^G$ de $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est non nulle (car induite à partir d'un espace non nul) et multiple de $\chi_{\tilde\lambda}^G$. Le théorème 8.5.2 de [Dix 64, p. 153] montre donc l'existence d'un élément de $X_G^{\mathit{irr},+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$.

(ii) ⇔ (iii) D'après le lemme 5.2 (a), en multipliant $\chi_{\tilde\lambda}^G$ par $\rho_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ la condition (ii) équivaut à l'existence d'un caractère complexe du groupe de Lie $G(\lambda_+)_0$ de différentielle $\mathrm{i}\lambda + \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}}$. Cette dernière propriété s'écrit : $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{\mathit{reg},G}$. □

Remarque 6.2. Soit $f \in \mathrm{Supp}_{\mathfrak{g}(\lambda)^*}(G(\lambda)_0 \cdot \widetilde{\lambda})$. En particulier, on a $f \in \mathfrak{g}^*_{\mathit{reg}}$.

Le groupe de Lie réel $G(f)_0$ est commutatif (cf. [B.. 72, th. p. 17]). Le stabilisateur de la composante nilpotente de f dans le groupe adjoint de $G(\lambda)_0$ est linéaire algébrique unipotent d'après [Spr 66, th. 5.9 (b) p. 138]. Le tore maximal de $G(f)_0$ est donc égal à celui de $\mathrm{Z}(G(\lambda)_0)$. Compte tenu de la remarque 5.3, les arguments de la démonstration du lemme précédent permettent d'en déduire que :

$$X_G^{\mathit{irr}}(f) \neq \emptyset \iff \forall Z \in \mathrm{Ker}\exp_{\mathrm{Z}(G(\lambda)_0)}\ \mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\lambda + \rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h}})(Z)} = 1.$$

Donc la condition « $X_G^{\mathit{final},+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}) \neq \emptyset$ » implique la condition « $X_G^{\mathit{irr}}(f) \neq \emptyset$ ».

La réciproque est fausse, comme le montre le cas où $G = PSL(2,\mathbb{R})$, $\lambda = 0$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{so}(2)$, donc $X_G^{\mathit{final},+}(\widetilde{\lambda}, \{0\}) = \emptyset$, $X_G^{\mathit{irr}}(f) \neq \emptyset$, et aussi $X_G^{\mathit{irr}}(-f) \neq \emptyset$. Cela traduit le fait que $PSL(2,\mathbb{R})$ n'a pas de représentation limite de sa série discrète hors de sa série discrète. Pour généraliser la méthode des orbites proposée par M. Duflo, il était naturel d'imaginer que les orbites coadjointes régulières de G susceptibles d'être l'orbite $G\cdot l$ associée à une représentation $T_{l,\tau}^G$ à caractère infinitésimal nul seraient $G\cdot f$ et $G\cdot(-f)$ (cf. 8.4 (a), en remplaçant $(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ et λ par l). Cette généralisation aurait créé des difficultés, car $G\cdot f \neq G\cdot(-f)$ et le dual unitaire de G n'a qu'un seul élément à caractère infinitésimal nul. ■

III. Construction de représentations

Cette partie suit de près l'article [Duf 82a] de M. Duflo, pages 160 à 180.

On se donne $\widetilde{\lambda} = (\lambda, \mathcal{F}^+) \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$. On pose $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(\widetilde{\lambda})$. On note μ et ν (resp. $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$) les composantes infinitésimalement elliptique et hyperbolique de λ (resp. de $\mathfrak{h}$). On fixe aussi une chambre $\mathfrak{a}^{*+}$ de $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}), \mathfrak{a})$ et $\tau_+ \in X_G^{final,+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$. D'où $R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et $\lambda_+ = \mu_+ + \nu_+$ (cf. 1.3 (b)). On pose $\widetilde{\mu} = (\mu, \mathcal{F}^+ \cap \mathrm{i}\mathfrak{t}^*)$.

7. Le cas où G est connexe

Dans toute cette section, on suppose G connexe.

L'inclusion $\mathrm{Ad}\, G \subseteq \mathrm{int}\, \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ assure que $G(\lambda_+)$ est égal à $\mathrm{C}_G(\mathfrak{h})$, et que $\delta_{\lambda_+}^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est un caractère unitaire de $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ (cf. 4.3, et aussi [Duf 84, haut p. 118]). En effet pour toute composante connexe ${\mathfrak{a}^*}_0^+$ de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}^*$ qui ne s'annulent sur aucun H_α avec $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ non imaginaire, l'espace vectoriel

$$\mathcal{L}^+ := \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\substack{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ \alpha \text{ imaginaire non compacte}}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \oplus \sum_{\substack{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ \alpha \text{ compacte}}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha} \oplus \sum_{\substack{\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \\ {\mathfrak{a}^*}_0^+(H_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$$

fournit le lagrangien positif $\mathcal{L}^+/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ de $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, B_{\lambda_+})$ stable par $G(\lambda_+)$.

On note M l'intersection des noyaux des caractères réels positifs de $\mathrm{C}_G(\mathfrak{a})$ et $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie (donc $\widetilde{\mu} \in \widetilde{\mathfrak{m}^*_{I,M}}$ par 7.3 (a) et $X_M^{irr}(\widetilde{\mu}) = X_M^{final,+}(\widetilde{\mu}, \{0\})$), $R^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) = R(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \cap R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (notation de 1.3 (b) relative à $\mathfrak{m}$ et $(\widetilde{\mu}, \{0\})$), $\mu_{+,\mathfrak{m}} = \mu_{\mathfrak{m},\tilde{\mu},\{0\}}$ l'élément $\mu - 2\mathrm{i}\rho_{\mathfrak{m},\mathfrak{t}}$ de $\mathfrak{t}^*$ (donc $M(\widetilde{\mu}) = \mathrm{C}_M(\mathfrak{t})$ et $\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}$ est un caractère unitaire de $M(\widetilde{\mu})^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}$),

$$\mathfrak{n}_M = \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}_M = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_M,$$

$$q = |\{\alpha \in R^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \mid \alpha \text{ compacte}\}|,$$

$$\mathfrak{k}_M = \mathfrak{t} \oplus \Big(\sum_{\substack{\alpha \in R^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}) \\ \alpha \text{ compacte}}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha} \Big) \cap \mathfrak{g} \quad \text{et} \quad K_{M_0} = \exp \mathfrak{k}_M.$$

Définition 7.1. **(a)** On note $T_{\tilde{\mu}}^{M_0}$ la classe de représentation « limite de la série discrète de M_0 » appartenant à $\widehat{M_0}$, dont l'espace des vecteurs K_{M_0}-finis est isomorphe à l'image du caractère unitaire de T_0 de différentielle $\mathrm{i}\mu - \rho_{\mathfrak{m},\mathfrak{t}}$ par le foncteur « d'induction cohomologique » $\mathcal{R}_{M_0}^q := \left({}^u\mathcal{R}_{\mathfrak{b}_M, T_0}^{\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, K_{M_0}}\right)^q (\,\bullet \otimes \bigwedge^{\max} \mathfrak{n}_M)$ décrit dans [KV 95, (11.73) p. 677]. (Elle est notée $\pi_{\mathrm{i}\mu, \mathfrak{b}_M}$ dans [KV 95, bas p. 734], en tenant compte de [KV 95, proposition 11.180 p. 733].)

(b) On note $T_{\tilde{\mu},\sigma}^M = \mathrm{Ind}_{\mathrm{C}_M(\mathfrak{m}).M_0}^M (\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}} \sigma \otimes T_{\tilde{\mu}}^{M_0})$ pour tout $\sigma \in X_M^{irr}(\widetilde{\mu})$, où on a pu définir une représentation $\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}} \sigma \otimes T_{\tilde{\mu}}^{M_0}$ de $\mathrm{C}_M(\mathfrak{m}) M_0$ par l'égalité

$$\left(\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}} \sigma \otimes T_{\tilde{\mu}}^{M_0}\right)(xy) = (\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}} \sigma)(x) \otimes T_{\tilde{\mu}}^{M_0}(y) \quad \text{pour } x \in \mathrm{C}_M(\mathfrak{m}) \text{ et } y \in M_0$$

(dans laquelle $(\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}} \sigma)(x) = \sigma(x, 1)$), car le groupe $\mathrm{Z}(M_0)$ opère dans « l'espace » de $T_{\tilde{\mu}}^{M_0}$ par le caractère unitaire $(\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}} \sigma)\big|_{\mathrm{Z}(M_0)}$ d'après [KV 95, (11.184c) p. 734].

Remarque 7.2. On fixe un sous-groupe compact maximal K de G dont l'involution de Cartan normalise $\mathfrak{h}$. Donc $K_M := K \cap M$ est un sous-groupe compact maximal de M contenant $\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})K_{M_0}$. Tout $\pi \in (\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})M_0)\widehat{\ }$ est relié à certaines représentations $\pi_1 \in (\mathrm{C}_M(\mathfrak{m}))\widehat{\ }$ et $\pi_2 \in (M_0)\widehat{\ }$ par les égalités $\pi(xy) = \pi_1(x) \otimes \pi_2(y)$ pour $x \in \mathrm{C}_M(\mathfrak{m})$ et $y \in M_0$ (cf. [Dix 64, prop. 13.1.8 p. 251]). Soit $\sigma \in X_M^{irr}(\widetilde{\mu})$. D'après [KV 95, (11.187) p. 735 et dem. de prop. 11.192 (a) p. 737] et 5.2 (b) pour passer de M_0 à $\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})M_0$, et [KV 95, prop. 11.57 p. 672 et fin (5.8) p. 332] pour passer du « sous-groupe parabolique » $\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})M_0$ de M à M, le $(\mathfrak{m}_\mathbb{C}, K_M)$-module associé à $T^M_{\tilde{\mu},\sigma}$ est isomorphe à $\mathcal{R}^q_M((\rho^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu+,\mathrm{m}})^{-1}\sigma)$, où $\mathcal{R}^q_M$ est le foncteur d'induction cohomologique relatif à $\mathfrak{b}_M$. ■

Lemme 7.3. **(a)** *On a* $G(\lambda_+) = \mathrm{C}_M(\mathfrak{m}) \exp \mathfrak{h}$ *et* $M(\widetilde{\mu}) = \mathrm{C}_M(\mathfrak{m}) \exp \mathfrak{t}$. *Il existe donc un unique* $\tau_M \in X_M^{irr}(\widetilde{\mu})$ *tel que* $\delta^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu+,\mathrm{m}}\tau_M = (\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}\tau_+)\big|_{M(\tilde{\mu})}$. *(Cette notation ne tient pas compte du fait que* τ_M *dépend de* $\mathfrak{a}^{*+}$.*)*

(b) *La classe de représentation* $\mathrm{Ind}^G_{M.A.N}(T^M_{\tilde{\mu},\tau_M} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes 1\!\!1_N)$ *construite à partir du choix d'un sous-groupe* N *de* G *qui est radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de* G *de composante déployée* A*, appartient à* $\widehat{G}$ *et est indépendante de* N*.*

Démonstration du lemme. **(a)** On a $G(\lambda_+) = \mathrm{C}_G(\mathfrak{h}) \subseteq \mathrm{C}_G(\mathfrak{a}) = MA$ et $M(\widetilde{\mu}) = \mathrm{C}_M(\mathfrak{t})$. Vu [Var 77, th. 17 p. 199], on en déduit que $M(\widetilde{\mu}) = \mathrm{C}_M(\mathfrak{m}) \exp \mathfrak{t}$, puis $G(\lambda_+) = \mathrm{C}_M(\mathfrak{m}) \exp \mathfrak{h}$.

(b) Soit N le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de G de composante déployée A. D'après [Var 77, th. 18 p. 289], il existe une composante connexe ${\mathfrak{a}^*}^+_0$ de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}^*$ qui ne s'annulent sur aucun H_α avec $\alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$ non imaginaire, telle que

$$N = \exp \mathfrak{n} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{n} = \Big(\sum_{\alpha \in R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C}) \text{ et } {\mathfrak{a}^*}^+_0(H_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^+\setminus\{0\}} \mathfrak{g}^\alpha_\mathbb{C} \Big) \cap \mathfrak{g}.$$

Soient $\nu_0 \in {\mathfrak{a}^*}^+_0$ et $\lambda_0 \in (\mathfrak{t}^* + \nu_0) \cap \mathfrak{g}^*_{reg}$. On utilise la proposition 11.1 (a) avec λ_0 à la place de λ (auquel cas « (M', U) » devient « $(\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})\, M_0\, A, N)$ ») et $\pi = (\delta^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu+,\mathrm{m}}\tau_M \otimes T^{M_0}_{\tilde{\mu}}) \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}}$. Comme la classe de $\mathrm{Ind}^G_{M.A.N}(T^M_{\tilde{\mu},\tau_M} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes 1\!\!1_N)$ est déterminée par son caractère (cf. [Cow 88, p. 64]), elle ne dépend pas de N.

On choisit $z = 1$ et $\Lambda = (\Lambda^{can}, R^+_{\mathrm{i}\mathbb{R}}, R^+_\mathbb{R})$ dans [ABV 92, ligne 7 du bas p. 121], où $\Lambda^{can} \otimes \rho(R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})) = \rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}\tau_+$ (cf. [ABV 92, lignes 9 et 10 du bas p. 129]) et les systèmes de racines positives $R^+_{\mathrm{i}\mathbb{R}}$ et $R^+_\mathbb{R}$ sont inclus dans $R^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. D'après le lemme 5.2 (b), la représentation $\widetilde{\Lambda}$ de [ABV 92, p. 123] est $\widetilde{\Lambda} = \delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}\tau_+$. Vu la proposition 11.1 (a), on a $\pi(\Lambda) = \mathrm{Ind}^G_{M.A.N}(T^M_{\tilde{\mu},\tau_M} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes 1\!\!1_N)$ dans [ABV 92, (11.2)(e) p. 122]. Les idées de la démonstration du lemme 5 de [DV 88, p. 335] permettent de montrer que Λ est « final » au sens de [ABV 92, def. 11.13 p. 130]. On applique enfin [ABV 92, th. 11.14 (a) p. 131]. □

Remarque 7.4. On se place dans le cas où $G = SL(3,\mathbb{R})$ et λ est l'élément de $\mathfrak{g}^*_{ssInc,G}$ image de $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ par l'isomorphisme de G-modules qui envoie $A \in \mathfrak{g}$ sur $\mathrm{tr}(A\,.) \in \mathfrak{g}^*$. Le groupe MA qui est ici égal à $G(\lambda)$, est l'image de $GL(2,\mathbb{R})$ par le plongement de groupes de Lie qui envoie $x \in GL(2,\mathbb{R})$ sur $\begin{pmatrix} x & \\ & (\det x)^{-1} \end{pmatrix} \in G$. Mais l'induite $\mathrm{Ind}^G_{M.A.N}(T^M_{\tilde{\mu},\tau_M} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes 1\!\!1_N)$ n'est pas donnée par « nondegenerate data » au sens de [KZ 82, p. 473], car le groupe de Weyl d'une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{R})$ se représente dans $GL(2,\mathbb{R})$. ■

Définition 7.5. On note $T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^{*+},\tau_+} = \mathrm{Ind}^G_{M.A.N}(T^M_{\tilde\mu,\tau_M} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes \mathbb{1}_N)$, indépendamment du choix de N comme dans le lemme ci-dessus.

Ainsi lorsque M est connexe, $X^{irr}_M(\widetilde{\mu})$ a pour seul élément $\chi^M_{\tilde\mu}$, et les classes des représentations $T^M_{\tilde\mu,\chi^M_{\tilde\mu}}$ et $T^M_{\tilde\mu,\{0\},\chi^M_{\tilde\mu}}$ sont toutes deux égales à $T^{M_0}_{\tilde\mu}$.

8. Les représentations $T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$

On va appliquer la construction du cas connexe à $M'_0 := G(\nu_+)_0$. Un passage par l'homologie va permettre (grâce à un résultat de D. Vogan) de normaliser des opérateurs d'entrelacement de façon à prolonger $T^{M'_0}_{\tilde\lambda}$ en une représentation d'un certain groupe M'.

On note $M' = G(\lambda_+)G(\nu_+)_0$ et $\mathfrak{m}' = \mathfrak{g}(\nu_+)$ son algèbre de Lie
(donc $\widetilde{\lambda} \in \widetilde{\mathfrak{m}'^*}_{fond,M'}$ par 8.2 (a), $\mathfrak{m}'(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}) = \mathfrak{h}$ et $X^{irr}_{M'}(\widetilde{\lambda}) = X^{final,+}_{M'}(\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^*)$),
$R^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = R(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\cap R^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ (notation de 1.3 (b) relative à $\mathfrak{m}'$ et $(\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^*)$),
$\lambda_{+,\mathfrak{m}'} = \lambda_{\mathfrak{m}',\tilde\lambda,\mathfrak{a}^*,1}$ l'élément $\mu_+ + \nu$ de $\mathfrak{h}^*$ où μ_+ représente encore $\mu_{\mathfrak{g},\tilde\lambda,\mathfrak{a}^{*+}}$
(donc $B_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}$ est restriction de B_{λ_+}, $M'(\widetilde{\lambda}) = G(\lambda_+)$ et $\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tilde\lambda} = \rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}$),
$$\mathfrak{n}_{M'} = \sum_{\alpha\in R^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}} \quad\text{et}\quad \mathfrak{b}_{M'} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{n}_{M'},$$
$q' = |\{\alpha \in R^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \mid \alpha \text{ compacte}\}| + \frac{1}{2}|\{\alpha \in R^+(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \mid \alpha \text{ complexe}\}|$,
M_{ν_+} l'intersection des noyaux des caractères réels positifs de $\mathrm{C}_{M'_0}(\mathfrak{a})$,
$T^{M_{\nu_+}}_{\tilde\mu} = T^{M_{\nu_+}}_{\tilde\mu,\chi^M_{\tilde\mu}}$ (cf. 7.1 (b)) et $T^{M'_0}_{\tilde\lambda} = T^{M'_0}_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^*,\chi^{M'}_{\tilde\lambda}}$ où $M_{\nu_+}(\widetilde{\mu}) = \exp\mathfrak{t}$ et $M'_0(\widetilde{\lambda}) = \exp\mathfrak{h}$,
$$\mathfrak{u} = \Big(\sum_{\alpha\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \text{ et } \nu_+(H_\alpha)>0} \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}}\Big)\cap\mathfrak{g} \text{ et } U = \exp\mathfrak{u} \text{ (donc } \mathrm{int}\,M'.U\subseteq U \text{ et } M'\cap U = \{1\}).$$

Proposition 8.1. *On note $\mathcal{H}$ « l'espace » de $T^{M'_0}_{\tilde\lambda}$ et $\mathcal{H}^\infty$ l'ensemble de ses vecteurs C^∞.*

(a) *Le sous-espace propre de $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'},\mathcal{H}^\infty)^*$ de poids $-(\mathrm{i}\lambda+\rho_{\mathfrak{m}',\mathfrak{h}})$ sous l'action de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ issue de l'action de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $\bigwedge\mathfrak{n}_{M'}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^\infty$, est de dimension 1. On le note $(H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'},\mathcal{H}^\infty)^*)_{-(\mathrm{i}\lambda+\rho_{\mathfrak{m}',\mathfrak{h}})}$.*

(b) *Il existe une unique représentation unitaire continue S de $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ dans $\mathcal{H}$ satisfaisant les conditions (i) et (ii) suivantes :*

(i) $S(\hat{x})\,T^{M'_0}_{\tilde\lambda}(y)\,S(\hat{x})^{-1} = T^{M'_0}_{\tilde\lambda}(xyx^{-1})$ pour $\hat{x}\in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ au-dessus de $x\in M'(\widetilde{\lambda})$ et $y\in M'_0$;

(ii) l'action de $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ dans $(H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'},\mathcal{H}^\infty)^*)_{-(\mathrm{i}\lambda+\rho_{\mathfrak{m}',\mathfrak{h}})}$ issue de l'action de $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ dans $\bigwedge\mathfrak{n}_{M'}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{H}^\infty$ déduite de S, est $(\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}})^{-1}\,\mathrm{id}$.

Démonstration de la proposition. **(a)** On suppose G connexe et utilise les notations de la section 7.

On fixe un sous-groupe compact maximal K de G dont l'involution de Cartan normalise $\mathfrak{h}$. Donc $K_{M'_0} := K\cap M'_0$ et $K_{M_{\nu_+}} := K\cap M_{\nu_+}$ sont des sous-groupes compacts maximaux de M'_0 et M_{ν_+}. D'après la remarque 7.2, le $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}},K_{M_{\nu_+}})$-module associé à $T^{M_{\nu_+}}_{\tilde\mu}$ est isomorphe à $\mathcal{R}^q_{M_{\nu_+}}((\rho^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu_+,\mathfrak{m}})^{-1}\chi^M_{\tilde\mu})$, où $\mathcal{R}^q_{M_{\nu_+}}$ est le foncteur d'induction cohomologique relatif à $\mathfrak{b}_M$.

Compte tenu de la définition 4.2 (d), et du lemme 5.2 (b) avec ses notations, pour tout $e \in \mathrm{C}_M(\mathfrak{m})T_0$ on a

$$\frac{(\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}\delta^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}})(e)}{(\rho^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}\delta^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu_{+,\mathfrak{m}}})(e)} = \det(\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{n}_{M'}/\mathfrak{n}_M} \times \frac{((\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}})^{-1}\delta^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}})(e)}{((\rho^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu_{+,\mathfrak{m}}})^{-1}\delta^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}_{\mu_{+,\mathfrak{m}}})(e)} = u_1 \cdots u_b$$

où $\{\beta_1,-\overline{\beta_1}\},\ldots,\{\beta_b,-\overline{\beta_b}\}$ sont les éléments de $\widetilde{R}^+_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et $u_1,\ldots,u_b$ sont les rapports des homothéties $(\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{g}^{\beta_1}_{\mathbb{C}}},\ldots,(\mathrm{Ad}\, e^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{g}^{\beta_b}_{\mathbb{C}}}$.

On applique [KV 95, th. 11.225 p. 759 et cor. 8.28 p. 566] au groupe M'_0 et à la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{b}_{M'}$ de $\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}$. Le $(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},K_{M'_0})$-module $\mathcal{H}^f$ associé à $T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}$ est donc irréductible et isomorphe à $\mathcal{R}^{q'}_{M'_0}((\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda}})^{-1}\chi^{M'}_{\tilde{\lambda}})$, où $\mathcal{R}^{q'}_{M'_0}$ est le foncteur d'induction cohomologique relatif à $\mathfrak{b}_{M'}$. On obtient

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}},T_0}\big(H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'},\mathcal{H}^f),\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda}}\chi^{M'}_{\tilde{\lambda}}\big) = 1$$

en prenant $X = \mathcal{R}^{q'}_{M'_0}(Z)$ avec $Z = (\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda}})^{-1}\chi^{M'}_{\tilde{\lambda}}$ dans [KV 95, prop. 8.11 p. 555], et en tenant compte du lemme de Schur (cf. [Wal 88, lem. 3.3.2 p. 80]). Comme le morphisme canonique de $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}},T_0)$-modules de $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'},\mathcal{H}^f)$ dans $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'},\mathcal{H}^\infty)$ est bijectif d'après [Duf 82a, lem. 4 p. 165], cela donne le résultat.

(b) D'après 9.6 (a), on a $\mathrm{int}\, x \cdot T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}} = T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}$ pour tout $x \in M'(\widetilde{\lambda})$. On reprend ensuite la démonstration de [Duf 82a, lem. 6 p. 169], quasiment mot à mot. (L'unicité de S provient bien sûr de 7.3 (b) et du lemme de Schur.) □

Lemme 8.2. *On conserve les notations de la proposition précédente.*

(a) *Il existe un unique* $\tau_{M'} \in X^{irr}_{M'}(\widetilde{\lambda})$ *tel que* $\delta^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}\tau_{M'} = \delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}\tau_+$. *On note* $\tau_{M'} \otimes ST^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}$ *la représentation de* M' *définie (clairement sans ambiguïté) par*

$$\big(\tau_{M'} \otimes ST^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}\big)(xy) = \tau_{M'}(\hat{x}) \otimes S(\hat{x})\, T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}(y)$$

pour $\hat{x} \in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ *au-dessus de* $x \in M'(\widetilde{\lambda})$ *et* $y \in M'_0$.

(b) *Lorsque* G *est connexe, on a :* $T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+} = \mathrm{Ind}^G_{M'.U}((\tau_{M'} \otimes S\, T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}) \otimes \mathbb{1}_U)$.

Démonstration du lemme. **(a)** D'après le lemme 5.2 (b), on a l'égalité

$$\frac{\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}}{|\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}|}(\delta^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}})^{-1} = \frac{\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}}{|\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}|}(\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+})^{-1},$$

où $\rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}$ et $\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}$ sont des morphismes de groupes de Lie. Cela permet de définir $\tau_{M'}$.

(b) On suppose G connexe et utilise les notations de la section 7. On a donc $M' = \mathrm{C}_M(\mathfrak{m})M'_0$, $M'(\widetilde{\lambda}) = \mathrm{C}_M(\mathfrak{m})\exp\mathfrak{h}$ et $\delta^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}$ est un caractère unitaire de $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$.

On choisit une composante connexe ${\mathfrak{a}^*}^+_0$ de l'ensemble des éléments de $\mathfrak{a}^*$ qui ne s'annulent sur aucun H_α avec $\alpha \in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ non imaginaire, dont l'adhérence contient ν_+. On pose

$$\mathfrak{n} = \Big(\sum_{\alpha\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) \text{ et } {\mathfrak{a}^*}^+_0(H_\alpha)\subseteq\mathbb{R}^+\setminus\{0\}} \mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}}\Big) \cap \mathfrak{g}, \quad N = \exp\mathfrak{n} \text{ et } N_{\nu_+} = N \cap M'_0.$$

Le groupe N (resp. N_{ν_+}) est radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de G (resp. M'_0) de composante déployée A. De plus, le produit de G se restreint en un difféomorphisme de $N_{\nu_+} \times U$ sur N.

On note $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ « les espaces » de $\tau_{M'}$ et $T^{M_0}_{\tilde{\mu}}$. L'espace de $T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}$ se réalise sous la forme $\mathcal{H} := \mathrm{Ind}_{M_0.A.N_{\nu_+}}^{M_0'}(\mathcal{W} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes \mathbb{1}_{N_{\nu_+}})$. On identifie $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ à un ensemble de fonctions sur M_0' à valeurs dans $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}$. L'application $\Phi \mapsto \Phi|_{M_0'}$ de l'espace de $\mathrm{Ind}_{\mathrm{C}_M(\mathfrak{m}).M_0.A.N_{\nu_+}}^{\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})\,M_0'}(\delta_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}\tau_{M'} \otimes T_{\tilde{\mu}}^{M_0} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes \mathbb{1}_{N_{\nu_+}})$ dans $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ muni de $1 \otimes T_{\tilde{\lambda}}^{M_0'}$ est un isomorphisme unitaire de M_0'-modules. L'action d'un $x \in \mathrm{C}_M(\mathfrak{m})$ sur $\mathcal{V} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ qui s'en déduit s'écrit $\tau_{M'}(\hat{x}) \otimes S_0(\hat{x})$, où $\hat{x} \in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ est au-dessus de x et $S_0(\hat{x}) \cdot \varphi = \delta_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}(\hat{x}) \times \varphi(x^{-1}\bullet x)$ pour $\varphi \in \mathcal{H}$. On considère un sous-groupe fermé Γ de $\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})$. On pose $M_\Gamma = \Gamma M_{\nu_+}$ et $M_\Gamma' = \Gamma M_0'$. On fixe une composante irréductible $\tau_{M',\Gamma}$ (dans $X_{M_\Gamma'}^{irr}(\widetilde{\lambda})$) de la restriction de $\tau_{M'}$ à $M_\Gamma'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$. On obtient comme ci-dessus un isomorphisme unitaire de M_0'-modules avec transport de l'action de Γ, en remplaçant $\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})$ par Γ, $\tau_{M'}$ par $\tau_{M',\Gamma}$ et $\mathcal{V}$ par l'espace $\mathcal{V}_\Gamma$ de $\tau_{M',\Gamma}$. On détermine un élément $\tau_{M,\Gamma}$ de $X_{M_\Gamma}^{irr}(\widetilde{\mu})$ par l'égalité $\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}\tau_{M,\Gamma} = (\delta_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}\tau_{M',\Gamma})\big|_{\Gamma T_0}$.

On va voir que $S_0 = S$. L'égalité annoncée deviendra une conséquence du théorème d'induction par étages et du fait que $\mathrm{Ind}_{H_1}^{G_1}(\pi \circ p_{|H_1}) \simeq (\mathrm{Ind}_{H_2}^{G_2}\pi) \circ p$ quand $p : G_1 \to G_2$ est un morphisme de groupes de Lie réels surjectif, H_1 est l'image réciproque par p d'un sous-groupe fermé H_2 de G_2, et π est une représentation unitaire continue de H_2.

On reprend les arguments et notations de la démonstration de 8.1 (a). Les groupes $K_{M_\Gamma'} := K \cap M_\Gamma'$ et $K_{M_\Gamma} := K \cap M_\Gamma$ sont des sous-groupes compacts maximaux de M_Γ' et M_Γ. On constate que le $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, K_{M_\Gamma})$-module associé à la représentation $\mathrm{Ind}_{\Gamma.M_0}^{M_\Gamma}(\delta_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}}\tau_{M,\Gamma} \otimes T_{\tilde{\mu}}^{M_0})$ du groupe M_Γ est isomorphe à $\mathcal{R}_{M_\Gamma}^{q}((\rho_{\mu_{+,\mathfrak{m}}}^{\mathfrak{m}/\mathfrak{t}})^{-1}\tau_{M,\Gamma})$, où $\mathcal{R}_{M_\Gamma}^{q}$ est le foncteur d'induction cohomologique relatif à $\mathfrak{b}_M$. Ensuite, à l'aide du théorème d'induction par étages on voit que le $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}', K_{M_\Gamma'})$-module associé à $\mathrm{Ind}_{\Gamma.M_0.A.N_{\nu_+}}^{M_\Gamma'}(\delta_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}\tau_{M'} \otimes T_{\tilde{\mu}}^{M_0} \otimes \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\nu\circ\mathrm{Log}} \otimes \mathbb{1}_{N_{\nu_+}})$ est isomorphe à $\mathcal{R}_{M_\Gamma'}^{q'}((\rho_{\tilde{\lambda}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}})^{-1}\tau_{M',\Gamma})$, où $\mathcal{R}_{M_\Gamma'}^{q'}$ est le foncteur d'induction cohomologique relatif à $\mathfrak{b}_{M'}$. Enfin, on trouve que

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}},\Gamma T_0}\big(\mathcal{V}_\Gamma \otimes_{\mathbb{C}} H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}^f), \rho_{\tilde{\lambda}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}\tau_{M',\Gamma}\big) = 1,$$

où chaque $y \in \Gamma$ projection d'un $\hat{y} \in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ opère sur $\mathcal{V}_\Gamma \otimes_{\mathbb{C}} H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}^f)$ par le produit tensoriel de $\tau_{M',\Gamma}(\hat{y})$ et de l'endomorphisme déduit de $S_0(\hat{y})$.

On se donne $\hat{x} \in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ au-dessus d'un $x \in \mathrm{C}_M(\mathfrak{m})$. On choisit pour Γ le sous-groupe fermé de $\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})$ engendré par x. Donc $\dim \mathcal{V}_\Gamma = 1$ et le calcul qui précède prouve que l'action de $\hat{x}$ sur $(H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}^\infty)^*)_{-(\mathrm{i}\,\lambda+\rho_{\mathfrak{m}',\mathfrak{h}})}$ issue de $S_0(\hat{x})$ est bien l'homothétie de rapport $\rho_{\tilde{\lambda}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}(\hat{x})^{-1}$. □

Définition 8.3. On garde les notations de la proposition 8.1 et du lemme 8.2. On note $T_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}^{G} = \mathrm{Ind}_{M'.U}^{G}((\tau_{M'} \otimes S\,T_{\tilde{\lambda}}^{M_0'}) \otimes \mathbb{1}_U)$.

Pour simplifier la notation $T_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}^{G}$, j'enlèverai $\mathfrak{a}^{*+}$ quand $\mathfrak{a}^{*+} = \mathfrak{a}^*$ (compatible à 9.2) et τ_+ quand $X_G^{irr,+}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ est un singleton, et je remplacerai $\widetilde{\lambda}$ par λ quand $\widetilde{\lambda} = (\lambda, \mathfrak{h}_{(\mathbb{R})}^*)$ (conventions appliquées pour $T_{\tilde{\mu}}^{M_0}$, $T_{\tilde{\mu},\sigma}^{M}$, $T_{\tilde{\mu}}^{M_{\nu_+}}$ et $T_{\tilde{\lambda}}^{M_0'}$).

Proposition 8.4. **(a)** *Pour chaque $l \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^*$ semi-simple, on note $\chi_l^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$ le caractère χ_l de $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ canoniquement associé à l'orbite de l sous l'action de* $\mathrm{int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$

(cf. [KV 95, (4.114) p. 297]). Le centralisateur $(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^G$ de G dans $U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ opère dans l'espace des vecteurs C^∞ de $T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$ par restriction du caractère $\chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{\mathrm{i}\lambda}$ de $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.

(b) *Le morphisme de groupes $z \mapsto (z,1)$ de $\mathrm{Z}(G)$ dans $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ est injectif. Le caractère central de $T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$ est « restriction » de celui de τ_+.*

Démonstration de la proposition. **(a)** Le corollaire 5.25 (b) de [KV 95, p. 344] permet de calculer le caractère infinitésimal de $\tau_{M'} \otimes S\,T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}$ (égal à celui de $T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}$). Pour passer ensuite à G, la démonstration de [KV 95, prop. 11.43 p. 665] s'adapte immédiatement.

(b) Soit $z \in \mathrm{Z}(G)$. L'égalité $S(z,1) = \mathrm{id}$ permet d'obtenir le résultat. □

9. L'injection $G \cdot (\widetilde{\lambda}, \tau) \mapsto T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$ de $G \setminus X^{Ind}_G$ dans $\widehat{G}$

Le théorème 9.6 va généraliser l'essentiel de celui écrit par M. Duflo dans [Duf 82a, lem. 8 p. 173]. Ma démonstration est similaire à la sienne, mis à part un résultat inattendu : le lemme 9.3 (b). Je rappelle qu'une classe d'équivalence de représentation unitaire irréductible traçable d'un groupe de Lie réel est déterminée par son caractère (cf. [Cow 88, p. 64]).

Soit τ la représentation induite à partir de τ_+ de la définition 5.5 (c).

Lemme 9.1. *Les paramètres $\widetilde{\lambda}$ et τ déterminent $T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$.*

Démonstration du lemme. Ce résultat découlera du théorème 10.2, en y enlevant dans un premier temps toute référence à $T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$ (pour la cohérence du raisonnement). □

Définition 9.2. **(a)** On note $T^G_{\tilde{\lambda},\tau} = T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$. Dans la notation $T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$, j'enlèverai τ quand $X^{Ind}_G(\widetilde{\lambda})$ est un singleton, et je remplacerai $\widetilde{\lambda}$ par λ quand $\widetilde{\lambda} = (\lambda, \mathfrak{h}^*_{(\mathbb{R})})$.

(b) Soit a un automorphisme du groupe de Lie G. Il induit des isomorphismes canoniques encore notés a, d'espaces vectoriels de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(a\lambda)(\mathrm{i}\rho_{a\mathcal{F}^+})$, d'algèbres de Lie de $\mathfrak{sl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}))$ sur $\mathfrak{sl}(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(a\lambda)(\mathrm{i}\rho_{a\mathcal{F}^+}))$ par conjugaison, de groupes de Lie de $DL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}))$ sur $DL(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(a\lambda)(\mathrm{i}\rho_{a\mathcal{F}^+}))$ par intégration, et enfin de groupes de Lie de $G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ sur $G(\widetilde{a\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(a\lambda)(\mathrm{i}\rho_{a\mathcal{F}^+})}$.

Lemme 9.3. *Soit $\tau_0 \in (G_0(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}})^\wedge$ qui intervient dans $\tau_{+|G_0(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}$.*

(a) *On a : $\tau_0 \in X^{final,+}_{G_0}(\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$ et $G_0(\lambda_+) = \mathrm{C}_{G_0}(\mathfrak{h})$.*

(b) *On pose : $\dot{\tau}_0 = \dfrac{\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}}{|\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+}}|}\tau_0$ (cf. 5.5 (a)). L'action du groupe $G_0(\widetilde{\lambda})$ sur la classe de représentation $\dot{\tau}_0$ est triviale.*

Démonstration du lemme. **(a)** La définition 5.5 (b) assure que τ_0 est final. L'égalité $G_0(\lambda_+) = \mathrm{C}_{G_0}(\mathfrak{h})$ découle du lemme 1.4.

(b) On prouve que $\mathrm{tr}\,\dot{\tau}_0(x\gamma x^{-1}) = \mathrm{tr}\,\dot{\tau}_0(\gamma)$ pour $x \in G_0(\widetilde{\lambda})$ et $\gamma \in G_0(\lambda_+)$.

Soit G_1 le sous-groupe de G_0 formé des éléments qui fixent μ et $\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}$. On note $\mathfrak{g}_1$ son algèbre de Lie. Comme les formes linéaires μ et $\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}$ sont infinitésimalement elliptiques, $\mathfrak{g}_1$ est réductive, $\mathfrak{h} \in \mathrm{Car}\,\mathfrak{g}_1$, et G_1 est connexe. Le système de racines $R(\mathfrak{g}_{1\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ n'a pas de racine imaginaire. On note $W(\mathfrak{g}_1(\nu),\mathfrak{a})$ le groupe de Weyl du système de racines formé des racines restreintes de $(\mathfrak{g}_1(\nu),\mathfrak{a})$. D'après [Kna 86, th. 5.17 p. 125, (5.5) p. 126 et lemma 5.16 p. 124] appliqué à G_1 d'une part, et [Kna 86, prop. 4.12 p. 81] d'autre part, l'application canonique de $G_0(\widetilde{\lambda})/G_0(\lambda_+)$ dans $W(\mathfrak{g}_1(\nu),\mathfrak{a})$ est bijective. On se donne $\beta\in R(\mathfrak{g}_1(\nu)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, $X\in\mathfrak{g}_1(\nu)^{\beta|_{\mathfrak{a}}}$ et $Y\in\mathfrak{g}_1(\nu)^{-\beta|_{\mathfrak{a}}}$ tels que $[X,Y]$ est la racine duale de $\beta|_{\mathfrak{a}}$ dans $\mathfrak{a}$. On pose $g=\exp(\frac{\pi}{2}(X-Y))$. Donc $g\in G_0(\widetilde{\lambda})$ se projette dans $W(\mathfrak{g}_1(\nu),\mathfrak{a})$ sur la réflexion $s_{(\beta|_{\mathfrak{a}})}$ au vu de la démonstration de [Kna 86, prop. 5.15 (c) p. 123]. On se contente maintenant de montrer l'égalité $\operatorname{tr}\dot{\tau}_0(g\gamma g^{-1})=\operatorname{tr}\dot{\tau}_0(\gamma)$ pour $\gamma\in G_0(\lambda_+)$.

Un calcul dans $SL(2,\mathbb{C})$ montre que pour toute $\alpha\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelle, on a $\operatorname{Ad}\gamma_\alpha=\exp(\mathrm{i}\pi\operatorname{ad}H_\alpha)$ et $\operatorname{Ad}\gamma_\alpha^2=\mathrm{id}$ dans $GL(\mathfrak{g})\subseteq GL(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Donc $\gamma_\alpha^2\in \mathrm{Z}(G_0)$. D'après [Kna 86, lemma 12.30 (c) p. 469] et (a), tout élément γ de $G_0(\lambda_+)$ s'écrit $\gamma=h\,z\,\gamma_{\alpha_1}\dots\gamma_{\alpha_k}$ avec $h\in\exp\mathfrak{h}$, $z\in\mathrm{Z}(G_0)$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelles. Compte tenu de la proposition 4.3 (b), la différentielle en 1 de $\frac{\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^*+}}{|\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^*+}|}$ est la demi-somme des $\alpha\in R(\mathfrak{g}(\nu)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ tels que: $\mathrm{i}\mu(H_\alpha)>0$ ou, $\mathrm{i}\mu(H_\alpha)=0$ et $\rho_{\mathcal{F}^+}(H_\alpha)>0$. Donc $G_0(\widetilde{\lambda})$ laisse invariants les caractères unitaires par lesquels $\exp\mathfrak{h}$ et $\mathrm{Z}(G_0)$ agissent dans l'espace de $\dot{\tau}_0$. Dans la suite de cette démonstration, on prendra pour cette raison γ de la forme $\gamma=\gamma_{\alpha_1}\cdots\gamma_{\alpha_k}$ avec $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelles.

Pour toute $\alpha\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelle, $\gamma_\alpha g\gamma_\alpha^{-1}$ (resp. $\gamma_\alpha g^{-1}\gamma_\alpha^{-1}$) est égal à g (resp. g^{-1}) si $\beta(H_\alpha)$ est pair et à g^{-1} (resp. g) sinon. Par conséquent, on a :

$$g(\gamma g^{-1}\gamma^{-1})=\begin{cases}1 & \text{si } \beta(H_{\alpha_1}+\cdots+H_{\alpha_k}) \text{ est pair}\\ g^2 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On se place tout d'abord dans le cas où β est réelle et $g\gamma g^{-1}\gamma^{-1}\neq 1$. On rend les choix de g et de γ_β compatibles en imposant $X=X_\beta$ et $Y=X_{-\beta}$ (cf. 5.5 (a)). On note ζ le rapport de l'homothétie $\dot{\tau}_0(\gamma_\beta^2)$. On a $\gamma_\beta=g^2$ puis $\gamma_\beta\gamma\gamma_\beta^{-1}=\gamma_\beta^2\gamma$ et $\gamma_\beta(g\gamma g^{-1})\gamma_\beta^{-1}=\gamma_\beta^2(g\gamma g^{-1})$. Donc $\operatorname{tr}\dot{\tau}_0(\gamma)=0=\operatorname{tr}\dot{\tau}_0(g\gamma g^{-1})$ quand $\zeta\neq 1$. On va raisonner autrement quand $\zeta=1$. L'élément $\gamma_\beta+\gamma_\beta^{-1}$ de l'algèbre du groupe $G_0(\lambda_+)$ est central. Donc $\dot{\tau}_0(\gamma_\beta)$ est égal à l'homothétie $(\dot{\tau}_0(\gamma_\beta)+\dot{\tau}_0(\gamma_\beta^{-1}))(\dot{\tau}_0(\gamma_\beta^2)^{-1}+\mathrm{id})^{-1}$ lorsque $\zeta\neq -1$. En particulier, comme τ_0 est final, on a $\dot{\tau}_0(g\gamma g^{-1})\dot{\tau}_0(\gamma)^{-1}=\dot{\tau}_0(\gamma_\beta)$ avec $(\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}\tau_0)(\gamma_\beta)=(-1)^{n_\beta+1}\mathrm{id}$ quand $\zeta=1$. On note F le sous-groupe de G engendré par les γ_α avec $\alpha\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelle. D'après [DV 88, (42) p. 335], à corriger, il existe un caractère unitaire de F qui envoie γ_α sur $(-1)^{n_\alpha+1}$ pour toute $\alpha\in R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ réelle. Par ailleurs, la restriction de $\frac{\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^*+}}{|\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^*+}|}(\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+})^{-1}$ à $G_0(\lambda_+)$ est invariante sous $G(\widetilde{\lambda})$ d'après 5.4 (a). Ainsi, il existe un caractère unitaire $G(\widetilde{\lambda})$-invariant χ de F, tel que quand $\zeta=1$ on ait : $\dot{\tau}_0(\gamma_\beta)=\chi(\gamma_\beta)\,\mathrm{id}$ puis $\dot{\tau}_0(\gamma_\beta)=\chi(g\gamma g^{-1})\,\chi(\gamma)^{-1}\,\mathrm{id}=\mathrm{id}$.

On suppose pour finir que β n'est pas réelle et que $g\gamma g^{-1}\gamma^{-1}\neq 1$. On note R_β le système de racines $(\mathbb{R}\beta\oplus\mathbb{R}\overline{\beta})\cap R(\mathfrak{g}_1(\nu)_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ sans racine imaginaire et avec des racines non réelles. En examinant le diagramme de Satake de la sous-algèbre de Lie semi-simple de $\mathfrak{g}_1(\nu)$ de complexifiée $(\mathbb{C}H_\beta\oplus\mathbb{C}H_{\overline{\beta}})\oplus\sum_{\alpha\in R_\beta}\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha}$, on constate qu'il existe un morphisme d'algèbres de Lie injectif $\eta:\mathfrak{g}_0\to\mathfrak{g}_1(\nu)$, avec $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})|_{\mathbb{R}}$ ou $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{su}(1,2)$, qui envoie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et selon la valeur de $\mathfrak{g}_0$, la matrice $\begin{pmatrix} x+\mathrm{i}y & 0\\ 0 & -(x+\mathrm{i}y)\end{pmatrix}$ ou la matrice $\begin{pmatrix}\mathrm{i}y & x & 0\\ x & \mathrm{i}y & 0\\ 0 & 0 & -2\mathrm{i}y\end{pmatrix}$ sur $x\,(H_\beta+H_{\overline{\beta}})+\mathrm{i}y\,(H_\beta-H_{\overline{\beta}})$.

On choisit X et Y dans $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\overline{\beta}}) \cap \mathfrak{g}$ et $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\beta} \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\overline{\beta}}) \cap \mathfrak{g}$ égaux, selon $\mathfrak{g}_0$, à : $X = \eta\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ et $Y = \eta\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$, ou, $X = \eta\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$ et $Y = \eta\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$. Un calcul dans l'un des groupes simplements connexes $SU(2)$ ou $\{1\} \times SU(2)$ montre ensuite que g^2 appartient à $\exp(\mathfrak{h} \cap \mathrm{D}(\mathfrak{g}_1(\nu)))$. La définition de $\mathfrak{g}_1$ assure que $W(\mathfrak{g}_1(\nu)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ fixe $\mathrm{d}_1\dot{\tau}_0$. Donc $\dot{\tau}_0$ est trivial sur $\exp(\mathfrak{h} \cap \mathrm{D}(\mathfrak{g}_1(\nu)))$. Ainsi, on obtient : $\dot{\tau}_0(g\gamma g^{-1}\gamma^{-1}) = \dot{\tau}_0(g^2) = \mathrm{id}$. □

Dans la proposition qui suit, j'énonce les résultats de la théorie du petit groupe de Mackey qui me seront utiles dans la démonstration du prochain théorème. Je ne rappellerai pas les notions de « groupe de type I » et « intégrale hilbertienne » (voir [Dix 69]). On se donne pour cette proposition un groupe localement compact à base dénombrable A, et un sous-groupe fermé distingué B de A qui est de type I. Le groupe A agit canoniquement sur $\widehat{B}$.

Voici quelques précisions concernant le vocabulaire. On appellera cocycle mesurable unitaire de A une application mesurable c de $A \times A$ dans l'ensemble des nombres complexes de module 1 qui vérifie $c(1,1) = 1$ et $c(xy,z)\,c(x,y) = c(x,yz)\,c(y,z)$ pour $x,y,z \in A$. Dans ce cas, étant donné un espace de Hilbert complexe séparable V, on appellera c-représentation projective de A dans V une application $\widetilde{\pi}$ de A dans le groupe unitaire de V, pour laquelle chacune des fonctions $x \in A \mapsto \langle \widetilde{\pi}(x) \cdot v, w \rangle \in \mathbb{C}$ avec $v, w \in V$ est mesurable, et telle que $\widetilde{\pi}(1) = \mathrm{id}$ et $\widetilde{\pi}(xy) = c(x,y) \times \widetilde{\pi}(x)\,\widetilde{\pi}(y)$ pour $x, y \in A$.

Proposition 9.4. (Mackey) **(a)** *Soit $\pi \in \widehat{B}$. On note A_π le stabilisateur de π dans A et* pr *la projection canonique de A_π sur A_π/B. Le groupe A_π est fermé dans A. Il existe un cocycle mesurable unitaire c de A_π/B et une classe d'isomorphisme $\widetilde{\pi}$ de $c\circ(\mathrm{pr}\times\mathrm{pr})$-représentation projective de A_π qui prolonge π dans le même espace de Hilbert. Par ailleurs, il existe une mesure σ-finie non nulle m sur $\widehat{B}$, unique à équivalence près, telle que l'orbite de π sous A dans $\widehat{B}$ a un complémentaire m-négligeable et $a \cdot m$ est équivalente à m pour tout $a \in A$.*

(b) *On conserve les notations du (a). L'application $\widetilde{\eta} \mapsto \mathrm{Ind}_{A_\pi}^{A}(\widetilde{\eta} \circ \mathrm{pr} \otimes \widetilde{\pi})$ de l'ensemble des classes d'isomorphisme des c^{-1}-représentations projectives irréductibles de A_π/B, dans l'ensemble des classes d'isomorphisme des représentations unitaires de A, est injective. Son image est formée des éléments de $\widehat{A}$ dont la restriction à B est multiple de $\int_{\widehat{B}} \rho \, \mathrm{d}m(\rho)$.*

(c) *Quand l'espace mesurable quotient $A\backslash\widehat{B}$ est dénombrablement séparé (c'est-à-dire qu'on peut trouver une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties mesurables de $E = A\backslash\widehat{B}$ telle que pour $x \neq y$ dans E, il existe $m \in \mathbb{N}$ vérifiant $x \in E_m$ et $y \notin E_m$), tout élément de $\widehat{A}$ s'obtient comme au (b) pour une unique orbite de A dans $\widehat{B}$.*

Démonstration de la proposition. **(a)** L'hypothèse « metrically smooth of type I » de Mackey va se traduire par « de type I » d'après [Dix 64, prop. 4.6.1 p. 95 et th. 9.1 p. 168]. Le groupe A_π est fermé dans A et m existe d'après [Mac 58, th. 7.5 p. 295]. L'existence de c et de $\widetilde{\pi}$ est donnée par [Mac 58, th. 8.2 p. 298].

(b) Ce résultat est cité dans [Mac 58, th. 8.1 p. 297 et 8.3 p. 300]. Il se réfère à la classe de représentation de B associée à m, construite à la fin de sa section 7 p. 296, qui renvoie aux lignes 4 à 6 p. 273.

(c) Résulte de [Mac 58, th. 9.1 p. 302] et de la fin de sa section 7 p. 296. □

Les représentations classifiées un peu plus loin sont les représentations unitaires irréductibles « tempérées » de G. Cette notion mérite une définition.

Définition 9.5. **(a)** Soit $\pi_0 \in \widehat{G_0}$. On dit que π_0 est tempérée si elle est équivalente à une sous-représentation d'une représentation $\mathrm{Ind}_{\tilde{P}}^{G_0}(\tilde{\sigma} \otimes \tilde{\eta} \otimes \mathbb{1}_{\tilde{N}})$, où $\tilde{P}$ est un sous-groupe parabolique de G_0 de décomposition de Langlands $\tilde{P} = \tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}$, $\tilde{\sigma}$ est une représentation de la série discrète de $\tilde{M}$, et $\tilde{\eta}$ est un caractère unitaire de $\tilde{A}$. On peut montrer comme dans [Kna 86, th. 8.53 p. 260 et th. 12.23 p. 456] que cela équivaut à la condition suivante : $|D_{G_0}|^{1/2}\ \mathrm{tr}\,\pi_0$ est bornée sur $G_{0_{ss\ reg}}$.

(b) Soit $\pi \in \widehat{G}$. D'après 9.4 fin (b) et (c), il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \widehat{G_0}$ tels que $\pi_{|G_0} = \underset{1\leq k\leq n}{\oplus} \pi_k$. On dit que π est tempérée si $\pi_1, \ldots, \pi_n$ sont tempérées.

Théorème 9.6. **(a)** *On a :* $a \cdot T^G_{\tilde{\lambda},\tau} = T^G_{a\cdot\tilde{\lambda},a\cdot\tau}$ *pour tout automorphisme a du groupe de Lie G.*

(b) *L'ensemble $G \setminus X_G^{Ind}$ (resp. $G \setminus X_G^{final,+}$) s'injecte dans $\widehat{G}$ par l'application qui envoie l'orbite de $(\widetilde{\lambda}', \tau')$ (resp. $(\widetilde{\lambda}', \mathfrak{a}'^{*+}, \tau'_+)$) sur $T^G_{\tilde{\lambda}',\tau'}$ (resp. $T^G_{\tilde{\lambda}',\mathfrak{a}'^{*+},\tau'_+}$). Son image est formée des classes de représentation dans $\widehat{G}$ qui sont tempérées. (D'après le lemme 6.1, les $\widetilde{\lambda}' \in \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ qui interviennent ici appartiennent à $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg,G}$).*

Démonstration du théorème. On va utiliser les notations du début de la partie III. et des sections 7. et 8.

(a) Au vu d'une propriété de l'induction citée dans la démonstration du lemme 8.2 (b), on est ramené à prouver que $a \cdot T^{M_0}_{\tilde{\mu}} = T^{a\cdot M_0}_{a\cdot\tilde{\mu}}$ quand G est connexe. Cette égalité provient des formules pour les caractères de $a\cdot T^{M_0}_{\tilde{\mu}}$ et $T^{a\cdot M_0}_{a\cdot\tilde{\mu}}$ obtenues (sans le th. 9.6) dans la dernière partie de la démonstration du théorème 10.2.

(b) On suppose dans un premier temps que G est connexe. Tout d'abord, les représentations limites de la série discrète de G sont tempérées d'après [Wal 88, th. 6.8.1 p. 202, prop. p. 142, prop. p. 139] (voir aussi [Kna 86, corollary 12.27 p. 461] pour une étude de la propriété du caractère donnée dans la définition 9.5 (a)). On en déduit que la classe de représentation $T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$ de la définition 7.5 est tempérée en adaptant la preuve de l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) de [BW 80, proposition 3.7 p. 124], et appliquant l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) de cette même proposition.
On se donne une représentation unitaire irréductible tempérée de G dans un espace de Hilbert V. Soit K un sous-groupe compact maximal de G. D'après le théorème 11.14 (b) de [ABV 92, p. 131] avec $z = 1$, il existe un « caractère limite final Λ_V » tel que le $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K)$-module sous-jacent à V est isomorphe à celui de la représentation $\pi(\Lambda_V)$ qui est définie dans [ABV 92, p. 122] modulo [KV 95, 5) p. 742]. J'utilise le dictionnaire proposé dans la démonstration du lemme 7.3 (b). L'égalité (11.196) de [KV 95, p. 740] fait apparaître la représentation $\pi(\Lambda_V)$ comme quotient d'une représentation $\mathrm{Ind}^G_{\widetilde{M}.\widetilde{A}.\widetilde{N}}(T^{\widetilde{M}}_{\tilde{\lambda}',\mathfrak{a}'^{*+},\tau'_+} \otimes \widetilde{\eta} \otimes \mathbb{1}_{\widetilde{N}})$ induite à partir d'un sous-groupe parabolique $\widetilde{M}\widetilde{A}\widetilde{N}$ de G, pour un $(\widetilde{\lambda}', \mathfrak{a}'^{*+}, \tau'_+) \in X^{final,+}_{\widetilde{M}}$ et un caractère $\widetilde{\eta}$ de $\widetilde{A}$ réel. On a donc $\widetilde{M}\widetilde{A}\widetilde{N} = G$ d'après [BW 80, lemma 4.9 p. 130] et [KV 95, (11.197) p. 741], et le groupe G agit dans V par une représentation de classe $T^G_{\tilde{\lambda}',\mathfrak{a}'^{*+},\tau'_+}$.

On se place dans le cas où $(\widetilde{\lambda}', \mathfrak{a}'^{*+}, \tau'_+)$ vérifie $T^G_{\tilde{\lambda}', \mathfrak{a}'^{*+}, \tau'_+} = T^G_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}, \tau_+}$. On introduit les triplets $(\Lambda^{can}, R^+_{\mathrm{i}\mathbb{R}}, R^+_{\mathbb{R}})$ et $(\Lambda'^{can}, R'^+_{\mathrm{i}\mathbb{R}}, R'^+_{\mathbb{R}})$ attachés à τ_+ et τ'_+ comme dans la démonstration de 7.3 (b), et pose $\mathfrak{h}' = \mathfrak{g}(\widetilde{\lambda}')$. Les différentielles des caractères centraux de Λ^{can} et Λ'^{can} sont égales à $\mathrm{i}\lambda_{|\mathfrak{h}}$ et à $\mathrm{i}\lambda'_{|\mathfrak{h}'}$. D'après [ABV 92, th. 11.14 (c) p. 131 et def. 11.6 p. 124], il existe $g \in G$ tel que, en notant ζ l'application qui envoie $x \in G(\lambda_+)$ sur le déterminant de la restriction de $\mathrm{Ad}\, x^{\mathbb{C}}$ à la somme des $\mathfrak{g}^\alpha_{\mathbb{C}}$ avec $\alpha \in R^+_{\mathbb{R}}$ et $g\alpha \notin R'^+_{\mathbb{R}}$, on ait : $\widetilde{\lambda}' = g\widetilde{\lambda}$ et $\Lambda'^{can} = g \cdot \left(\Lambda^{can} \otimes \frac{\zeta}{|\zeta|}\right)$. Grâce au lemme 5.4 (a) et à un calcul fait dans la démonstration de 7.3 (b), on obtient : $\frac{\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'}_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}'^{*+}}}{|\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}'}_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}'^{*+}}|}\, \tau'_+ = g \cdot \left(\frac{\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}}}{|\rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}}|}\, \tau_+ \right)$. Comme les chambres de $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}), \mathfrak{a})$ sont conjuguées sous $\mathrm{N}_{G(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_0}(\mathfrak{a})$, il existe $u \in G(\widetilde{\lambda})$ tel que $(\widetilde{\lambda}', \mathfrak{a}'^{*+}) = gu \cdot (\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+})$. *A fortiori*, on a $\tau'_+ = gu \cdot \tau_+$ d'après le lemme 9.3 (b).

On ne suppose plus G connexe. Il s'agit d'adapter la démonstration de M. Duflo dans [Duf 82a, p. 176 à p. 179]. On remarque que les sous-groupes fermés distingués $B_1 = G_0(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ et $B_2 = G_0$, respectivement de $A_1 = G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ et $A_2 = G$, sont de type I d'après [Dix 69, prop. 2.1 p. 425]. En particulier, les espaces mesurables $\widehat{B_1}$ et $\widehat{B_2}$ sont standards d'après [Dix 64, prop. 4.6.1 p. 95 et th. 9.1 p. 168]. Leurs quotients sous les actions à gauche des groupes finis respectivement égaux à A_1/B_1 et A_2/B_2 sont donc dénombrablement séparés.

On va introduire plus bas un certain $\tau_0 \in (G_0(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}})\widehat{\ }$. On notera $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$ le stabilisateur de τ_0 dans $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$, $G(\lambda_+)_{\tau_0}$ l'image de $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$ dans $G(\lambda_+)$ et $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$ l'image réciproque de $G(\lambda_+)_{\tau_0}$ dans $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$. On désignera par la même notation pr les projections canoniques de $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$, $G(\lambda_+)_{\tau_0} G_0$ et $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$ sur $G(\lambda_+)_{\tau_0}/G_0(\lambda_+)$. D'après la proposition 9.4 (a) et (c), il existe une sous-représentation irréductible τ_0 de $\tau_{+|G_0(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}$, un cocycle mesurable unitaire c de $G(\lambda_+)_{\tau_0}/G_0(\lambda_+)$, une classe d'isomorphisme $\widetilde{\tau}_0$ de $c \circ (\mathrm{pr} \times \mathrm{pr})$-représentation projective de $G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$ qui prolonge τ_0 dans son espace, et une classe d'isomorphisme $\widetilde{\eta}$ de c^{-1}-représentation projective irréductible de $G(\lambda_+)_{\tau_0}/G_0(\lambda_+)$, tels que :

$$\tau_+ = \mathrm{Ind}^{G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}_{G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tau_0}} (\widetilde{\eta} \circ \mathrm{pr} \otimes \widetilde{\tau}_0).$$

On construit maintenant trois isomorphismes de représentations unitaires. Le premier, relatif au groupe $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$, va de l'espace de $\mathrm{Ind}^{G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}}_{G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tau_0}} (\widetilde{\eta} \circ \mathrm{pr} \otimes \widetilde{\tau}_0)$ muni de $\tau_{M'}$ sur celui de $\mathrm{Ind}^{M'(\tilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}}_{M'(\tilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tau_0}} (\widetilde{\eta} \circ \mathrm{pr} \otimes (\widetilde{\tau}_0)_{M'})$, où $(\widetilde{\tau}_0)_{M'}$ est la $c \circ (\mathrm{pr} \times \mathrm{pr})$-représentation projective de $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$ telle que $\delta^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_+, \mathfrak{m}'} (\widetilde{\tau}_0)_{M'} = \delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+} \widetilde{\tau}_0$ sur $G(\lambda_+)_{\tau_0}$. Il s'écrit $\varphi \mapsto \varphi_{M'}$ avec $(\delta^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_+, \mathfrak{m}'})^{-1} \varphi_{M'} = (\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+})^{-1} \varphi$ (cf. la démonstration de 8.2 (a)). Le second, relatif à M', va de l'espace de $\left(\mathrm{Ind}^{M'(\tilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}}_{M'(\tilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tau_0}} (\widetilde{\eta} \circ \mathrm{pr} \otimes (\widetilde{\tau}_0)_{M'})\right) \otimes ST^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}$ muni par transport de $T^{M'}_{\tilde{\lambda}, \tau_{M'}}$ sur celui de $\mathrm{Ind}^{M'}_{G(\lambda_+)_{\tau_0} M'_0} \left((\widetilde{\eta} \circ \mathrm{pr} \otimes (\widetilde{\tau}_0)_{M'}) \otimes ST^{M'_0}_{\tilde{\lambda}} \right)$ où la représentation de $G(\lambda_+)_{\tau_0} M'_0$ à laquelle il est fait allusion est construite comme $T^{M'}_{\tilde{\lambda}, \tau_{M'}}$ dans 8.2 (a). Il envoie un élément de la forme $\varphi \otimes v$ sur l'élément ψ vérifiant

$$\psi(xy) = \varphi(\hat{x}) \otimes T^{M'_0}_{\tilde{\lambda}}(y)^{-1} S(\hat{x})^{-1} \cdot v$$

pour $\hat{x} \in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ au-dessus de $x \in G(\lambda_+)$ et $y \in M'_0$.

On note $(M'_{G_0},(\tau_0)_{M'})$ le « couple $(M',\tau_{M'})$ » obtenu à partir de $(G_0,\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_0)$ au lieu de $(G,\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+)$. Il existe une unique $c\circ(\mathrm{pr}\times\mathrm{pr})$-représentation projective $\widetilde{T}_0$ de $G(\lambda_+)_{\tau_0}G_0$ qui prolonge $T^{G_0}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_0}$ de façon que son action sur un élément ϕ de l'espace de $\mathrm{Ind}^{G_0}_{M'_{G_0}.U}(((\tau_0)_{M'}\otimes ST^{M'_0}_{\tilde{\lambda}})\otimes \mathbb{1}_U)$ vérifie

$$(\widetilde{T}_0(xg)\cdot\phi)(h)=|\det(\mathrm{Ad}\,x)_{\mathfrak{u}}|^{1/2}\times((\widetilde{\tau}_0)_{M'}(\hat{x})\otimes S(\hat{x}))\,\cdot\,\phi(g^{-1}x^{-1}hx)$$

pour $\hat{x}\in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\tau_0}$ au-dessus de $x\in G(\lambda_+)_{\tau_0}$ et $g,h\in G_0$.
Le troisième isomorphisme, relatif à $G(\lambda_+)_{\tau_0}G_0$, est fourni par l'application de restriction à G_0, de l'espace de $\mathrm{Ind}^{G(\lambda_+)_{\tau_0}G_0}_{(G(\lambda_+)_{\tau_0}M'_0).U}\big(((\widetilde{\eta}\circ\mathrm{pr}\otimes(\widetilde{\tau}_0)_{M'})\otimes ST^{M'_0}_{\tilde{\lambda}})\otimes\mathbb{1}_U\big)$ sur celui de $\widetilde{\eta}\circ\mathrm{pr}\otimes\widetilde{T}_0$ (identifié à un espace de fonctions sur G_0).
En récapitulant, on trouve que:

$$T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}=\mathrm{Ind}^G_{G(\lambda_+)_{\tau_0}G_0}(\widetilde{\eta}\circ\mathrm{pr}\otimes\widetilde{T}_0).$$

Il reste à appliquer la théorie de Mackey. D'après l'étude du cas connexe faite ci-dessus, on a $T^{G_0}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_0}\in\widehat{G_0}$ et le stabilisateur de $T^{G_0}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_0}$ dans G est égal à $G(\lambda_+)_{\tau_0}G_0$. La proposition 9.4 (b) fournit la bijection $\widetilde{\sigma}\mapsto\mathrm{Ind}^G_{G(\lambda_+)_{\tau_0}G_0}(\widetilde{\sigma}\circ\mathrm{pr}\otimes\widetilde{T}_0)$ de l'ensemble des classes d'isomorphisme des c^{-1}-représentations projectives irréductibles de $G(\lambda_+)_{\tau_0}/G_0(\lambda_+)$ sur l'ensemble des éléments de $\widehat{G}$ dont la restriction à G_0 est égal à la somme hilbertienne des $g\cdot T^{G_0}_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_0}$ avec $\dot{g}\in G/G(\lambda_+)_{\tau_0}G_0$. Ainsi, au vu du cas connexe, on a: la classe de représentation $T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$ est tempérée irréductible, toute $\pi\in\widehat{G}$ tempérée est atteinte d'après la proposition 9.4 (c), et par un calcul facile tout $(\widetilde{\lambda}',\mathfrak{a}'^{*+},\tau'_+)\in X^{\mathit{final},+}_G$ tel que $T^G_{\tilde{\lambda}',\mathfrak{a}'^{*+},\tau'_+}=T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}$ est conjugué à $(\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+)$ sous G. *A fortiori* pour un tel triplet $(\widetilde{\lambda}',\mathfrak{a}'^{*+},\tau'_+)$ on a $(\widetilde{\lambda}',\tau')\in G\cdot(\widetilde{\lambda},\tau)$, où τ' se déduit de τ'_+ comme dans la définition 5.5 (c). $\square$

Remarque 9.7. On suppose dans cette remarque que $\widetilde{\lambda}\in\widetilde{\mathfrak{g}}^*_I$ et pose $\tau=\tau_+$. On va retrouver explicitement l'orbite de $(\widetilde{\lambda},\tau)$ sous G à partir de $\mathrm{tr}\,T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$.

Dans un premier temps, je vais récupérer $G\cdot\widetilde{\lambda}$. Le théorème 10.2 fournit l'égalité $\big(\mathrm{tr}\,T^G_{\tilde{\lambda},\tau}\big)_1=\dim\tau\times\widehat{\beta}_{G\cdot\tilde{\lambda}}|_{\mathcal{V}_1}$ où $\mathcal{V}_1$ est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$, qui coupe donc chaque composante connexe de $\mathfrak{g}_{ss\,reg}$. D'après la proposition 2.5 (c) et la fin de la remarque 2.4 (1), on en déduit que $T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$ détermine $\beta_{R_G(G\cdot\tilde{\lambda})}$. Les mesures de Radon tempérées β_Ω sur $\mathfrak{g}^*$ avec $\Omega\in G\backslash\mathfrak{g}^*_{reg}$ sont linéairement indépendantes, car chaque β_Ω est non nulle concentrée sur Ω. Compte tenu de la proposition 2.2 (a), la classe de représentation $T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$ détermine l'orbite $G\cdot\widetilde{\lambda}$.

Je vais maintenant reconstruire $\mathrm{tr}\,\tau$ à partir de $T^G_{\tilde{\lambda},\tau}$ et de $\widetilde{\lambda}$. On sait déjà que $\tau(\exp X)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\lambda(X)}\,\mathrm{id}$ pour $X\in\mathfrak{h}$. Soit $\hat{e}\in G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ au-dessus d'un $e\in G(\lambda_+)$ elliptique. On lui associe un $e_0\in e\exp\mathfrak{t}(e)$ comme dans le lemme 3.2 (b). Le théorème 10.2 exprime $\big(\mathrm{tr}\,T^G_{\tilde{\lambda},\tau}\big)_{e_0}$ comme combinaison linéaire des classes de fonction localement intégrable $\widehat{\beta}_{G(e_0)\cdot\tilde{\lambda}'_{e_0}}\big|_{\mathcal{V}_{e_0}}$ avec $\widetilde{\lambda}'_{e_0}\in G(e_0)\backslash\widetilde{\mathfrak{g}(e_0)}^*_I$ qui sont linéairement indépendantes. Le coefficient de $\big(\mathrm{tr}\,T^G_{\tilde{\lambda},\tau}\big)_{e_0}$ suivant $\widehat{\beta}_{G(e_0)\cdot\tilde{\lambda}[e_0]}\big|_{\mathcal{V}_{e_0}}$ fournit $\mathrm{tr}\,\tau(\hat{e})$. $\blacksquare$

IV. Caractères des représentations

À nouveau, on considère un élément $\widetilde{\lambda}=(\lambda,\mathcal{F}^+)$ de $\widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}$ et pose $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}(\widetilde{\lambda})$. On note μ et ν (resp. $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{a}$) les composantes infinitésimalement elliptique et hyperbolique de λ (resp. $\mathfrak{h}$). Soit $\mathfrak{a}^{*+}$ une chambre de $(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}),\mathfrak{a})$. J'utiliserai les autres notations de la partie III. (dont M, $\mathfrak{m}$, τ_M pour la section 7., et, M', $\mathfrak{m}'$, U, $\tau_{M'}$ pour la section 8.) sans rappeler ce qu'elles représentent.

On se donne dans cette partie un élément elliptique e de G (à ne pas confondre avec la base e des logarithmes népériens).

10. Formule de restrictions des caractères

La formule que je vais maintenant écrire généralise celle d'A. Bouaziz dans [Bou 87, th. 5.5.3 p. 52] (voir aussi [DHV 84, th. (7) p. 106]), tout en s'y ramenant, et celle de W. Rossmann [Ros 80, p. 64] relative au cas $e=1$.

Définition 10.1. **(a)** On note D_G la fonction sur G dont la restriction à chaque composante connexe G^+ de G envoie $x\in G^+$ sur le coefficient de T^{r^+} dans $\det(T\,\mathrm{id}+\mathrm{id}-\mathrm{Ad}\,x)$, où r^+ est le rang commun aux algèbres de Lie réductives $\mathfrak{g}(x^+)$ quand x^+ décrit l'ensemble des éléments semi-simples de G^+ (cf. [Bou 87, lem. 1.4.1 p. 6]). Elle est analytique et invariante sous $\operatorname{int} G$.

(b) On note $G_{ss\,reg}$ l'ensemble des $x\in G$ semi-simples tels que $\mathfrak{g}(x)$ est commutative. Donc $G_{ss\,reg}$ est l'ouvert dense de complémentaire négligeable de G formé des points où D_G ne s'annule pas (cf. [Bou 87, 1.3 p. 5]).

(c) On note $d_e=\frac{1}{2}\dim(1-\mathrm{Ad}\,e)(\mathfrak{g}/\mathfrak{j})$ et $D_e=\det(1-\mathrm{Ad}\,e)_{(1-\mathrm{Ad}\,e)(\mathfrak{g}/\mathfrak{j})}>0$, indépendamment du choix de $\mathfrak{j}_e\in\mathrm{Car}\,\mathfrak{g}(e)$ auquel on associe $\mathfrak{j}:=\mathrm{C}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{j}_e)\in\mathrm{Car}\,\mathfrak{g}$.

(d) On note

$$\mathcal{V}_e=\{\,X\in\mathfrak{g}(e)\mid |\mathrm{Im}\,z|<\varepsilon_e\ \text{ pour toute valeur propre } z \text{ de } \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X\,\}$$

$$\text{et}\quad k_e(X)=\left(\det\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,X/2}-\mathrm{e}^{-\mathrm{ad}\,X/2}}{\mathrm{ad}\,X}\right)_{\mathfrak{g}(e)}\frac{\det(1-\mathrm{Ad}(e\exp X))_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(e)}}{\det(1-\mathrm{Ad}\,e)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(e)}}\right)^{1/2}>0$$

pour $X\in\mathcal{V}_e$, où $\varepsilon_e=\inf\{\,\theta\in\,]0,2\pi]\mid \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ est valeur propre de $\mathrm{Ad}_G\,e\,\}\ \le\ 2\pi$.

(e) À toute fonction généralisée $\operatorname{int} G$-invariante Θ sur G, on associe (cf. [DHV 84, (6) p. 98]) la fonction généralisée $\mathrm{Ad}\,G(e)$-invariante Θ_e sur $\mathcal{V}_e$, déterminée par l'égalité $\Theta_e(X)=k_e(X)\times\Theta_{|e\exp\mathcal{V}_e}(e\exp X)$ de fonctions généralisées en $X\in\mathcal{V}_e$.

L'égalité $G=\bigcup_{\substack{e_0\in G\\ e_0\ \text{elliptique}}}\operatorname{int} G\cdot(e_0\exp\mathcal{V}_{e_0})$ de [Bou 87, lem. 8.1.1 p. 72] (cf. [DV 93, lem. 40 p. 41]) montre que dans la situation du (d), les Θ_{e_0} avec $e_0\in G$ elliptique déterminent Θ.

D'après [Bou 87, 3.1 haut p. 21], toute représentation unitaire topologiquement irréductible π de G est traçable, avec pour caractère une fonction $\mathrm{tr}\,\pi$ localement intégrable sur G invariante sous $\operatorname{int} G$ dont la restriction à $G_{ss\,reg}$ est analytique.

Théorème 10.2. *Étant donnés $\tau \in X_G^{Ind}(\widetilde{\lambda})$ et $\tau_+ \in X_G^{final,+}(\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+})$ associés comme dans 5.5 (c), on a*

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{tr} T^G_{\tilde{\lambda},\tau}\right)_e &= D_e^{-\frac{1}{2}} \sum_{\dot{\tilde{\lambda}}'_e \in G(e)\backslash\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}} \left|\{\mathfrak{a}'^{\,*+}_e\}\right|^{-1} \Bigg(\sum_{\substack{\tilde{\lambda}' \in G\cdot\tilde{\lambda}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e) \\ \text{tel que } \tilde{\lambda}'[e] \text{ existe} \\ \text{et } \tilde{\lambda}'[e]=\tilde{\lambda}'_e}} \pm_{\widehat{e'}}\ \mathrm{i}^{-d_{e',\tilde{\lambda}}}\ \operatorname{tr}\tau(\widehat{e'}) \Bigg) \widehat{\beta}_{G(e)\cdot\tilde{\lambda}'_e}\Big|_{\mathcal{V}_e} \\ &= \left(\operatorname{tr} T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}\right)_e = \mathrm{i}^{-d_e} D_e^{-\frac{1}{2}} \sum_{\dot{\tilde{\lambda}}'_e \in G(e)\backslash\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}} \left|\{\mathfrak{a}'^{\,*+}_e\}\right|^{-1} \Bigg(\sum_{\substack{\lambda'_+ \in G\cdot\lambda_+\cap\,\mathfrak{g}(e)^* \\ \text{tel que } \tilde{\lambda}'[e]=\tilde{\lambda}'_e}} \pm_{\widehat{e'_+}} \operatorname{tr}\tau_+(\widehat{e'_+}) \Bigg) \widehat{\beta}_{G(e)\cdot\tilde{\lambda}'_e}\Big|_{\mathcal{V}_e}\end{aligned}$$

où on donne un sens à la somme portant sur $\widetilde{\lambda}'$ en choisissant $g \in G$ tel que $\widetilde{\lambda}' = g\widetilde{\lambda}$ puis fixant $\widehat{e'} \in G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ au-dessus de $e' = g^{-1}eg$
(resp. : on donne un sens à la somme portant sur λ'_+ en choisissant $g \in G$ tel que $\lambda'_+ = g\lambda_+$ puis posant $\widetilde{\lambda}' = g\widetilde{\lambda}$ et fixant $\widehat{e'_+} \in G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ au-dessus de $e' = g^{-1}eg$),
$\pm_{\widehat{e'}}$ est le signe tel que $o(\widehat{e'})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}))} = \pm_{\widehat{e'}}\ o(B_{\lambda_{can}})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+}))}$
(resp. : $\pm_{\widehat{e'_+}}$ est le signe tel que $o(\widehat{e'_+})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})} = \pm_{\widehat{e'_+}}\ o(B_{\lambda_+})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}$),
$d_{e'}^{\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ est le coefficient $d_{e'}$ relatif à $\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})$ et $d_{e',\tilde{\lambda}} = d_{e'} - d_{e'}^{\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$,
$\mathfrak{h}'_e = \mathfrak{g}(e)(\widetilde{\lambda}'[e])$ et $\mathfrak{a}'_e$ est la composante infinitésimalement hyperbolique de $\mathfrak{h}'_e$,
$(\lambda',\mathcal{F}'^+_e) = \widetilde{\lambda}'[e]$ et $\{\mathfrak{a}'^{\,*+}_e\}$ est l'ensemble des chambres de $(\mathfrak{g}(e)(\lambda')(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}'^+_e}),\mathfrak{a}'_e)$.
Les sommations portant sur $G(e)\backslash\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}$ font intervenir un nombre fini de termes sommés non nuls. Les autres sommations portent sur des ensembles finis. La condition « $\widetilde{\lambda}'[e]$ existe » peut être oubliée, car elle est réalisée quand $\operatorname{tr}\tau(\widehat{e'}) \neq 0$.

En particulier, pour presque tout $X \in \mathcal{V}_1$ on a

$$\det\left(\frac{\mathrm{e}^{\operatorname{ad} X/2}-\mathrm{e}^{-\operatorname{ad} X/2}}{\operatorname{ad} X}\right)^{1/2}_{\mathfrak{g}} \times \operatorname{tr} T^G_{\tilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+},\tau_+}(\exp X) = \dim\tau_+ \times \widehat{\beta}_{G\cdot\tilde{\lambda}}(X).$$

Remarque 10.3. Voici deux exemples et une précision importante.

(1) Premier exemple : $G = GL(2,\mathbb{R})$ et $e = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$, $\widetilde{\lambda} = (0,\mathcal{F}^+)$ avec $\mathcal{F}^+ \subseteq \mathrm{i}\,\mathfrak{so}(2)^* \oplus \mathrm{Z}(\mathfrak{g})^*$ et $\tau = \chi^G_{\tilde{\lambda}}$. Donc $\widetilde{\lambda}[e]$ existe dans $\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}$. La somme portant sur $G\cdot\widetilde{\lambda}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e)$ fait ici intervenir deux nombres complexes non nuls et opposés.

(2) Deuxième exemple : G est produit semi-direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $SL(2,\mathbb{R})^2$ où l'élément non trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ opère sur $SL(2,\mathbb{R})^2$ par permutation des coordonnées et $e = (\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right))$, $\widetilde{\lambda} = (0,\mathcal{F}^+)$ avec $\mathcal{F}^+ \subseteq (\mathrm{i}\,\mathfrak{so}(2)^*)^2$ non stable sous $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\tau = \chi^G_{\tilde{\lambda}}$. Donc $\widetilde{\lambda}[e]$ existe dans $\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}$. Les deux éléments $\widetilde{\lambda}'$ de $G\cdot\widetilde{\lambda}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e)$ sont conjugués sous $G(e)$, et vérifient : $\widetilde{\lambda}'[e]$ existe et $\widetilde{\lambda}'[e] = \widetilde{\lambda}[e]$. Les nombres complexes sommés correspondants sont non nuls, et bien sûr égaux.

(3) Il peut arriver que des mesures $\widehat{\beta}_{G(e)\cdot\tilde{\lambda}'_e}$ non linéairement indépendantes interviennent avec des coefficients non nuls dans la formule du caractère. En effet, plaçons nous dans le cas suivant : G est le produit semi-direct canonique du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$ par $SL(3,\mathbb{R})^4$, $\lambda = 0$, $\mathfrak{h}$ est produit de 2 copies d'une sous-algèbre de Cartan déployée de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$ avec 2 copies d'une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{R})$, $\mathfrak{a}^{*+}$ est stable par permutation des 2 premières composantes. On note $e = (1\,2)$ et $g = (1\,3)(2\,4)$ dans $\mathfrak{S}_4$. Donc $G\cdot\widetilde{\lambda}\cap\tilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e) =$

$G(e)\cdot\widetilde{\lambda}\cup G(e)\cdot g\widetilde{\lambda}$, $\widetilde{\lambda}[e]$ et $(g\widetilde{\lambda})[e]$ existent dans $\widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}$, $G(e)\cdot\widetilde{\lambda}[e]\neq G(e)\cdot(g\widetilde{\lambda})[e]$ et $\widehat{\beta}_{G(e)\cdot\tilde{\lambda}[e]}=\widehat{\beta}_{G(e)\cdot(g\tilde{\lambda})[e]}$ (cf. 2.4 (3)). En outre, il existe $\tau_+\in X_G^{\mathit{final},+}(\widetilde{\lambda},\mathfrak{a}^{*+})$ pour lequel les coefficients de $\widehat{\beta}_{G(e)\cdot\tilde{\lambda}[e]}\big|_{\mathcal{V}_e}$ et de $\widehat{\beta}_{G(e)\cdot(g\tilde{\lambda})[e]}\big|_{\mathcal{V}_e}$ sous formes de sommes portant sur $\widetilde{\lambda}'$ sont égaux et non nuls. ∎

Remarque 10.4. On suppose que G est connexe et utilise les notations de la section 7. Différents auteurs ont utilisé dans certaines situations des formules du caractère équivalentes à celle du théorème précédent, mais relatives à d'autres paramétrisations. Pour relier ces formules, je fixe un système de racines positives $R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ de $R(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ qui contient les conjuguées de ses racines non imaginaires. On note $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h},0}$ et $\rho_{\mathfrak{m},\mathfrak{t},0}$ les demi-sommes de racines positives associées à $R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ et à $R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\cap R(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$.

(a) L'application de $C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$ dans l'ensemble des chambres de $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathrm{i}\,\mathfrak{t}^*$ dont l'adhérence contient $\mathrm{i}\mu$, qui à un élément $\mathcal{F}'^+$ de $C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})$ associe la chambre de $(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}},\mathfrak{t}_{\mathbb{C}})$ contenant $\mathrm{i}\mu_{\mathfrak{m},(\lambda,\mathcal{F}'^+),\{0\}}$, est bijective. On note $\mathcal{C}^+$ l'image de $\mathcal{F}^+$ par cette application. On pose

$$\mathrm{sg}_0(\mathcal{F}^+,\mu)=\prod_{\substack{\alpha\in R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\\ \alpha\text{ compacte}}}\mathrm{sg}(\mathcal{C}^+(H_\alpha))\times\prod_{\substack{\alpha\in R_0^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})\\ \alpha\text{ imaginaire non compacte}}}\mathrm{sg}(-\mathcal{C}^+(H_\alpha)).$$

(b) On note $T=\mathrm{C}_M(\mathfrak{t})=\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})\exp\mathfrak{t}$. L'application de $X_M^{\mathit{irr}}(\widetilde{\mu})$ dans l'ensemble des caractères unitaires de T de différentielle $\mathrm{i}\,\mu-\rho_{\mathfrak{m},\mathfrak{t},0}$ qui à $\sigma\in X_M^{\mathit{irr}}(\widetilde{\mu})$ associe le caractère unitaire η de T tel que $\eta(x\exp X)=\sigma(x,1)\,\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\,\mu-\rho_{\mathfrak{m},\mathfrak{t},0})(X)}$ pour $x\in\mathrm{C}_M(\mathfrak{m})$ et $X\in\mathfrak{t}$, est bijective.

(c) Soit $\sigma\in X_M^{\mathit{irr}}(\widetilde{\mu})$. On note η son image par l'application du (b). La fonction $\Theta_\eta^{(\mathcal{C}^+)}$ de [Var 77, th. 23 p. 260] relative au groupe M s'écrit :

$$\Theta_\eta^{(\mathcal{C}^+)}=\mathrm{sg}_0(\mathcal{F}^+,\mu)\times\mathrm{tr}\,T^M_{\tilde{\mu},\sigma}.$$

En particulier, quand M_0 est semi-simple et « acceptable », la fonction $\Theta_{\mathrm{i}\,\mu,\mathcal{C}^+}$ de [Har 65, p. 305] relative au groupe M_0 s'écrit :

$$\Theta_{\mathrm{i}\,\mu,\mathcal{C}^+}=\mathrm{sg}_0(\mathcal{F}^+,\mu)\times\mathrm{tr}\,T^{M_0}_{\tilde{\mu}}.$$

Par ailleurs, quand G est linéaire, $\mathrm{tr}\,T^M_{\tilde{\mu},\sigma}$ est noté $\Theta^M\big(\mathrm{i}\mu,\mathcal{C}^+,\sigma(\bullet,1)|_{\mathrm{Z}(M)}\big)$ dans [KZ 82, p. 397] en identifiant $\mathfrak{t}$ et $\mathfrak{t}^*$.

(d) On se place dans le cas où G est la composante neutre du groupe des points réels d'un groupe linéaire algébrique complexe défini sur $\mathbb{R}$ semi-simple et simplement connexe. On dispose ainsi d'un caractère complexe ξ_ρ de $\exp\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ de différentielle $\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{h},0}$. On fixe un caractère unitaire η de T comme au (b). Lorsque ν est $(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$-régulière, la fonction $\theta(TA,\xi_\rho\,\eta,\nu)$ de [Her 83, p. 244] s'écrit :

$$\theta(TA,\xi_\rho\,\eta,\nu)\;=\;|C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})|^{-1}\times\sum_{\mathcal{F}'^+\in C(\mathfrak{g}(\lambda),\mathfrak{h})_{reg}}\mathrm{sg}_0(\mathcal{F}'^+,\mu)\times\mathrm{tr}\,T^G_{\tilde{\lambda}',\tau'}$$

où $\widetilde{\lambda}'=(\lambda,\mathcal{F}'^+)$, λ'_+ est associé à $(\widetilde{\lambda}',\mathfrak{a}^*)$ comme dans 1.3 (b), et $\tau'\in X_G^{\mathit{irr}}(\widetilde{\lambda}')$ est déterminé par l'égalité $(\delta^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda'_+}\tau')\big|_{\mathrm{Z}(M)}=\eta_{|\mathrm{Z}(M)}$. ∎

La démonstration du théorème va se faire en trois étapes. Les deux premières étapes suivent l'article de Bouaziz : on passe de G à $G(\lambda_+)G_0$, puis de $G(\lambda_+)G_0$ à M'. Dans la dernière étape, une variante du foncteur de translation de Zuckerman va me permettre de relier les caractères des représentations de M' qui m'intéressent aux caractères étudiés par Bouaziz.

Début de la démonstration du théorème. Soient $\widehat{e'_+} \in G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ et $\widehat{e'} \in G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ au-dessus d'un même élément elliptique e' de $G(\lambda_+)$. Les valeurs propres autres que -1 et 1 de la restriction de $\operatorname{Ad} e'^{\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{v}_{\mathbb{C}} := \sum_{\alpha \in R^+(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})} \mathfrak{g}^{\alpha}_{\mathbb{C}}$ sont non réelles deux à deux conjuguées de module 1. Comme $\mathcal{L}_{\widetilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ (cf. 5.4 (a)) est somme directe des sous-espaces $\operatorname{Ad} e'^{\mathbb{C}}$-invariants $\mathcal{L}_{\widetilde{\lambda}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}$ (cf. 5.4 (c)) et $\mathfrak{v}_{\mathbb{C}}$, on a $q_{\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}((\operatorname{Ad} e')_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}) = q_{\mathcal{L}_{\tilde{\lambda}}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})_{\mathbb{C}}}((\operatorname{Ad} e')_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})})$ relativement à B_{λ_+}, puis d'après 5.4 et 4.2 (d):

$$\pm_{\widehat{e'_+}} \rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}}(\widehat{e'_+}) = \pm_{\widehat{e'}} \rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}_{\tilde{\lambda}}(\widehat{e'}) \times \mathrm{i}^{-1/2 \dim(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})/\mathfrak{h})}$$

où les signes $\pm_{\widehat{e'_+}}$ et $\pm_{\widehat{e'}}$ sont définis comme dans le théorème.

Soient $\widetilde{\lambda}'_0 \in G \cdot \widetilde{\lambda} \cap \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e)$, $g_0 \in G$ vérifiant $\widetilde{\lambda}'_0 = g_0 \widetilde{\lambda}$, et $\widehat{e'_0} \in G(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(\lambda)(\mathrm{i}\rho_{\mathcal{F}^+})}$ au-dessus de $e'_0 = g_0^{-1} e g_0$. Par la définition 5.5 (c) et ce qui précède, on obtient

$$\pm_{\widehat{e'_0}} \mathrm{i}^{-d_{e'_0, \tilde{\lambda}}} \operatorname{tr} \tau(\widehat{e'_0}) = \sum_{\substack{\dot{x} \in G(\tilde{\lambda})/G(\lambda_+) \\ \text{tel que } x^{-1} e'_0 x \in G(\lambda_+)}} \pm_{\widehat{e'_{+,x}}} \mathrm{i}^{-d_e} \operatorname{tr} \tau_+(\widehat{e'_{+,x}})$$

indépendamment du choix de $\widehat{e'_{+,x}} \in G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ au-dessus de $e'_x = x^{-1} e'_0 x$. Ensuite, pour tout $\widetilde{\lambda}'_e \in \widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}$ on obtient l'égalité de sommes finies

$$\sum_{\substack{\tilde{\lambda}'_0 \in G \cdot \tilde{\lambda} \cap \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e) \\ \text{tel que } \tilde{\lambda}'_0[e] = \tilde{\lambda}'_e}} \pm_{\widehat{e'_0}} \mathrm{i}^{-d_{e'_0, \tilde{\lambda}}} \operatorname{tr} \tau(\widehat{e'_0}) = \sum_{\substack{\lambda'_+ \in G \cdot \lambda_+ \cap \mathfrak{g}(e)^* \\ \text{tel que } \tilde{\lambda}'[e] = \tilde{\lambda}'_e}} \pm_{\widehat{e'_+}} \mathrm{i}^{-d_e} \operatorname{tr} \tau_+(\widehat{e'_+}).$$

Les deux expressions du caractère proposées dans le théorème sont donc égales.

Soit $\widetilde{\lambda}'$ (resp. λ'_+) un terme associé à un $\widetilde{\lambda}'_e$ comme dans le théorème. On a:
$\{ g\widetilde{\lambda} \in G \cdot \widetilde{\lambda} \cap \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e) \mid (g\widetilde{\lambda})[e] = \widetilde{\lambda}'_e \text{ et } g\widetilde{\lambda} \in G(e) \cdot \widetilde{\lambda}' \} = G(e)(\widetilde{\lambda}'_e) \cdot \widetilde{\lambda}'$
(resp. $\{ g\lambda_+ \in G \cdot \lambda_+ \cap \mathfrak{g}(e)^* \mid (g\widetilde{\lambda})[e] = \widetilde{\lambda}'_e \text{ et } g\lambda_+ \in G(e) \cdot \lambda'_+ \} = G(e)(\widetilde{\lambda}'_e) \cdot \lambda'_+$).
Le théorème équivaut donc à chacune des formules (F) et (F_+) suivantes:

$$\left(\operatorname{tr} T^G_{\tilde{\lambda}, \tau}\right)_e \overset{(F)}{=} D_e^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\dot{\tilde{\lambda}'} \in G(e) \backslash G \cdot \tilde{\lambda} \cap \widetilde{\mathfrak{g}}^*_{reg}(e) \\ \text{tel que } \tilde{\lambda}'[e] \in \widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}}} \pm_{\widehat{e'}} \mathrm{i}^{-d_{e', \tilde{\lambda}}} \frac{\left|G(e)(\tilde{\lambda}'[e]) \cdot \tilde{\lambda}'\right|}{\left|\{\mathfrak{a}'^{*+}_e\}\right|} \operatorname{tr} \tau(\widehat{e'}) \; \widehat{\beta}_{G(e) \cdot \tilde{\lambda}'[e]}\Big|_{\mathcal{V}_e};$$

$$\left(\operatorname{tr} T^G_{\tilde{\lambda}, \mathfrak{a}^{*+}, \tau_+}\right)_e \overset{(F_+)}{=} \mathrm{i}^{-d_e} D_e^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\dot{\lambda'_+} \in G(e) \backslash G \cdot \lambda_+ \cap \mathfrak{g}(e)^* \\ \text{tel que } \tilde{\lambda}'[e] \in \widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}}} \pm_{\widehat{e'_+}} \frac{\left|G(e)(\tilde{\lambda}'[e]) \cdot \lambda'_+\right|}{\left|\{\mathfrak{a}'^{*+}_e\}\right|} \operatorname{tr} \tau_+(\widehat{e'_+}) \; \widehat{\beta}_{G(e) \cdot \tilde{\lambda}'[e]}\Big|_{\mathcal{V}_e}.$$

Cela permet en particulier de préciser les résultats énoncés dans l'introduction.

D'après la définition 2.3 (e), on a $\widehat{\beta}_{\omega} = \sum_{\omega_0 \in G(e)_0 \backslash \omega} \widehat{\beta}_{\omega_0}$ pour $\omega \in G(e) \backslash \widetilde{\mathfrak{g}(e)}^*_{reg}$. Ainsi le théorème équivaut à l'énoncé qu'on obtient en y remplaçant $G(e)$ par $G(e)_0$, et donc aussi à celui qu'on obtient en remplaçant $G(e)$ par $G(e)_0$ dans (F_+). Soient λ'_+ et $\widetilde{\lambda}'$ comme dans (F_+). Le groupe $G(e)_0(\widetilde{\lambda}'[e])$ opère transitivement sur $\{\mathfrak{a}'^{*+}_e\}$ par l'action de certains éléments de $W(\mathfrak{g}(e)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}'_{e\mathbb{C}})$ (notations du théorème). Comme λ'_+ appartient à $\mathfrak{h}'^*_e \cap \mathfrak{g}(e)^*_{ss\,reg}$, le stabilisateur d'un élément de $\{\mathfrak{a}'^{*+}_e\}$ est égal à $G(e)_0(\widetilde{\lambda}'[e])(\lambda'_+)$ d'après le lemme 1.4. Donc $\left|G(e)_0(\widetilde{\lambda}'[e]) \cdot \lambda'_+\right| = \left|\{\mathfrak{a}'^{*+}_e\}\right|$.

Par conséquent, les formules à démontrer équivalent à la formule suivante :
$$\left(\operatorname{tr} T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak a^{*+},\tau_+}\right)_e = \mathrm i^{-d_e}\, D_e^{-\frac12} \sum_{\substack{\dot{\lambda'_+}\in G(e)_0\backslash\, G\cdot\lambda_+\cap\,\mathfrak g(e)^*\\ \text{tel que } (g\tilde\lambda)[e]\in\widetilde{\mathfrak g(e)^*_{reg}}}} \frac{\mathcal O(\widehat{e'_+})_{(1-\operatorname{Ad}e')(\mathfrak g/\mathfrak h)}}{\mathcal O(B_{\lambda_+})_{(1-\operatorname{Ad}e')(\mathfrak g/\mathfrak h)}}\ \operatorname{tr}\tau_+(\widehat{e'_+})\ \widehat\beta_{G(e)_0\cdot(g\tilde\lambda)[e]}\big|_{\mathcal V_e}$$
où $g\in G$ vérifie $\lambda'_+ = g\lambda_+$ et $\widehat{e'_+}\in G(\lambda_+)^{\mathfrak g/\mathfrak h}$ est au-dessus de $e'=g^{-1}eg$.
On remarque pour la suite (section 11.) que dans le raisonnement précédent, on peut remplacer $G(e)_0$ par n'importe quel sous-groupe L de $G(e)$ qui contient $G(e)_0$ et dont le groupe adjoint est inclus dans $\operatorname{int}\mathfrak g(e)_{\mathbb C}$.

Les orbites sur lesquelles on somme étant semi-simples régulières, on va pouvoir reproduire la plupart des arguments de [Bou 87].

On a $T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak a^{*+},\tau_+} = \operatorname{Ind}^G_{G(\lambda_+)\,G_0} T^{G(\lambda_+)\,G_0}_{\tilde\lambda,\mathfrak a^{*+},\tau_+}$ par « induction par étages », puis
$$\left(\operatorname{tr} T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak a^{*+},\tau_+}\right)_e = \sum_{\dot x\in G/G(\lambda_+)\,G_0 \ \text{ tel que }\ x^{-1}ex\in G(\lambda_+)\,G_0} \operatorname{Ad}x\cdot\left(\operatorname{tr} T^{G(\lambda_+)\,G_0}_{\tilde\lambda,\mathfrak a^{*+},\tau_+}\right)_{x^{-1}ex}.$$
Comme l'ensemble $G\cdot\lambda_+\cap\mathfrak g(e)^*$ est réunion des ensembles disjoints $\operatorname{Ad}^*x\cdot\left(G(\lambda_+)G_0\cdot\lambda_+\cap\mathfrak g(x^{-1}ex)^*\right)$ où $\dot x\in G/G(\lambda_+)G_0$ vérifie $x^{-1}ex\in G(\lambda_+)G_0$, on peut supposer que $G=G(\lambda_+)\,G_0$. . . .

11. Passage de $T^{M'}_{\tilde\lambda,\tau_{M'}}$ à $T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak a^{*+},\tau_+}$

Dans cette section, on va se ramener à montrer le théorème pour $T^{M'}_{\tilde\lambda,\tau_{M'}}$ en reprenant mot à mot la preuve de Bouaziz concernant le cas semi-simple régulier.

Les résultats énoncés dans la proposition suivante sont démontrés dans [Bou 87, lem. 7.1.3 p. 65 et lem. 4.2.1 p. 38].

Proposition 11.1. (Bouaziz) **(a)** *Soit π une représentation unitaire topologiquement irréductible de M'. On lui associe $\Pi=\operatorname{Ind}^{M'G_0}_{M'U}(\pi\otimes\mathbb 1_U)$. La représentation unitaire Π de $M'G_0$ est somme hilbertienne d'un nombre fini de sous-représentations topologiquement irréductibles (cf. [Dix 64, prop. 5.4.13 (i) p. 110] ou [Wal 88, prop. p. 25]).*

On suppose que $e\in M'G_0$. Pour tout $\mathfrak j_e\in\operatorname{Car}\mathfrak g(e)$ et tout $X\in\mathfrak j_e$ tel que $e\exp X\in(M'G_0)_{ss\ reg}$, on a
$$|D_G(e\exp X)|^{1/2}\ (\operatorname{tr}\Pi)(e\exp X)$$
$$= \sum_{(M'\cap G_0)\,g\,\in\, M'\cap G_0\backslash\{g_0\in G_0\,|\,g_0\,e\exp\mathfrak j_e\,g_0^{-1}\subseteq M'\}} |D_{M'}(ge\exp Xg^{-1})|^{1/2}\ (\operatorname{tr}\pi)(ge\exp Xg^{-1})$$
où la somme de droite porte sur un ensemble fini.

(b) *Soient $\nu'\in\mathfrak g^*$ une forme linéaire hyperbolique, $\mathfrak h'$ une sous-algèbre de Cartan fondamentale de $\mathfrak g(\nu')$, et M'_1 un sous-groupe de $G_0(\nu')$ qui contient le groupe $\mathrm C_{G_0}(\mathfrak h')G(\nu')_0$. Pour tous $\lambda'\in\mathfrak h'^*\cap\mathfrak g^*_{ss\ reg}$, $\mathfrak j\in\operatorname{Car}\mathfrak g$ et $X\in\mathfrak j\cap\mathfrak g_{ss\ reg}$, on a*
$$|\mathcal D_{\mathfrak g}(X)|^{1/2}\ \widehat\beta_{G_0\cdot\lambda'}(X) = \sum_{M'_1x\,\in\, M'_1\backslash\{x_0\in G_0\,|\,x_0\mathfrak j\subseteq\mathfrak g(\nu')\}} |\mathcal D_{\mathfrak g(\nu')}(x\,X)|^{1/2}\ \widehat\beta_{M'_1\cdot\lambda'}(x\,X)$$
où la somme de droite porte sur un ensemble fini.

Suite de la démonstration du théorème. On suppose réalisée ici l'égalité $G=G(\lambda_+)\,G_0$, à laquelle on s'est ramené.
On admet (provisoirement) que le théorème est vrai pour $T^{M'}_{\tilde\lambda,\tau_{M'}}$.

Pour obtenir la formule du caractère pour $\operatorname{tr} T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^*{}^+,\tau_+}$, il suffit de la vérifier sur l'ouvert inclus dans $\mathfrak{g}(e)_{ss\ reg}$ de complémentaire négligeable (cf. [Bou 87, avant lem. 1.4.1 p. 6]) et sur lequel les deux membres de l'égalité sont des fonctions analytiques, formé des $X \in \mathcal{V}_e$ tels que $e \exp X \in G_{ss\ reg}$.

On fixe $\mathfrak{j}_e \in \operatorname{Car} \mathfrak{g}(e)$ et $X \in \mathfrak{j}_e \cap \mathcal{V}_e$ tels que $e \exp X \in G_{ss\ reg}$. On a :
$k_e(X) = |\det(1 - \operatorname{Ad} e)_{\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(e)}|^{-1/2} \times |\mathcal{D}_{\mathfrak{g}(e)}(X)|^{-1/2} \times |D_G(e \exp X)|^{1/2}$.

En paraphrasant les calculs de Bouaziz, on fixe des représentants $g_1, \ldots, g_n$ des doubles classes dans $M' \cap G_0 \setminus \{g_0 \in G_0 \mid g_0 e g_0^{-1} \in M'\} / G(e)_0$. On pose $e_1 = g_1 e g_1^{-1}, \ldots, e_n = g_n e g_n^{-1}$. La réunion disjointe des ensembles

$$M' \cap G(e_j)_0 \setminus \{x_0 \in G(e_j)_0 \mid x_0 g_j \, \mathfrak{j}_e \subseteq \mathfrak{m}'(e_j)\} \quad \text{où} \quad 1 \leq j \leq n$$

est en bijection avec l'ensemble

$$M' \cap G_0 \setminus \{g_0 \in G_0 \mid g_0 \, e \exp \mathfrak{j}_e \, g_0^{-1} \subseteq M'\}$$

par l'application qui envoie $(j, \dot x)$ sur $\dot{xg_j}$. On écrit $\left(\operatorname{tr} T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^*{}^+,\tau_+}\right)_e(X)$ à l'aide de la proposition 11.1 (a) en prenant $\pi = T^{M'}_{\tilde\lambda,\tau_{M'}}$ et en tenant compte de cette bijection. On utilise ensuite l'expression de $\left(\operatorname{tr} T^{M'}_{\tilde\lambda,\tau_{M'}}\right)_{e_j}$ proposée au début de la démonstration du théorème, avec $L = M' \cap G(e_j)_0$. Cela fournit trois sommations. On intervertit les deux dernières et tombe sur :

$$\sum_{1 \leq j \leq n} \quad \sum_{\substack{g\dot\lambda_+ \in M' \cap G(e_j)_0 \setminus M' \cdot \lambda_+ \cap \mathfrak{m}'(e_j)^* \\ \text{tel que } (g\tilde\lambda)[e_j] \in \widetilde{\mathfrak{g}(e_j)}^*_{reg}}} \quad \sum_{\dot x \in M' \cap G(e_j)_0 \setminus \{x_0 \in G(e_j)_0 \mid x_0 \, g_j \mathfrak{j}_e \subseteq \mathfrak{m}'\}} \cdots \, .$$

La dernière somme se calcule en appliquant la proposition 11.1 (b) après avoir remplacé G par $G(e_j)$, ν' par ν_+, $\mathfrak{h}'$ par $(g\mathfrak{h})(e_j)$, M'_1 par $M' \cap G(e_j)_0$, λ' par $g\lambda_t$ avec $t \in]0,1]$ (cf. 1.4), $\mathfrak{j}$ par $g_j \mathfrak{j}_e$,et X par $g_j X$, puis en passant à la limite $t \to 0^+$ (cf. 2.6 (b)). En outre, la réunion disjointe des ensembles $M' \cap G(e_j)_0 \setminus M' \cdot \lambda_+ \cap \mathfrak{m}'(e_j)^*$ où $1 \leq j \leq n$ est en bijection avec l'ensemble $G(e)_0 \setminus G \cdot \lambda_+ \cap \mathfrak{g}(e)^*$ par l'application qui envoie $(j, \dot l)$ sur $\dot{g_j^{-1} l}$. Cela permet de regrouper les deux premières sommations en une seule.

Soient $\widehat{e'_+} \in G(\lambda_+)^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}$ et $\widehat{e'_{\mathfrak{m}'}} \in M'(\tilde\lambda)^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ au-dessus d'un élément elliptique e' de $G(\lambda_+)$. Les valeurs propres autres que -1 et 1 de la restriction de $\operatorname{Ad} e'^{\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$ sont non réelles deux à deux conjuguées de module 1. Comme $\mathcal{L}_{\lambda_t}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ (cf. 5.2) est somme directe des sous-espaces $\operatorname{Ad} e'^{\mathbb{C}}$-invariants $\mathfrak{b}_{M'}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}}$, on a $q_{\mathcal{L}_{\lambda_t}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}((\operatorname{Ad} e')_{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}) = q_{\mathfrak{b}_{M'}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}((\operatorname{Ad} e')_{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}})$ relativement à B_{λ_+}, puis d'après 4.2 (d) :

$$\frac{\mathcal{O}(\widehat{e'_+})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}}{\mathcal{O}(B_{\lambda_+})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})}} \, \rho^{\mathfrak{g}/\mathfrak{h}}_{\lambda_+}(\widehat{e'_+}) = \frac{\mathcal{O}(\widehat{e'_{\mathfrak{m}'}})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{m}'/\mathfrak{h})}}{\mathcal{O}(B_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}})_{(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{m}'/\mathfrak{h})}} \, \rho^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}_{\lambda_{+,\mathfrak{m}'}}(\widehat{e'_{\mathfrak{m}'}}) \times \mathrm{i}^{-1/2 \dim(1-\operatorname{Ad} e')(\mathfrak{g}/\mathfrak{m}')}.$$

À l'aide de l'égalité écrite dans la démonstration du lemme 8.2 (a), on en déduit la formule du caractère pour $\operatorname{tr} T^G_{\tilde\lambda,\mathfrak{a}^*{}^+,\tau_+}$ (en l'admettant pour $\operatorname{tr} T^{M'}_{\tilde\lambda,\tau_{M'}}$). . . .

12. Translation au sens de G. Zuckerman

Dans cette section, il s'agit de créer un outil pour la seule étape délicate : le calcul du caractère de la représentation définie après un passage dans l'homologie.

Je commence par rappeler quelques résultats classiques.

Lemme 12.1. *Soient π une représentation linéaire continue de G_0 dans un espace de Hilbert complexe V et K_0 un sous-groupe compact maximal de G_0. Dans* *ces conditions, on notera* V_{K_0} *la réunion des sous-espaces vectoriels de dimension finie de* V *stables par* K_0.

Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, *les propriétés (i) et (ii) suivantes sont équivalentes :*

(i) *il existe une suite finie* $V_0 = V \supseteq V_1 \supseteq \cdots \supseteq V_N = \{0\}$ *de sous-*G_0*-modules fermés de* V *tels que les quotients* V_{j-1}/V_j *avec* $1 \leq j \leq N$ *sont topologiquement irréductibles sous* G_0 *et possèdent un caractère infinitésimal ;*

(ii) *les multiplicités des éléments de* $\widehat{K_0}$ *dans* V_{K_0} *sont finies, ce qui implique que* $\mathfrak{g}$ *opère sur* V_{K_0} *par dérivation de l'action de* G_0 *(cf. [Var 77, th. 14 p. 313]), et il existe une suite finie* $(V_{K_0})_0 = V_{K_0} \supseteq (V_{K_0})_1 \supseteq \cdots \supseteq (V_{K_0})_N = \{0\}$ *de sous-*$(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_0)$*-modules de* V_{K_0} *tels que les quotients* $(V_{K_0})_{j-1} / (V_{K_0})_j$ *avec* $1 \leq j \leq N$ *sont des* $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, K_0)$*-modules irréductibles.*

Quand ces propriétés sont vérifiées, π *est traçable, et les « composantes* $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$*-primaires »* V^{χ} *de* V *associées aux caractères* χ *de l'algèbre unifère* $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$*, définies comme les adhérences dans* V *des sous-espaces vectoriels*

$(V^{\infty})^{\chi} := \{ v \in V^{\infty} \mid \forall u \in \mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \;\; (u - \chi(u))^n \cdot v = 0 \}$ *pour « n grand »,*

sont en somme directe de somme dense dans V *; de plus l'ensemble* P *des poids de* $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ *dans* V^{∞}*, formé des caractères* χ *de* $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ *tels que* $V^{\chi} \neq \{0\}$*, est fini.*

Démonstration du lemme. On constate d'abord que pour tout sous-G_0-module fermé W de V, l'injection canonique de V_{K_0}/W_{K_0} dans $(V/W)_{K_0}$ est surjective. En effet, en notant $\mathrm{pr}_{V/W}$ la projection canonique de V sur V/W, pour tout sous-K_0-module F de dimension finie de V/W le sous-espace vectoriel dense $\mathrm{pr}_{V/W}(V_{K_0} \cap \mathrm{pr}_{V/W}^{-1}(F))$ de F est égal à F. Par ailleurs, on dispose pour chaque $\delta \in \widehat{K_0}$ d'un isomorphime de K_0-modules canonique de V_δ/W_δ sur $(V_{K_0}/W_{K_0})_\delta$ (en notant E_δ la composante isotypique de type δ d'un K_0-module E). Donc pour chaque $\delta \in \widehat{K_0}$, les K_0-modules V_δ/W_δ et $(V/W)_\delta$ sont isomorphes.

Quand (i) est vérifié, les espaces vectoriels $(V_{j-1}/V_j)_\delta$ avec $1 \leq j \leq N$ et $\delta \in \widehat{K_0}$ sont de dimension finie d'après [Var 77, prop. 16 p. 314 et th. 19 p. 316], puis les espaces vectoriels V_δ avec $\delta \in \widehat{K_0}$ sont de dimension finie ; la suite $(V_0)_{K_0} = V_{K_0} \supseteq (V_1)_{K_0} \supseteq \cdots \supseteq (V_N)_{K_0} = \{0\}$ satisfait la condition de (ii) d'après [Var 77, fin de th. 14 p. 313].

Quand (ii) est vérifié, la suite $\overline{(V_{K_0})_0} = V \supseteq \overline{(V_{K_0})_1} \supseteq \cdots \supseteq \overline{(V_{K_0})_N} = \{0\}$ satisfait la condition de (i), à nouveau d'après [Var 77, th. 14 p. 313].

On suppose dorénavant que les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées. Le résultat « π est traçable » est dû à Harish-Chandra (cf. [Wal 88, 8.1.2 p. 292]).

D'après (ii) et [KV 95, cor. 7.207 p. 530], on peut appliquer [KV 95, prop. 7.20 p. 446] à la fois à V^{∞} et à ses composantes $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-primaires (ici *a priori* au sens de [KV 95]). Par conséquent, le membre droite de l'égalité qui définit $(V^{\infty})^{\chi}$ stationne en n et V^{∞} est somme directe d'un nombre fini de ses composantes $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-primaires. On fixe $n \in \mathbb{N}$ qui convienne relativement aux définitions de tous les $(V^{\infty})^{\chi}$, $\chi \in P$.

Soit $Q \subseteq P$. Les caractères de $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ étant linéairement indépendants, on a

$$\sum_{\chi \in Q} (V^{\infty})^{\chi} = \Big\{ v \in V^{\infty} \mid \forall u \in \mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \;\; \prod_{\chi \in Q} (u - \chi(u))^n \cdot v = 0 \Big\}.$$

On se donne une mesure de Haar d_{G_0} sur G_0 et une suite $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments positifs de $C_c^{\infty}(G_0)$ d'intégrale 1 pour d_{G_0}, dont les supports « rentrent dans tout voisinage de 1 dans G_0 ». On a $\big(\overline{\sum_{\chi \in Q} V^{\chi}}\big)^{\infty} = \overline{\sum_{\chi \in Q} (V^{\infty})^{\chi}}$ car pour tout $u \in \mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$

les endomorphismes continus $\pi\big(\varphi_k \mathrm{d}_{G_0} * \prod_{\chi\in Q}(u-\chi(u))^n\big)$ de V avec $k\in\mathbb{N}$ sont nuls sur $\sum_{\chi\in Q}(V^\infty)^\chi$ puis sur $\overline{\sum_{\chi\in Q} V^\chi}$, et d'autre part convergent simplement sur $(\overline{\sum_{\chi\in Q} V^\chi})^\infty$ quand $k\to+\infty$ vers l'opérateur associé à $\prod_{\chi\in Q}(u-\chi(u))^n$.

Pour chaque $\chi_0\in P$, on a donc $\big(V^{\chi_0}\cap \overline{\sum_{\chi\in P\setminus\{\chi_0\}} V^\chi}\big)^\infty=\{0\}$, ce qui montre que les espaces vectoriels V^χ avec $\chi\in P$ sont en somme directe. □

Définition 12.2. On appelle « G_0-module de longueur finie admissible » (ou « G_0-module de Harish-Chandra ») tout espace de Hilbert complexe V muni d'une représentation linéaire continue π de G_0 en son sein qui vérifie les propriétés équivalentes du lemme précédent.

L'objet de la proposition suivante est d'adapter le foncteur de translation de Zuckerman (cf. [Zuc 77]) au cas d'une représentation d'un groupe non connexe.

Proposition 12.3. *On fixe un groupe de Lie réel $\underline{G}$ dont la composante neutre est égale à G_0 et un élément $\underline{a}$ de $\underline{G}$ qui opère par automorphisme intérieur sur G_0 comme un certain élément a de G. On suppose pour simplifier que le groupe $\underline{G}$ est engendré par $\underline{a}G_0$.*

Soit π une représentation linéaire continue de $\underline{G}$ dans un espace de Hilbert complexe V dont la restriction à G_0 est un G_0-module de longueur finie admissible.

(a) *On définit une fonction généralisée $(\operatorname{tr}\pi)_{aG_0}$ sur aG_0, invariante sous $\operatorname{int} G_0$, localement intégrable sur aG_0 et analytique sur $aG_0\cap G_{ss\,reg}$, en posant*

$$(\operatorname{tr}\pi)_{aG_0}(\varphi\,\mathrm{d}_G)=\operatorname{tr}\pi(\underline{\varphi}\,\mathrm{d}_{\underline{G}}) \quad \textit{pour tout } \varphi\in C_c^\infty(aG_0),$$

où $\underline{\varphi}\in C_c^\infty(\underline{a}G_0)$ est définie par $\underline{\varphi}(\underline{a}x_0)=\varphi(ax_0)$ pour $x_0\in G_0$ et, d_G et $\mathrm{d}_{\underline{G}}$ sont des mesures de Haar sur G et $\underline{G}$ dont les restrictions à G_0 coïncident.

Elle s'écrit : $$(\operatorname{tr}\pi)_{aG_0}=\sum_{\chi\in P \text{ tel que } \underline{a}\,\chi=\chi}(\operatorname{tr}\pi_{\dot\chi})_{aG_0},$$

où P est l'ensemble des poids de $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ dans V^∞ et $\pi_{\dot\chi}$ désigne pour chaque $\chi\in P$ tel que $\underline{a}\,\chi=\chi$ la représentation de $\underline{G}$ dans V^χ issue de π.

(b) *On suppose qu'il existe un caractère χ de $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_\mathbb{C})$ tel que $V=V^\chi$.*

Soit $x\in aG_0\cap G_{ss\,reg}$. Donc $\mathfrak{j}_x:=\mathfrak{g}(x)$ est commutative (cf. 10.1 (b)) et $\mathfrak{j}:=\mathrm{C}_\mathfrak{g}(\mathfrak{j}_x)$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ (cf. [Bou 87, lem. 1.4.1 p. 6]). On note $\mathfrak{j}(x)_1$ la composante connexe de 0 dans $\{\,Y\in\mathfrak{j}(x)\mid x\exp Y\in G_{ss\,reg}\}$.

Il existe des éléments p_l de $S(\mathfrak{j}(x)^*_\mathbb{C})$ associés aux $l\in\mathfrak{j}(x)^*_\mathbb{C}$ vérifiant $\chi=\chi_l^{U\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$ (notation de 8.4 (a)), tels que pour tout $Y\in\mathfrak{j}(x)_1$ on ait

$$|D_G(x\exp Y)|^{1/2}\ (\operatorname{tr}\pi)_{aG_0}(x\exp Y)\ =\sum_{l\in\mathfrak{j}(x)^*_\mathbb{C} \text{ tel que } \chi=\chi_l^{U\mathfrak{g}_\mathbb{C}}} p_l(Y)\ \mathrm{e}^{l(Y)}.$$

De plus, quand χ est « régulier » (c'est-à-dire associé à une orbite semi-simple régulière de $\operatorname{int}\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}^*_\mathbb{C}$) chaque p_l est un scalaire.

(c) *On suppose que π a un caractère infinitésimal régulier χ. On choisit $\Lambda\in\mathfrak{g}^*_\mathbb{C}$ semi-simple régulière telle que $\chi=\chi_\Lambda^{U\mathfrak{g}_\mathbb{C}}$. On note C l'unique chambre de $R(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{g}_\mathbb{C}(\Lambda))$ dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}(\Lambda)^*\cap\mathrm{D}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^*$ telle que $\Lambda\in C+\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^*$, et $\overline{C}$ son adhérence.*

Soit π_F une représentation linéaire de $\underline{G}$ dans un espace de Hilbert complexe de dimension finie F, dont la restriction à G_0 est irréductible, et telle que le plus bas poids de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}(\Lambda)$ dans F relativement à C, noté Λ_F, vérifie $\Lambda+\Lambda_F\in\overline{C}+\mathrm{Z}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^*$.

La restriction à G_0 de la représentation $\pi\otimes\pi_F$ de $\underline{G}$ donne un G_0-module de longueur finie admissible et $\underline{G}$ opère dans sa composante $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-primaire $(V\otimes_{\mathbb{C}} F)^{\chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{\Lambda+\Lambda_F}}$ au moyen d'une représentation π_{Zuc} ayant encore cette propriété.

Soit $x\in aG_0\cap G_{ss\,reg}$. On lui associe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}$ et des nombres complexes p_l comme au (b). Pour tout $Y\in\mathfrak{j}(x)_1$, on a

$$|D_G(x\exp Y)|^{1/2}\ \ (\mathrm{tr}\,\pi_{Zuc})_{aG_0}(x\exp Y)\ =\sum_{l\,\in\,\mathfrak{j}(x)^*_{\mathbb{C}}\ \text{tel que}\ \chi=\chi_l^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}}\underline{x}_{\,l_F}\ p_l\ \mathrm{e}^{(l+l_F)(Y)},$$

où $l_F\in\mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}}$ est défini à partir de l comme Λ_F à partir de Λ et $\underline{x}_{\,l_F}$ est le scalaire par lequel l'élément $\underline{x}:=\underline{a}\,(a^{-1}x)$ de $\underline{G}$ (qui fixe l_F) agit sur l'espace propre (de dimension 1) de poids l_F pour l'action de $\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}$ dans F.

Démonstration de la proposition. On utilisera l'action canonique par opérateurs différentiels invariants à gauche de l'algèbre enveloppante d'un groupe de Lie réel sur l'espace vectoriel des fonctions généralisées sur ce groupe de Lie.

(a) La représentation π est traçable d'après le lemme 12.1. La fonction généralisée $(\mathrm{tr}\,\pi)_{aG_0}$, égale à $\delta_a*(\delta_{\underline{a}^{-1}}*\mathrm{tr}\,\pi_{|\underline{a}G_0})$, est invariante sous $\mathrm{int}\,G_0$.

Soient $u_0\in\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et $\underline{\varphi}\in C_c^\infty(\underline{a}G_0)$. On pose $u=\prod\limits_{\chi\in P}(u_0-\chi(u_0))$. La démonstration de [KV 95, cor. 7.207 p. 530] fournit l'existence d'une suite finie $W_0=V\supseteq W_1\supseteq\cdots\supseteq W_N=\{0\}$ de sous-$\underline{G}$-modules fermés de V tels que les quotients W_{k-1}/W_k avec $1\le k\le N'$ sont topologiquement irréductibles sous $\underline{G}$.

Soit $k\in\{1,\ldots,N'\}$. On note π_k la représentation de $\underline{G}$ dans W_{k-1}/W_k. Tout sous-quotient d'un G_0-module de longueur finie admissible est un G_0-module de longueur finie admissible. Donc W_{k-1}/W_k a un sous-G_0-modules fermé topologiquement irréductible E qui possède un caractère infinitésimal. L'action de u sur $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\underline{a}^n\,E^\infty$ est nulle. Donc $\pi_k(\underline{\varphi}\mathrm{d}_{\underline{G}}*u)=0$.

Ainsi : $\partial_u(\mathrm{tr}\,\pi)\,(\underline{\varphi}\mathrm{d}_{\underline{G}})=\mathrm{tr}\,\pi_1(\underline{\varphi}\mathrm{d}_{\underline{G}}*u)+\cdots+\mathrm{tr}\,\pi_{N'}(\underline{\varphi}\mathrm{d}_{\underline{G}}*u)=0$ (cf. [Wal 88, lem. 8.1.3 p. 293]). De plus, on a $\underline{a}\,u=u$. Il en résulte que :

$$\partial_u((\mathrm{tr}\,\pi)_{aG_0})=\delta_a*((\delta_{\underline{a}^{-1}}*\mathrm{tr}\,\pi_{|\underline{a}G_0})*(\delta_{\underline{a}}*\check{u}*\delta_{\underline{a}^{-1}}))=0.$$

D'après [Bou 87, th. 2.1.1 p. 10] et [KV 95, th. 4.95 p. 286 et th. 7.30 (a) p. 450], $(\mathrm{tr}\,\pi)_{aG_0}$ est localement intégrable sur aG_0 et analytique sur $aG_0\cap G_{ss\,reg}$.

Soient $\chi\in P$ tel que $\underline{a}\,\chi\neq\chi$ et (à nouveau) $\underline{\varphi}\in C_c^\infty(\underline{a}G_0)$. On note m le cardinal de l'orbite $\dot\chi$ de χ sous l'action du sous-groupe $\langle\underline{a}\rangle$ de $\underline{G}$ engendré par $\underline{a}$, et $\pi_{\dot\chi}$ la représentation de $\underline{G}$ dans $W:=\overline{\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\underline{a}^n\,V^\chi}$. La restriction de $\pi_{\dot\chi}(\underline{\varphi}\mathrm{d}_{\underline{G}})$ à la somme directe $V^\chi\oplus\underline{a}V^\chi\oplus\cdots\oplus\underline{a}^{m-1}V^\chi$ se décompose en blocs avec des blocs diagonaux nuls. J'exploite cette propriété en utilisant une suggestion de G. Skandalis pour me ramener au cas de la dimension finie.

La sous-algèbre de $\mathcal{L}(W)$ formée des endomorphismes qui stabilisent simultanément V^χ, $\underline{a}V^\chi,\ldots,\underline{a}^{m-1}V^\chi$ est fermée. D'après [B 67, remarque p. 55 et prop. 7 p. 47], les sous-espaces primaires W^z de la restriction de $\pi_{\dot\chi}(\underline{\varphi}\mathrm{d}_{\underline{G}})^m$ à W associés aux $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, qui sont de dimension finie, sont tous sommes de leurs intersections avec V^χ et $\cdots$ et $\underline{a}^{m-1}V^\chi$. En outre, chaque W^z avec $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ est égal à la somme des sous-espaces primaires de la restriction de $\pi_{\dot\chi}(\underline{\varphi}\mathrm{d}_{\underline{G}})$ à W associés aux racines $m^{\text{ièmes}}$ de z. La formule de Lidskij (« la trace est la somme des valeurs propres ») donne ensuite l'égalité $\mathrm{tr}\,\pi_{\dot\chi}(\underline{\varphi}\,\mathrm{d}_{\underline{G}})=\sum\limits_{z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}}\mathrm{tr}\,\big(\pi_{\dot\chi}(\underline{\varphi}\,\mathrm{d}_{\underline{G}})|_{W^z}\big)=0$.

D'où, en utilisant cette fois-ci [B 67] relativement à $\mathcal{L}(V)$ (cf. dem. de 12.1):

$$(\operatorname{tr}\pi)_{aG_0} = \sum_{\dot\chi \in \langle \underline{a}\rangle\backslash P} (\operatorname{tr}\pi_{\dot\chi})_{aG_0} = \sum_{\chi\in P \text{ tel que } \underline{a}\,\chi=\chi} (\operatorname{tr}\pi_{\dot\chi})_{aG_0}.$$

(b) Je vais préciser ici les calculs de [Bou 87, p. 33 et p. 34].

On pose $\theta(Y) = |D_G(x\exp Y)|^{1/2}\,(\operatorname{tr}\pi)_{aG_0}(x\exp Y)$ pour tout $Y\in \mathfrak{j}(x)_1$. On note W le groupe $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ et pr la projection canonique de $S\,\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ sur $S\,\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}$ obtenue comme dans les conventions 2 (b). La démonstration du (a) montre que $(\operatorname{tr}\pi)_{aG_0}$ est vecteur propre de $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ associé à χ. On fixe un élément l_0 de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\chi = \chi_{l_0}^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$. D'après [Bou 87, ligne 4 de 2.5 p. 20], on a :

$$q(l_0)\,\theta = \partial_{\operatorname{pr}(q)}\theta \quad \text{pour tout } q\in(S\,\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})^W.$$

On répète dans ce qui suit les arguments de [Kna 86, p. 369 à p. 371].

Soit $X\in\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$. On note $q_0,\dots,q_{|W|-1}$ les éléments de $(S\,\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})^W$ pour lesquels on a l'égalité suivante de polynômes en l'indéterminée T :

$$\prod_{w\in W}(T-wX) = T^{|W|} + q_{|W|-1}T^{|W|-1} + \cdots + q_0 \quad \text{dans } (S\,\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})[T].$$

À partir de là, d'une part en remplaçant T par X, et d'autre part en prenant la valeur de chaque membre en l_0 puis remplaçant T par X, on obtient dans $S\,\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$:

$$X^{|W|} + X^{|W|-1}q_{|W|-1} + \cdots + q_0 = 0$$
$$\text{et}\quad X^{|W|} + X^{|W|-1}q_{|W|-1}(l_0) + \cdots + q_0(l_0) = \prod_{w\in W}(X - l_0(wX)).$$

On utilise l'équation aux dérivées partielles vérifiée ci-dessus par θ avec q successivement égal à $q_{|W|-1},\dots,q_0$. Elle donne l'égalité suivante, qu'il reste à exploiter :

$$\prod_{w\in W}(\partial_{\operatorname{pr}(X)} - l_0(wX))\cdot\theta = 0.$$

On fait décrire à X une base de $\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}$. D'aprè [Var 77, prop. 3 p. 58], il existe une unique famille $(p_l)_{l\in\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}^*}$ d'éléments de $S(\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}^*)$ à support fini telle que

$$\theta(Y) = \sum_{l\in\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}^*} p_l(Y)\,\mathrm{e}^{l(Y)} \quad \text{pour tout } Y\in\mathfrak{j}(x)_1.$$

On va obtenir des renseignements plus précis en substituant cette expression de θ dans l'égalité qui précédait (et prolongeant analytiquement à $\mathfrak{j}(x)$).

Soit $l\in\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}^*$ tel que $p_l\neq 0$. On note d le degré de p_l dans $S(\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}^*)$ et $p_l^{[d]}$ la composante homogène de p_l de degré d. Soit $X\in\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$. Pour tout $w\in W$, on a

$$(\partial_{\operatorname{pr}(X)} - l_0(wX))\cdot p_l\,\mathrm{e}^l = (l(X) - l_0(wX))\,p_l\,\mathrm{e}^l + (\partial_{\operatorname{pr}(X)}p_l)\,\mathrm{e}^l.$$

Le polynôme nul $\mathrm{e}^{-l}\times\prod_{w\in W}(\partial_{\operatorname{pr}(X)} - l_0(wX))\cdot p_l\,\mathrm{e}^l$ admet $\prod_{w\in W}(l - w^{-1}l_0)(X)\times p_l^{[d]}$ comme composante homogène de degré d. Vu que l'anneau $S\,\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$ est intègre, cela montre que $l\in W\cdot l_0$, puis $\chi = \chi_l^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}$.

On suppose maintenant p_l non scalaire. On choisit $X\in\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ tel que, pour tout $w\in W$ hors de $W(l)$ on ait $(w\,l)(X)\neq l(X)$, et $p_l^{[d]}(\operatorname{pr}(X))\neq 0$. On note $(\operatorname{pr}(X)^*)$ la base de $(\mathbb{C}\operatorname{pr}(X))^*$ duale de $(\operatorname{pr}(X))$. La restriction du polynôme nul

$$\mathrm{e}^{-l}\times\prod_{w\in W(l)}(\partial_{\operatorname{pr}(X)} - l(wX))\cdot\Big(\prod_{w\in W \text{ et } w\notin W(l)}(\partial_{\operatorname{pr}(X)} - l(wX))\cdot p_l\,\mathrm{e}^l\Big)$$

à $\mathbb{C}\operatorname{pr}(X)$ est somme d'un polynôme de la forme $\zeta\times(\partial_{\operatorname{pr}(X)})^{|W(l)|}\cdot(\operatorname{pr}(X)^*)^d$ avec $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et de monômes de degrés strictement plus petits. D'où $|W(l)|>1$.

(c) Je m'inspire de [Zuc 77, p. 301].

D'après [KV 95, cor. 7.207 p. 530], $\pi\otimes\pi_F$ et les représentations de G_0 sur les composantes $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$-primaires de $V\otimes_{\mathbb{C}}F$ donnent des G_0-modules de longueur finie admissibles.

Par hypothèse, on a $\underline{a}\,\chi = \chi$. Il existe donc $\sigma \in (\mathrm{Ad}\,\underline{a})^{\mathbb{C}}\ \mathrm{int}\,\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tel que $\sigma(\Lambda) = \Lambda$. On a: $\sigma(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\Lambda)) = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(\Lambda)$ et $\sigma(C) = C$, puis $\sigma(\Lambda_F) = \Lambda_F$. On en déduit que $\underline{a}\,\chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{\Lambda+\Lambda_F} = \sigma\,\chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{\Lambda+\Lambda_F} = \chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{\Lambda+\Lambda_F}$. Le groupe $\underline{G}$ laisse donc stable $(V \otimes_{\mathbb{C}} F)^{\chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{\Lambda+\Lambda_F}}$.

On note P' l'ensemble des poids de $\mathrm{Z}(U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans $(V \otimes_{\mathbb{C}} F)^{\infty}$, $P(F, \mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})$ l'ensemble des poids de $\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}$ dans F et F^{γ} l'espace propre de $\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}$ associé à un élément γ de $P(F, \mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})$. Pour tout $Y \in \mathfrak{j}(x)_1$, on a grâce au (a):

$$(\mathrm{tr}\,\pi)_{aG_0}(x \exp Y) \times \mathrm{tr}\,\pi_F(\underline{x} \exp Y) \;=\; \sum_{\chi' \in P' \text{ tel que } \underline{a}\,\chi' = \chi'} (\mathrm{tr}(\pi \otimes \pi_F)_{\dot{\chi}'})_{aG_0}(x \exp Y)$$

$$\text{et} \quad \mathrm{tr}\,\pi_F(\underline{x} \exp Y) \;=\; \sum_{\gamma \in P(F, \mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})} \mathrm{tr}(\pi_F(\underline{x})|_{F^{\gamma}})\ \mathrm{e}^{\gamma(Y)}.$$

On applique le (b) à π, et aux $(\pi \otimes \pi_F)_{\dot{\chi}'}$ avec $\chi' \in P'$ tel que $\underline{a}\,\chi' = \chi'$, parmi lesquels se trouve π_{Zuc}. En identifiant les facteurs polynomiaux écrits devant les fonctions e^{l} avec $l \in \mathfrak{j}(x)^*_{\mathbb{C}}$, on trouve que pour tout $Y \in \mathfrak{j}(x)_1$ on a

$$|D_G(x \exp Y)|^{1/2}\ \ (\mathrm{tr}\,\pi_{Zuc})_{aG_0}(x \exp Y) = \sum_{(l,\gamma) \in \mathcal{A}} \mathrm{tr}(\pi_F(\underline{x})|_{F^{\gamma}})\ p_l\ \ \mathrm{e}^{(l+\gamma)(Y)},$$

où on a posé $\mathcal{A} = \{(l,\gamma) \in \mathfrak{j}(x)^*_{\mathbb{C}} \times P(F, \mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}) \mid \chi = \chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{l} \text{ et } \chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{\Lambda+\Lambda_F} = \chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{l+\gamma}\}$.

Pour finir, on vérifie que $\mathcal{A} = \{(l,\gamma) \in \mathfrak{j}(x)^*_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}} \mid \chi = \chi^{U\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}}_{l} \text{ et } \gamma = l_F\}$, et $\dim F^{\gamma} = 1$ pour $(l,\gamma) \in \mathcal{A}$. L'inclusion $\supseteq$ est claire. On considère un $(l,\gamma) \in \mathcal{A}$. On modifie le choix de Λ en prenant $\Lambda = l$. On va montrer que $\gamma = \Lambda_F$, et calculer $\dim F^{\gamma}$. On fixe un $w \in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ tel que $l + \gamma = w(\Lambda + \Lambda_F)$.
On a $\gamma - \Lambda_F = w(\Lambda+\Lambda_F) - (\Lambda+\Lambda_F)$ et $w(\Lambda+\Lambda_F) - (\Lambda+\Lambda_F) \leq 0$ pour l'ordre associé à C, car $\Lambda + \Lambda_F \in \overline{C} + \mathrm{Z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})^*$. D'autre part, il existe un poids ζ de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans F tel que $\gamma = \zeta|_{\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}}$. L'inclusion $\mathfrak{j}(x)^*_{\mathbb{C}} \subseteq \mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}}$ identifie γ à l'isobarycentre de la partie finie $\{\mathrm{Ad}^*\, x^n \cdot \zeta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'ensemble des poids de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans F. Donc $\gamma - \Lambda_F \geq 0$ pour l'ordre associé à C. Par conséquent $\gamma = \Lambda_F$. Comme γ est un poids extrémal de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans F qui est isobarycentre d'un ensemble fini de poids de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans F, il est égal en particulier à ζ. Ainsi le sous-espace propre de F de poids γ sous l'action de $\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}$ est de dimension 1. □

13. Passage de $T^{M'}_{\lambda_r,\sigma_r}$ à $T^{M'}_{\tilde{\lambda},\tau_{M'}}$

Pour simplifier les notations, on pose dans cette section: $\mathbb{M}' = \mathbb{G}(\nu_+)$, $\rho = \rho_{\mathfrak{m}',\mathfrak{h}}$, $\sigma = \tau_{M'}$, et $\lambda_r = \lambda_{+,\mathfrak{m}'}$. On a donc $\lambda_r = (\mu - 2\mathrm{i}\rho) + \nu \in \mathfrak{m}'^{*}_{ss\ reg}$. On va voir qu'en gros, le caractère $\mathrm{tr}\,T^{M'}_{\tilde{\lambda},\sigma}$ se déduit d'un caractère de la forme $\mathrm{tr}\,T^{M'}_{\lambda_r,\sigma_r}$ par translation au sens de Zuckerman.

La proposition suivante va s'obtenir en prouvant une variante des résultats de Bouaziz dans [Bou 84, (i) et (ii) p. 550] (cf. aussi [KV 95, p. 547 et p. 548]). Elle a pour origine le lemme 3.1 p. 406 de [KZ 82], qui fournit l'égalité des restrictions à M'_0 des caractères considérés au (b) ci-dessous.

Proposition 13.1. *On fixe $\hat{a} \in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ au-dessus d'un élément elliptique a de $M'(\widetilde{\lambda})$. On note $\underline{M'}$ le produit semi-direct de $\mathbb{Z}$ par M'_0 tel que $\underline{a} := 1 \in \mathbb{Z}$ agisse sur M'_0 par* $\mathrm{int}\,a$.

(a) *Il existe une représentation linéaire continue π_F de $\underline{M'}$ dans un espace de Hilbert complexe de dimension finie F, unique à isomorphisme près, dont la* *restriction à M_0' est irréductible avec pour plus bas poids -2ρ pour l'action de $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ et relativement à l'ordre déduit de $R^+(\mathfrak{m}'_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$, telle que $\underline{a}$ agisse trivialement sur l'espace propre de poids -2ρ.*

(b) *On prolonge les représentations unitaires $T_{\tilde{\lambda}}^{M_0'}$ et $T_{\lambda_r}^{M_0'}$ de M_0' « d'espaces » notés $\mathcal{H}$ et V, en des représentations linéaires continues $\pi_{\tilde{\lambda}}$ et π_{λ_r} de $\underline{M'}$ par les conditions $\pi_{\tilde{\lambda}}(\underline{a}) = S_{\tilde{\lambda}}(\hat{a})$ et $\pi_{\lambda_r}(\underline{a}) = S_{\lambda_r}(\hat{a})$, où $S_{\tilde{\lambda}}$ et S_{λ_r} sont les représentations de $M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ (qui est égal à $M'(\lambda_r)^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$) attachées à $\widetilde{\lambda}$ et λ_r dans la proposition 8.1 (b).*

Les représentations de $\underline{M'}$ dans $\mathcal{H}$ et $(V \otimes_\mathbb{C} F)^{\chi_{\mathrm{i}\lambda}^{U\mathfrak{m}'_\mathbb{C}}}$ sont traçables et ont même caractère.

Démonstration de la proposition. **(a)** Il existe — et on se donne — une représentation linéaire irréductible de $\mathfrak{m}'_\mathbb{C}$ dans un espace de Hilbert complexe F de dimension finie, de plus bas poids -2ρ pour l'action de $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ relativement à l'ordre déduit de $R^+(\mathfrak{m}'_\mathbb{C}, \mathfrak{h}_\mathbb{C})$. Elle s'intègre en une représentation « du » revêtement universel de M_0' avec un caractère central trivial, puis en une représentation de M_0' notée $\pi_{F,0}$. Comme $\underline{a}$ normalise $\mathfrak{h}$ et fixe -2ρ, il existe un unique opérateur d'entrelacement Φ de $(F, \operatorname{int} \underline{a} \cdot \pi_{F,0})$ sur $(F, \pi_{F,0})$ qui agit trivialement sur le sous-espace propre de F de poids -2ρ sous l'action de $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$, commun aux deux représentations et de dimension 1. On construit π_F en prolongeant $\pi_{F,0}$ et choisissant $\pi_F(\underline{a})$ égal à Φ.

(b) On remarque d'abord que $\underline{M'}$ stabilise $\mathcal{H}_0 := (V \otimes_\mathbb{C} F)^{\chi_{\mathrm{i}\lambda}^{U\mathfrak{m}'_\mathbb{C}}}$. D'après le lemme 12.1 et la proposition 12.3 (c), les représentations de $\underline{M'}$ dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$ sont traçables.

On fixe un sous-groupe compact maximal $K_{M_0'}$ de M_0' stable par $\operatorname{int} a$ et dont l'involution de Cartan normalise $\mathfrak{h}$. Par exemple $\exp(\mathfrak{c}_{M'} \cap \mathfrak{m}')$, où $\mathfrak{c}_{M'}$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal du produit semi-direct de $\{1, c\}$ (c : conjugaison de $\mathbb{M}'(\mathbb{C})$) par $\mathbb{M}'(\mathbb{C})$ qui contient à la fois c et le sous-groupe engendré par le produit de la projection dans $\mathbb{M}'(\mathbb{R})$ de a avec $\exp_{\mathbb{M}'(\mathbb{C})}(\mathrm{i}\, \mathfrak{h}_{(\mathbb{R})})$. On note $\mathcal{H}^f$, $\mathcal{H}_0^f$ et V^f les $(\mathfrak{m}'_\mathbb{C}, K_{M_0'})$-modules stables par $\underline{a}$ associés à $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$ et V. D'après [Kna 86, prop. 10.5 p. 336] avec sa démonstration (cf. [Kna 86, cor. 8.8 p. 211]), les représentations de $\underline{M'}$ dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_0$ ont même caractère s'il existe un isomorphisme de $(\mathfrak{m}'_\mathbb{C}, K_{M_0'})$-modules de $\mathcal{H}^f$ sur $\mathcal{H}_0^f$ compatible à l'action de $\underline{a}$.

On a vu au cours de la démonstration de 8.1 (a) que $\mathcal{H}^f$ et V^f sont irréductibles, isomorphes à $\mathcal{R}_{M_0'}^{q'}(\mathbb{C}_{\mathrm{i}\,\lambda-\rho})$ et $\mathcal{R}_{M_0'}^{q'}(\mathbb{C}_{\mathrm{i}\,\lambda_r-\rho})$ où $\mathcal{R}_{M_0'}^{q'}$ est le foncteur d'induction cohomologique relatif à $\mathfrak{b}_{M'}$ et $\mathbb{C}_\Lambda$ est pour chaque $\Lambda \in \mathrm{i}\,\mathfrak{h}^*$ le $(\mathfrak{h}_\mathbb{C}, T_0)$-module $\mathbb{C}$ sur lequel $\mathfrak{h}$ agit par Λ. D'après [KV 95, th. 7.237 p. 544] et en utilisant la notation $\psi_l^{l'}$ de [KV 95, (7.141) p. 493], on a

$$\mathcal{R}_{M_0'}^{q'}(\psi_{\mathrm{i}\,\lambda_r-\rho}^{\mathrm{i}\,\lambda-\rho}(\mathbb{C}_{\mathrm{i}\,\lambda_r-\rho})) \simeq \psi_{\mathrm{i}\,\lambda_r}^{\mathrm{i}\,\lambda}(\mathcal{R}_{M_0'}^{q'}(\mathbb{C}_{\mathrm{i}\,\lambda_r-\rho})).$$

Ainsi, les $(\mathfrak{m}'_\mathbb{C}, K_{M_0'})$-modules $\mathcal{H}^f$ et $\mathcal{H}_0^f$ sont isomorphes.

Compte tenu de la caractérisation de $S_{\tilde{\lambda}}(\hat{a})$ dans 8.1 (b), du lemme de Schur de [Wal 88, lem. 3.3.2 p. 80] et de l'identification $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}^\infty)^* = H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}^f)^*$ de [Duf 82a, lem. 4 p. 165], pour obtenir la compatibilité à l'action de $\underline{a}$ d'un isomorphisme de $(\mathfrak{m}'_\mathbb{C}, K_{M_0'})$-modules fixé de $\mathcal{H}^f$ sur $\mathcal{H}_0^f$, il suffit de montrer que $\underline{a}$ agit à partir de $\pi_{\lambda_r}(\underline{a}) \otimes \pi_F(\underline{a})$ dans $(H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f)^*)_{-(\mathrm{i}\,\lambda+\rho)}$ par $\rho_{\tilde{\lambda}}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}(\hat{a})^{-1}\,\mathrm{id}$, c'est-à-dire par $\rho_{\lambda_r}^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}(\hat{a})^{-1}\,\mathrm{id}$.

L'idée de Bouaziz consiste en gros à vérifier la compatibilité à l'action de $\underline{a}$ de l'isomorphisme qu'on obtiendrait au niveau de l'homologie en prenant $\mathfrak{q}$ égal au conjugué de $\mathfrak{b}_{M'}$ et X égal à V^f dans [KV 95, th. 7.242 p. 546]. Malheureusement, l'hypothèse « $\mathrm{i}\,\lambda_r$ est au moins autant singulier que $\mathrm{i}\,\lambda$ » n'est pas satisfaite. Au lieu de passer de V^f à $\mathcal{H}_0^f$, on va passer de $\mathcal{H}_0^f$ à V^f en utilisant une propriété de la composée de deux foncteurs de translation de Zuckerman.

D'après [KV 95, th. 7.220 p. 536], le morphisme de $(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}, K_{M'_0})$-modules compatible à l'action de $\underline{a}$ de $(\mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^*)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r}^{U\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}}}$ dans V^f obtenu par restriction à partir de l'application canonique de $V^f \otimes_{\mathbb{C}} F \otimes_{\mathbb{C}} F^*$ dans V^f, est non nul donc surjectif. Les composantes $\mathrm{Z}(U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$-primaires associées à $\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$ dans la suite exacte de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules d'homologie issue de cette surjection fournissent un morphisme de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules de $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, (\mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^*)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r}^{U\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}}})^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}}$ dans $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, V^f)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}}$ compatible à l'action de $\underline{a}$, qui est surjectif d'après [KV 95, lem. 8.9 p. 553].

Soit v_0^* un vecteur non nul de F^* de poids 2ρ pour l'action de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$. On a $\mathfrak{n}_{M'} \cdot v_0^* = \{0\}$ et $\underline{a} \cdot v_0^* = v_0^*$ d'après (a). Il reste à prouver que chacun des deux morphismes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules compatibles à l'action de $\underline{a}$ déduits des injections canoniques de $(\mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^*)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r}^{U\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}}}$ et $\mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}v_0^*$ dans $\mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^*$, définis respectivement sur $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, (\mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^*)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r}^{U\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}}})^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}}$ et $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}v_0^*$, et tous deux à valeurs dans $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^*)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}}$, est bijectif.
En effet, dans ce cas et avec la notation $\mathbb{C}_\Lambda$ introduite plus haut dans cette démonstration, la droite formée des morphismes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules de $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, V^f)$ dans $\mathbb{C}_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}$ s'injectera de manière compatible à l'action de $\underline{a}$ dans celle formée des morphismes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules de $H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f)$ dans $\mathbb{C}_{\mathrm{i}\,\lambda+\rho}$.

Le premier des deux morphismes précédents est bijectif d'après [KV 95, (7.243) p. 547, cf. prop. 7.166 p. 506]. Pour le second, on pose $W = F^* / \mathbb{C}v_0^*$.

La suite exacte de $\mathfrak{b}_{M'}$-modules $0 \to \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}v_0^* \to \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^* \to \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} W \to 0$ fournit le morceau suivant de la suite exacte de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules d'homologie :

$$H_{q'+1}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} W) \to H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}v_0^* \to H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} F^*) \to H_{q'}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} W).$$

On termine la démonstration en montrant que $H_\bullet(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} W)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}} = \{0\}$.

Par le théorème de Lie, il existe — et on fixe — une suite $\{0\} = W^{(-1)} \subseteq W^{(0)} \subseteq \cdots \subseteq W^{(N)} = W$ de sous-$\mathfrak{b}_{M'}$-modules de W avec $\dim W^{(j)} / W^{(j-1)} = 1$ pour $0 \le j \le N$. D'après [KV 95, prop. 3.12 p. 188], pour tout $(\mathfrak{b}_{M'}, T_0)$-module E et tout $n \in \mathbb{N}$, le $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-module $H_n(\mathfrak{n}_{M'}, E)$ est isomorphe à $P_n(E)$, où P_n est le $n^{\text{ième}}$ foncteur dérivé du foncteur exact à droite de la catégorie des $(\mathfrak{b}_{M'}, T_0)$-modules dans celle des $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, T_0)$-modules noté $P_{\mathfrak{b}_{M'}, T_0}^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, T_0}$ dans [KV 95, (2.8) p. 104]. D'après [KV 95, prop. D.57 (b) p. 887, cf. (2.123) p. 162], il existe — et on fixe — une filtration $\{0\} = C_\bullet^{(-1)} \subseteq C_\bullet^{(0)} \subseteq \cdots \subseteq C_\bullet^{(N)} = C_\bullet$ d'un complexe de chaines $C_\bullet$ en $(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, T_0)$-modules nul en degré strictement négatif, dont chaque $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules d'homologie $H_n(C_\bullet)$ est isomorphe à $H_n(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f \otimes_{\mathbb{C}} W)$ pour $n \in \mathbb{N}$, et dont la suite spectrale $(E^r)_{r \ge 0}$ fournit des $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules $E_{p,q}^1$ isomorphes à $H_{p+q}(\mathfrak{n}_{M'}, \mathcal{H}_0^f) \otimes_{\mathbb{C}} (W^{(p)} / W^{(p-1)})$ pour $0 \le p \le N$ et $p + q \ge 0$. D'après [KV 95, prop. 7.56 p. 460], les composantes $\mathrm{Z}(U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$-primaires de chacun de ces $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules $E_{p,q}^1$ sont associées à des caractères de la forme $\chi_{w\,\mathrm{i}\,\lambda+\rho+\gamma}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$ avec $w \in W(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$, où on a noté γ le poids de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans $W^{(p)} / W^{(p-1)}$. Ainsi, au vu de [KV 95, prop. 7.166 p. 506], on a $(E_{p,q}^1)^{\chi_{\mathrm{i}\,\lambda_r+\rho}^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}} = \{0\}$. Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$, le $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-module $E^{\infty}_{n-q,q}$ est un sous-quotient de $E^{1}_{n-q,q}$ isomorphe au quotient de $\mathrm{pr}_{H_n(C_\bullet)}(H_n(C^{(n-q)}_\bullet))$ par $\mathrm{pr}_{H_n(C_\bullet)}(H_n(C^{(n-q-1)}_\bullet))$, où on a utilisé la même notation $\mathrm{pr}_{H_n(C_\bullet)}$ pour les applications canoniques à valeurs dans $H_n(C_\bullet)$. D'où pour chaque $n\in\mathbb{N}$ les relations suivantes entre $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$-modules :

$$H_n(\mathfrak{n}_{M'},\mathcal{H}^f_0\otimes_{\mathbb{C}} W)^{\chi^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}_{\mathrm{i}\lambda_r+\rho}}\simeq \mathrm{pr}_{H_n(C_\bullet)}(H_n(C^{(N)}_\bullet))^{\chi^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}_{\mathrm{i}\lambda_r+\rho}} = \cdots = \mathrm{pr}_{H_n(C_\bullet)}(H_n(C^{(-1)}_\bullet))^{\chi^{U\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}_{\mathrm{i}\lambda_r+\rho}}=\{0\}.$$

Cela achève la démonstration. □

Remarque 13.2. On conserve les notations de la démonstration précédente. En particulier, $K_{M'_0}$ est stable par $\mathrm{int}\,a$. On fixe un opérateur d'entrelacement Φ de $(\mathcal{H},\mathrm{int}\,a\cdot T^{M'_0}_{\tilde\lambda})$ sur $(\mathcal{H},T^{M'_0}_{\tilde\lambda})$ et un isomorphisme Ψ de $(\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}},K_{M'_0})$-modules de $\mathcal{H}^f$ sur $\mathcal{H}^f_0$. On note Φ^f la restriction de Φ à $\mathcal{H}^f$ et $\pi_0(\underline{a})^f$ l'opérateur par lequel $\underline{a}$ agit sur $\mathcal{H}^f_0$. D'après le lemme de Schur, il existe $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ tel que $\Phi^f=z\,\Psi^{-1}\circ\pi_0(\underline{a})^f\circ\Psi$. La démonstration de la proposition 13.1 (b) montre que la représentation S de la proposition 8.1 (b) vérifie $S(\hat a)=z^{-1}\,\Phi$. Par ailleurs, $K_{M'_0}$ est inclus dans un sous-groupe compact maximal de M' qui contient a, et les sous-groupes compacts maximaux de M' sont conjugués sous M'_0 (cf. [Hoc 65, th. 3.1 p. 180 et lignes avant le th. 3.7 p. 186]). Il est facile d'en déduire que z est indépendant du choix de $K_{M'_0}$. On aurait donc pu définir S en se ramenant au cas semi-simple régulier traité par M. Duflo (pour les valeurs sur les éléments elliptiques) et en s'arrangeant pour que $S(\exp X)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(X)}\,T^{M'_0}_{\tilde\lambda}(\exp X)$ quand $X\in\mathfrak{h}$. Il resterait à prouver à partir de cette nouvelle définition que S est une représentation (unitaire) de $M'(\tilde\lambda)^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$. ■

Fin de la démonstration du théorème. Il reste à prouver le théorème pour la représentation $T^{M'}_{\tilde\lambda,\sigma}$. La situation de référence est celle de [Zuc 77, lem. 5.4 p. 304], dans laquelle M' est remplacé par M_0 et e est remplacé par un élément semi-simple régulier de M_0.

On suppose que $e\in M'$. On note $\mathcal{V}^{M'}_e$, $d^{M'}_e$ et $D^{M'}_e$ les objets analogues à $\mathcal{V}_e$, d_e et D_e attachés à M'. On choisit $\hat a\in M'(\tilde\lambda)^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ au-dessus d'un $a\in M'(\tilde\lambda)$ elliptique tel que $e\in a\,M'_0$. On lui associe $\underline{M'}$, $\pi_{\tilde\lambda}$ et π_{λ_r} comme dans la dernière proposition. On va utiliser les notations de la proposition 12.3 (a) relatives au groupe $\underline{M'}$. On introduit l'élément σ_r de $X^{irr}_{M'}(\lambda_r)$ tel que :

$$\sigma_r(\hat u)=\det(\mathrm{Ad}\,u^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{n}_{M'}}\ \sigma(\hat u)\quad\text{pour}\quad \hat u\in M'(\tilde\lambda)^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}.$$

Il vérifie: $\quad\mathrm{tr}\,T^{M'}_{\tilde\lambda,\sigma}\big|_{e\,M'_0}=\mathrm{tr}\,\sigma(\hat a)\times(\mathrm{tr}\,\pi_{\tilde\lambda})_{aM'_0}$

et $\quad\mathrm{tr}\,T^{M'}_{\lambda_r,\sigma_r}\big|_{e\,M'_0}=\mathrm{tr}\,\sigma_r(\hat a)\times(\mathrm{tr}\,\pi_{\lambda_r})_{aM'_0}$.

Pour terminer la démonstration, on remarque que compte tenu de la proposition 13.1, la proposition 12.3 va ensuite permettre de relier $\big(\mathrm{tr}\,T^{M'}_{\tilde\lambda,\sigma}\big)_e$ à $\big(\mathrm{tr}\,T^{M'}_{\lambda_r,\sigma_r}\big)_e$.

On vérifie la formule du caractère pour $\mathrm{tr}\,T^{M'}_{\tilde\lambda,\sigma}$ (sous la forme proposée dans le début de la démonstration du théorème) sur l'ouvert inclus dans $\mathfrak{m}'(e)_{ss\,reg}$ de complémentaire négligeable et sur lequel les deux membres de l'égalité sont des fonctions analytiques, formé des $X\in\mathcal{V}^{M'}_e$ tels que $e\exp X\in M'_{ss\,reg}$.

Soit $X\in\mathcal{V}^{M'}_e$ tel que $x:=e\exp X\in M'_{ss\,reg}$. On pose $\mathfrak{j}_x:=\mathfrak{m}'(x)$. Donc $\mathfrak{j}_x=\mathfrak{m}'(e)(X)\in\mathrm{Car}\,\mathfrak{m}'(e)$ (vu les dimensions) et $\mathfrak{j}:=\mathrm{C}_{\mathfrak{m}'}(\mathfrak{j}_x)\in\mathrm{Car}\,\mathfrak{m}'$. On note Γ la composante connexe de X dans $\mathfrak{j}(x)\cap\mathfrak{m}'(e)_{ss\,reg}$. Pour poursuivre le calcul, on considère un $Y\in\mathfrak{j}(x)_1$ (cf. 12.3 (b) pour $G=M'$) tel que $X+Y\in\Gamma\cap\mathcal{V}^{M'}_e$.

D'après [Bou 87, th. 5.5.3 p. 52] et grâce à 4.3 (b), la formule du caractère est acquise pour $\operatorname{tr} T^{M'}_{\lambda_r,\sigma_r}$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr}\sigma_r(\hat a)\times|D_{M'}(x\exp Y)|^{1/2}\ (\operatorname{tr}\pi_{\lambda_r})_{aM'_0}(x\exp Y)\\
=\ &|\det(1-\operatorname{Ad}e)_{\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'(e)}|^{1/2}\ |\mathcal{D}_{\mathfrak{m}'(e)}(X+Y)|^{1/2}\ \big(\operatorname{tr}T^{M'}_{\lambda_r,\sigma_r}\big)_e(X+Y)\\
\overset{(\star)}{=}\ &\mathrm{i}^{-d_e^{M'}}\,(D_e^{M'})^{-\frac12}\ |\det(1-\operatorname{Ad}e)_{\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}'(e)}|^{1/2}\sum_{\dot{\lambda'_r}\in M'(e)_0\backslash M'_0\cdot\lambda_r\cap\mathfrak{m}'(e)^*}\\
&\qquad\frac{\mathcal{O}(\widehat{e'})_{(1-\operatorname{Ad}e')(\mathfrak{m}'/\mathfrak{h})}}{\mathcal{O}(B_{\lambda_r})_{(1-\operatorname{Ad}e')(\mathfrak{m}'/\mathfrak{h})}}\ \operatorname{tr}\sigma_r(\widehat{e'})\ |\mathcal{D}_{\mathfrak{m}'(e)}(X+Y)|^{1/2}\ \widehat{\beta}_{M'(e)_0\cdot\lambda'_r}(X+Y)
\end{aligned}$$

où $g\in M'_0$ vérifie $\lambda'_r=g\lambda_r$ et $\widehat{e'}\in M'(\widetilde{\lambda})^{\mathfrak{m}'/\mathfrak{h}}$ est au-dessus de $e'=g^{-1}eg$.

On se donne $g\in M'_0$ comme ci-dessus. On note pr l'application canonique de M' dans $\mathbb{M}'(\mathbb{C})$. On associe à g un élément y^g de $\mathbb{M}'(\mathbb{C})(\operatorname{pr}(e))_0$ vérifiant $\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}=y^g\cdot(g\mathfrak{h})(e)_{\mathbb{C}}$. On fixe un système de racines positives $R^+(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})$ de $R(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})$. D'après la proposition 2.6 (b), il existe des nombres complexes c_w^g indépendants de Y et indexés par les $w\in W(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})$ tels qu'on ait

$$\prod_{\alpha\in R^+(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})}\alpha(X+Y)\times\widehat{\beta}_{M'(e)_0\cdot g\lambda_r}(X+Y)\overset{(\star\star)}{=}\sum_{w\in W(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})}c_w^g\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy^g g\lambda_r(X+Y)}$$

et
$$\prod_{\alpha\in R^+(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})}\alpha(X)\times\widehat{\beta}_{M'(e)_0\cdot(g\tilde\lambda)[e]}(X)=\sum_{w\in W(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})}c_w^g\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy^g g\lambda(X)}$$

quand $(g\widetilde{\lambda})[e]\in\widetilde{\mathfrak{m}'(e)}^*_{reg}$, et $\displaystyle\sum_{w\in W(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})}c_w^g\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy^g g\lambda(X)}=0$ si $(g\widetilde{\lambda})[e]\notin\widetilde{\mathfrak{m}'(e)}^*_{reg}$.

En outre, la fonction $|\mathcal{D}_{\mathfrak{m}'(e)}|^{1/2}\times\Big(\prod_{\alpha\in R^+(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})}\alpha\Big)^{-1}$ sur Γ est à valeurs dans l'ensemble des racines quatrièmes de l'unité, donc constante. On déduit des égalités $(\star)$ et $(\star\star)$ une formule pour $\operatorname{tr}\sigma_r(\hat a)\times(\operatorname{tr}\pi_{\lambda_r})_{aM'_0}(x\exp Y)$ qui fait intervenir cette constante.

D'après la proposition 8.4 (a), la représentation π_{λ_r} de $\underline{M'}$ admet pour caractère infinitésimal $\chi^{U\mathfrak{m}'_{\mathbb{C}}}_{\mathrm{i}\,\lambda_r}$. On applique la proposition 12.3 (c) à $\underline{M'}$ avec $\pi=\pi_{\lambda_r}$, $\Lambda=\mathrm{i}\,\lambda_r$ et $\Lambda_F=-2\rho$ (π_F ci-dessous). On dispose d'une représentation $(\pi_{\lambda_r})_{Zuc}$ de $\underline{M'}$ et, vu ce qui précède, d'une formule pour $\operatorname{tr}\sigma_r(\hat a)\times(\operatorname{tr}(\pi_{\lambda_r})_{Zuc})_{aM'_0}(x\exp Y)$. Par la proposition 13.1 (b), on a aussi $\operatorname{tr}(\pi_{\lambda_r})_{Zuc}=\operatorname{tr}\pi_{\tilde\lambda}$ par choix de π_F.

On choisit maintenant $Y=0$, et récapitule. On constate que $\big(\operatorname{tr}T^{M'}_{\tilde\lambda,\sigma}\big)_e(X)$ se déduit de l'expression de $\big(\operatorname{tr}T^{M'}_{\lambda_r,\sigma_r}\big)_e(X)$ obtenue ci-dessus, en remplaçant le coefficient $c_w^g\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy^g g\,\lambda_r(X)}$ par $(\det(\operatorname{Ad}a^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{n}_{M'}})^{-1}\times\underline{x}_{\,l_F}\ c_w^g\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,wy^g g\,\lambda_r(X)}$ pour chaque $w\in W(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})$, où $l_F:=-2\,wy^g g\,\rho$.

Soit $w\in W(\mathfrak{m}'(e)_{\mathbb{C}},\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}})$. On va calculer le terme $\underline{x}_{\,l_F}$ qui lui est associé. On se donne un représentant $\widetilde{w}$ de w dans $\mathbb{M}'(\mathbb{C})(\operatorname{pr}(e))_0$. On note $\underline{M'}_{\mathbb{C}}$ le produit semi-direct de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{M}'(\mathbb{C})_0$ tel que $1\in\mathbb{Z}$ agisse sur $\mathbb{M}'(\mathbb{C})_0$ par $\operatorname{int}\operatorname{pr}(a)$, et $\underline{\operatorname{pr}}$ l'application canonique de $\underline{M'}$ dans $\underline{M'}_{\mathbb{C}}$. Il existe une unique représentation holomorphe $\pi_{F,\mathbb{C}}$ de $\underline{M'}_{\mathbb{C}}$ dans F telle que $\pi_F=\pi_{F,\mathbb{C}}\circ\underline{\operatorname{pr}}$. On fixe un vecteur non nul v_0 de F de poids -2ρ pour l'action de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ dans F. On s'intéresse au vecteur non nul $\widetilde{w}y^g g\cdot v_0$ de F qui a pour poids l_F sous l'action de $\mathfrak{j}(x)_{\mathbb{C}}$. On pose encore $e'=g^{-1}eg$. En se plaçant dans le produit semi-direct de $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{M}'(\mathbb{C})$ au moyen de $\operatorname{int}\operatorname{pr}(a)$ et utilisant la définition de $\underline{x}$ (cf. 12.3 (c)), on obtient :

$$\begin{aligned}
\underline{\operatorname{pr}}(\underline{x})\,\widetilde{w}y^g\operatorname{pr}(g)&=\operatorname{pr}(x)\,\widetilde{w}y^g\operatorname{pr}(g)\operatorname{pr}(a)^{-1}\,\underline{\operatorname{pr}}(\underline{a})\\
&=\operatorname{pr}(\exp X)\,\widetilde{w}y^g\operatorname{pr}(g)\operatorname{pr}(e'a^{-1})\,\underline{\operatorname{pr}}(\underline{a})
\end{aligned}$$

puis $\underline{x} \cdot (\widetilde{w} y^g g \cdot v_0) = \exp X \cdot (\widetilde{w} y^g g \cdot ((e' a^{-1}) \cdot v_0))$.
La propriété $e'a^{-1} \in M_0'(\widetilde{\lambda}) = \exp \mathfrak{h}$ permet d'en déduire que :

$$\underline{x}_{\,l_F} = \det(\mathrm{Ad}\, a^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{n}_{M'}} \, (\det(\mathrm{Ad}\, e'^{\mathbb{C}})_{\mathfrak{n}_{M'}})^{-1} \, \mathrm{e}^{-2\, w y^g g\, \rho(X)} .$$

Cela permet de conclure. □

Index des notations

Références

[ABV 92] Adams, J., D. Barbasch, and D. A. Vogan, "The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups," Birkhäuser, Boston, 1992.

[B.. 72] Bernat, P., N. Conze, M. Duflo, M. Lévy-Nahas, M. Raïs, P. Renouard, et M. Vergne, "Représentations des groupes de Lie résolubles," Dunod, Paris, 1972.

[BW 80] Borel, A., and N. Wallach, "Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups," Annals of Math. Studies 94, Princeton University Press, 1980. Seconde édition : Math. Surveys 67, Amer. Math. Soc., 2000.

[Bou 84] Bouaziz, A., *Sur les représentations des groupes de Lie réductifs non connexes*, Math. Ann. **268** (1984), 539–555.

[Bou 87] —, *Sur les caractères des groupes de Lie réductifs non connexes*, J. Funct. Anal. **70** (1987), 1–79.

[B 67] Bourbaki, N., "Théories spectrales," Hermann, Paris, 1967.

[Cha 96] Charbonnel, J.-Y., *Orbites fermées et orbites tempérées, II*, J. Funct. Anal. **138** (1996), 213–222.

[Cow 88] Cowling, M., *On the characters of unitary representations*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **45** (1988), 62–65.

[Dix 64] Dixmier, J., "Les C* algèbres et leurs représentations," Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[Dix 69] —, *Sur la représentation régulière d'un groupe localement compact connexe*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **2** (1969), 423–436.

[Duf 82a] Duflo, M., *Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie*, In: "Harmonic analysis and group representations," Cours d'été du C.I.M.E., Cortona 1980, Liguori, Naples, 1982, 129–221

[Duf 82b] —, *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Acta Math. **149** (1982), 153–213.

[Duf 84] —, *On the Plancherel formula for almost algebraic real Lie groups*, In: "Lie group representations III," Lect. Notes in Math. **1077**, Springer-Verlag, Berlin etc., 1984, 101–165.

[DHV 84] Duflo, M., G. Heckman, et M. Vergne, *Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **15** (1984), 65–128.

[DV 88] Duflo, M., et M. Vergne, *La formule de Plancherel des groupes de Lie semi-simples réels*, In: "Representations of Lie groups," numéro 14 in Adv. Stud. Pure Math., Academic Press, 1988, 289–336.

[DV 93] —, *Cohomologie équivariante et descente*, Astérisque **215** (1993), 5–108.

[Har 65] Harish-Chandra, *Discrete series for semisimple Lie groups I. Construction of invariant eigendistributions*, Acta Math. **113** (1965), 241–318.

[Har 76] —, *Harmonic analysis on real reductive groups III. The Maass-Selberg relations and the Plancherel formula*, Ann. of Math. **104** (1976), 117–201.

[Her 83] Herb, R. A., *Discrete series characters and Fourier inversion on semisimple real Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 241–262.

[Hoc 65] Hochschild, G., "The Structure of Lie Groups," Holden-Day, San Francisco 1965.

[Kna 86] Knapp, A. W., "Representation Theory of Semisimple Groups," Princeton University Press, 1986.

[Kna 96] —, "Lie Groups beyond an Introduction," Birkhäuser, Boston, 1996.

[KV 95] Knapp, A. W., and D. A. Vogan, "Cohomological Induction and Unitary Representations," Princeton University Press, 1995.

[KZ 82] Knapp, A. W., and G. J. Zuckerman, *Classification of irreductible tempered representations of semisimple groups*, Ann. of Math. **116** (1982), 389–501. (Typesetter's correction: Ann. of Math. **119** (1984), 639).

[Kos 59] Kostant, B., *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, Amer. J. Math., **81** (1959), 973–1032.

[Mac 58] Mackey, G. W., *Unitary representations of group extension I*, Acta Math. **99** (1958), 265–311.

[Ran 72] Ranga Rao, R., *Orbital integrals in reductive groups*, Ann. of Math., **96** (1972), 505–510.

[Ros 80] Rossmann, W., *Limit characters of reductive Lie groups*, Invent. Math. **61** (1980), 53–66.

[Ros 82] —, *Limit orbit in reductive Lie algebras*, Duke Math. J. **49** (1982), 215–229.

[Spr 66] Springer, T. A., *Some arithmetical results on semi-simple Lie algebras*, Inst. Hautes Études Sci. **30** (1966), 115–141.

[Var 77] Varadarajan, V. S., "Harmonic analysis on real reductive groups," Lect. Notes in Math. **576**, Springer-Verlag, Berlin etc., 1977.

[Ver 94] Vergne, M., *Geometric quantization and equivariant cohomology*, In: "First European Congress of Mathematics I, Paris 1992," Progr. Math. **119**, Birkhaüser, Boston, 1994, 249–295.

[Wal 88] Wallach, N., "Real Reductive Groups I," Academic Press, New York etc., 1988.

[Zuc 77] Zuckerman, G., *Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **106** (1977), 295–308.

Jean-Yves Ducloux
Université Paris 7
UFR de Mathématiques, UMR 7586
2 place Jussieu,
F-75251 Paris Cedex 05, France
ducloux@math.jussieu.fr

Received September 22, 2000
and in final form June 28, 2001