Journal of Lie Theory
Volume **12** (2002) 325–356

Algèbre de Lie nilpotente graduée de rang 3 et inverse d'un opérateur différentiel

Maxime Gouleau

Communicated by Jean Ludwig

Résumé. Dans le cadre d'une algèbre $\mathcal{G}$ nilpotente graduée de rang 3, nous établissons d'abord quelques résultats algébriques et topologiques d'une transformation de Fourier introduite par N.J. Wildberger [13] sur un groupe de Lie nilpotent général. Ensuite, si P est un opérateur différentiel homogène invariant à gauche sur le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ une représentation unitaire irréductible de ce groupe, nous contruisons, sous une hypothèse d'homéomorphisme linéaire, une paramétrix de l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$. Sous une deuxième hypothèse plus forte d'homéomorphisme linéaire, nous construisons un inverse exact de $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$. Cet inverse est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est dans une classe de R. Beals.

Introduction

Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie réelle nilpotente et G le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathcal{G}$, l'application exponentielle est un difféomorphisme global de $\mathcal{G}$ sur G et nous identifierons dans la suite le groupe G avec l'algèbre $\mathcal{G}$.

L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est graduée de rang r si $\mathcal{G}$ est la somme directe de sous-espaces $\mathcal{G}_i, 1 \leq i \leq r$, tels que $[\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] \subset \mathcal{G}_{i+j}$ avec $\mathcal{G}_{i+j} = \{0\}$ si $i + j > r$.

Si l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est graduée de rang r et si P est un opérateur différentiel homogène invariant à droite sur le groupe $\mathcal{G}$ qui vérifie la condition de Rockland, c'est-à-dire tel que pour toute représentation unitaire irréductible π de $\mathcal{G}$, l'opérateur $\pi(P)$ est injectif dans l'espace de Schwartz de la représentation π, Melin construit dans [10] une paramétrix de $\pi(P)$ après avoir développé un calcul symbolique utilisant la transformation de Fourier classique.

Également dans le cas du groupe de Heisenberg, Melin donne dans [11] une version sous forme de paramétrix des résultats de Geller [5] et dans le cas d'un groupe de Lie nilpotent homogène, Christ, Geller, GLowacki et Polin développent dans [4] un calcul pseudo-différentiel sur le groupe et, généralisant la condition de Rockland, ces auteurs donnent un critère général d'existence d'une paramétrix.

Dans la suite, nous supposons que l'algèbre est graduée et nous considérons $\xi \in \mathcal{G}^*$ tel que l'orbite $O(\xi)$ dans la représentation coadjointe de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$ soit

ISSN 0949–5932 / $2.50

en position générale. Si $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{G}$ maximale subordonnée à ξ ($<\xi,[\mathcal{H},\mathcal{H}]>=\{0\}$), nous notons $\pi_{(\xi,\mathcal{H})}$ la représentation unitaire de $\mathcal{G}$ induite par la représentation $h\mapsto e^{i<\xi,h>}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{C}$, d'après [8] la représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H})}$ est irréductible .

Si $\mathcal{G}$ est graduée de rang $r=2$ et φ appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathcal{G})$, alors l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H})}(\varphi)$ a un noyau qui ne dépend que de la restriction de la transformée de Fourier ordinaire $\hat{\varphi}$ à l'orbite $O(\xi)$ de ξ dans la représentation coadjointe de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$. Si $r\geq 3$, le même résultat est obtenu en remplaçant la transformée de Fourier ordinaire par une transformée de Fourier introduite par Wildberger dans [13]. Cette transformée de Fourier utilise le calcul de Weyl (voir [7]) pour composer des symboles définis sur l'orbite $O(\xi)$.

Dans notre article, nous nous limitons au cas où l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est graduée de rang 3.

Au premier paragraphe, nous construisons une sous-algèbre $\mathcal{H}_\xi$ subordonneé à ξ maximale et nous réalisons explicitement la représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ de $\mathcal{G}$ dans un espace $L^2(X)$ (où X est un certain sous-espace supplémentaire de $\mathcal{H}_\xi$ dans l'algèbre $\mathcal{G}$), nous en déduisons une carte $\theta_\xi(x,p),(x,p)\in\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^q$, de $O(\xi)$. L'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi)$ a alors un noyau qui ne dépend que de la restriction de la transformée de Fourier au sens de Wilbberger $\mathcal{F}^W\varphi$ à l'orbite $O(\xi)$ (voir (1.18)).

Aux deux paragraphes suivants, à partir de la carte $\theta_\xi(x,p)$ nous introduisons des fonctions poids $\Phi(x,p),\phi(x,p)$ au sens de Beals [2],[3]. Ces fonctions poids permettent de définir une métrique de Hormander [7] et des classes de symboles $S^{m'}(O(\xi)),m'\in\mathbb{R}$, adaptées à l'étude d'un opérateur sur $\mathbb{R}^q$ de la forme $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ où P est un opérateur homogène appartenant à l'algèbre enveloppante complexifiée $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

À l'aide du calcul symbolique sur l'orbite nous prouvons le résultat suivant (Théorème 3.5):

Théorème. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie graduée de rang 3, $P\in\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ tel que $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ soit un homéomorphisme linéaire de $\mathrm{H}^m_{\pi_\xi}(X)$ sur $L^2(X)$ et σ_P le symbole de P. Il existe $q\in S^{-m}(O(\xi))$ et $r\in S^{0,-\infty}(O(\xi))$ tels que*

$$\sigma_{P,\xi}\#q=1+r \quad \textit{où} \qquad \sigma_{P,\xi}(x,p)=\sigma_P(\theta_\xi(-x,p)).$$

Dans cet énoncé, $\sigma_{P,\xi}$ est le symbole de Weyl de l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ (voir la proposition 2.1) et la composition $\sigma_{P,\xi}\#q$ des deux symboles $\sigma_{P,\xi}$ et q définis sur l'orbite $O(\xi)$ est donnée par le calcul symbolique de Weyl.

En supposant de plus que l'opérateur P vérifie l'hypothèse (H), c'est-à-dire si pour tout s de $\mathbb{N}$, l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ est un homéomorphisme linéaire de $\mathrm{H}^{s+m}_{\pi_\xi}(X)$ sur $\mathrm{H}^s_{\pi_\xi}(X)$, nous contruisons aux deux derniers paragraphes un inverse de l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$, plus précisément nous démontrons le théorème suivant (Théorème 6.10):

Théorème. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie graduée de rang 3. Si $P\in\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie l'hypothèse* (H)*, alors nous pouvons trouver un symbole $q\in S^{-m}(O(\xi))$ tel que :*

$$\sigma_{P,\xi}\#q=1 \qquad \textit{où} \qquad \sigma_{P,\xi}(x,p)=\sigma_P(\theta_\xi(-x,p)).$$

Si $\mathcal{G}$ est graduée de rang $r > 3$, l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ peut encore s'exprimer sous la forme (2.3) qui suit et permet d'envisager l'introduction d'un calcul symbolique par orbite.

1. Transformation de Fourier (au sens de Wildberger) et représentation unitaire irréductible $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$

Lemme 1.1. *Posons $n_i = \dim \mathcal{G}_i$, $1 \le i \le 3$, $n = \dim \mathcal{G}$ et notons:*
- B_ξ la forme bilinéaire définie sur $\mathcal{G}$ par

$$B_\xi(\alpha,\beta) = \langle \xi, [\alpha,\beta]\rangle,$$

- $2q$ le rang de B_ξ,
- $\mathcal{N}_1$ le sous-espace de $\mathcal{G}_1$ défini par:

$$\mathcal{N}_1 = \{\alpha \in \mathcal{G}_1 \mid \text{ la forme linéaire } \xi \circ \operatorname{ad}\alpha \text{ s'annule sur } \mathcal{G}_2\},$$

- $\mathcal{S}_1$ un sous-espace de $\mathcal{G}_1$ supplémentaire de $\mathcal{N}_1$.
- $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n'_1}\}$ une base de $\mathcal{S}_1$.
Avec ces données, nous avons $q \le n_1$ et il existe une suite libre de vecteurs $(e_{n'_1+1}, e_{n'_1+2}, \ldots, e_{n_1})$ de $\mathcal{N}_1$, une suite libre de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_q)$ de $\mathcal{G}$ vérifiant:

i) $\langle \xi, [u_i, e_j]\rangle = -\delta_{ij}, 1 \le i,j \le q$ *;*

ii) *Si nous posons $X \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$, $Y \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{Vect}(e_{q+1}, e_{q+2}, \ldots, e_{n_1})$, $\mathcal{H}_\xi \overset{\text{déf}}{=} Y \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$, alors $\mathcal{G} = X \oplus \mathcal{H}_\xi$ où $\mathcal{H}_\xi$ est un idéal de $\mathcal{G}$ subordonné à ξ maximal;*

iii) *$u_j \in \mathcal{G}_2$ si $1 \le j \le n'_1$ et $u_j \in \mathcal{H}_\xi$ si $1 \le j \le q$.*

Démonstration. Soit $\{f_{n'_1+1}, f_{n'_1+2}, \ldots, f_{n_1}\}$ une base de $\mathcal{N}_1$. L'application $\mathcal{S}_1 \to \mathcal{G}_2^*, \alpha \mapsto \xi \circ \operatorname{ad}\alpha|_{\mathcal{G}_2}$ est linéaire et injective, donc les formes linéaires $\ell_j = \xi \circ \operatorname{ad} e_j|_{\mathcal{G}_2}, 1 \le j \le n'_1$ forment une suite libre dans $\mathcal{G}_2^*$ que l'on peut compléter pour obtenir une base $\mathcal{B}^* = \{\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{n'_1}, \ell_{n'_1+1}, \ldots, \ell_{n_2}\}$ de $\mathcal{G}_2^*$.
Il existe alors une base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n'_1}, v_{n'_1+1}, \ldots, v_{n_2}\}$ de $\mathcal{G}_2$ dont la base duale est $\mathcal{B}^*$. Nous obtenons $\langle \xi, [u_j, e_k]\rangle = -\delta_{jk}, 1 \le j,k \le n'_1$ et $\langle \xi, [e_k, v_\ell]\rangle = 0, 1 \le k \le n'_1, n'_1+1 \le \ell \le n_2$.
Soit le sous-espace $E = \mathcal{S}_1 \oplus \operatorname{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_{n'_1})$. L'orthogonal $E^\perp$ de E dans $\mathcal{G}$ pour B_ξ est un sous-espace supplémentaire de E dans $\mathcal{G}$ donné par $E^\perp = F \oplus \operatorname{Vect}(v_{n'_1+1}, v_{n'_1+2}, \ldots, v_{n_2}) \oplus \mathcal{G}_3$ où $F = \operatorname{Vect}(\tilde f_{n'_1+1}, \tilde f_{n'_1+2}, \ldots, \tilde f_{n_1})$ avec $\tilde f_j = f_j + \sum_{k=1}^{n'_1} \langle \xi, [f_j, e_k]\rangle u_k, n'_1+1 \le j \le n_1$. La restriction B_ξ^F de B_ξ à F est de rang $2q - 2n'_1$ et nous pouvons trouver une base $(w_j)_{1 \le j \le n_1 - n'_1}$ de F dont la base duale $(w_j^*)_{1 \le j \le n_1 - n'_1}$ dans F^* vérifie:

$$B_\xi^F = w_1^* \wedge w_{q-n'_1+1}^* + w_2^* \wedge w_{q-n'_1+2}^* + \cdots + w_{q-n'_1}^* \wedge w_{2q-2n'_1}^*.$$

Soit p la projection de $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$ sur $\mathcal{G}_1$ sur parallèlement à $\mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$ et posons:

$$e_{n_1'+j} \stackrel{\text{déf}}{=} p(w_j), 1 \leq j \leq n_1 - n_1', u_{n_1'+k} \stackrel{\text{déf}}{=} w_{q-n_1'+k}, 1 \leq k \leq q - n_1' .$$

Avec ces définitions, la sous-algèbre $\mathcal{H}_\xi$ est subordonnée à ξ, de plus étant de dimension $n - q$, elle est maximale. ∎

En adaptant une méthode décrite dans Helffer-Nourrigat ([6]), nous réalisons la représentation induite $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ dans un espace $L^2(X)$, puis nous en déduisons une expression d'une carte $\theta_\xi(x,p)$ de l'orbite $O(\xi)$ de ξ dans $\mathcal{G}^*$ et explicitons la transformée de Fourier $\mathcal{F}^W\varphi$ au sens de Wildberger [13] d'une fonction φ de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$. Le calcul de Weyl (voir par exemple [7]) donne ensuite une expression des opérateurs $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\beta), \beta \in \mathcal{G}$ et $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi), \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, en fonction de $\mathcal{F}^W\varphi$ et $\theta_\xi(x,p)$ (proposition 1.8). Établissons d'abord deux lemmes:

Lemme 1.2. *Soient $e_{\ell_1}, e_{\ell_2}, \ldots, e_{\ell_k}$, k vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{G}_1$ et l'application*

$$\gamma_k : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{G} \ , \ t = (t_1, t_2, \ldots, t_k) \longmapsto \gamma_k(t) = (t_1 e_{\ell_1})(t_2 e_{\ell_2}) \ldots (t_k e_{\ell_k}),$$

où $\gamma_k(t)$ est le produit dans le groupe $\mathcal{G}$ de $t_1 e_{\ell_1}, t_2 e_{\ell_2}, \ldots, t_k e_{\ell_k}$.

Si, pour $u \in \mathbb{R}^k$, nous définissons une application $A_k(u) : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathcal{G}$ par

$$A_k(u).v = \frac{d}{ds}\gamma_k(u+sv)[\gamma_k(u)]^{-1}\Big|_{s=0} \ , \tag{1.1}$$

alors $A_k(u)$ est linéaire et a pour expression, pour $v \in \mathbb{R}^k$,

$$\begin{aligned} A_k(u).v = v_1 e_{\ell_1} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} u_1 e_{\ell_1}} .v_2 e_{\ell_2} + \mathrm{e}^{\operatorname{ad} u_1 e_{\ell_1}} \circ \mathrm{e}^{\operatorname{ad} u_2 e_{\ell_2}} .v_3 e_{\ell_3} + \cdots + \\ \mathrm{e}^{\operatorname{ad} u_1 e_{\ell_1}} \circ \mathrm{e}^{\operatorname{ad} u_2 e_{l_2}} \circ \cdots \circ \mathrm{e}^{\operatorname{ad} u_{k-1} e_{\ell_{k-1}}} .v_k e_{\ell_k}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Démonstration. Par récurrence sur k. La propriété (1.2) est vraie pour $k = 1$, supposons qu'elle soit vraie pour k. Posons

$$\varphi(s) = \tilde{\gamma}_k(u_2 + sv_2, \ldots, u_{k+1} + sv_{k+1})[\tilde{\gamma}_k(u_2, \ldots, u_{k+1})]^{-1} ,$$

où

$$\tilde{\gamma}_k(t_2, \ldots, t_{k+1}) = (t_2 e_{\ell_2})(t_3 e_{\ell_3}) \ldots (t_{k+1} e_{\ell_{k+1}}) \ , \ (t_2, \ldots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^k.$$

Nous pouvons écrire

$$\gamma_{k+1}(u+sv)[\gamma_{k+1}(u)]^{-1} = \big(((u_1 + sv_1)e_{\ell_1})(-u_1 e_{\ell_1})\big)\big((u_1 e_{\ell_1})\varphi(s)(u_1 e_{\ell_1})^{-1}\big).$$

En dérivant par rapport à s à l'origine, nous obtenons que la propriété est vraie pour $k+1$. ∎

A l'orbite $O(\xi)$ en position générale correspond une représentation unitaire irréductible du groupe $\mathcal{G}$. A une équivalence unitaire près, cette représentation peut être déterminée comme une représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ de $\mathcal{G}$ dans $L^2(\mathbb{R}^q)$ induite par une représentation scalaire de $\mathcal{H}_\xi$.

Notons $S' = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_q\}$ une suite obtenue à partir d'un réarrangement de la suite $(1, 2, \dots, q)$. L'application $\mathcal{H}_\xi \times \mathbb{R}^q \mapsto \mathcal{G}$ donnée par

$$(h, (t_1, t_2, \dots, t_q)) \longmapsto h\gamma(t) \quad \text{où} \quad \gamma(t) = (t_1 e_{\ell_1})(t_2 e_{\ell_2}) \dots (t_q e_{\ell_q})$$

est un difféomorphisme global, l'image de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{H}_\xi \times \mathbb{R}^q$ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{G}$. Ce difféomorphisme permet de définir une action à droite de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{R}^q$, $(t, a) \mapsto \sigma(t, a)$ telle que

$$\gamma(t)a = h(t, a)\gamma(\sigma(t, a)). \tag{1.3}$$

Pour définir la représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ du groupe $\mathcal{G}$ induite par la représentation $h \mapsto \mathrm{e}^{i\langle \xi, h\rangle}$ du sous groupe $\mathcal{H}_\xi$ dans $\mathbb{C}$, nous introduisons l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\xi$ des fonctions définies sur $\mathcal{G}$, à valeurs complexes, ayant les deux propriétés suivantes:

i) $\forall h \in \mathcal{H}_\xi, \forall g \in \mathcal{G}, f\,(hg) = \mathrm{e}^{i\langle \xi, h\rangle} f\,(g)$.

ii) La fonction $\varphi(x) = |f(g)|^2$ où x désigne la classe de g dans $\mathcal{H}_\xi \setminus \mathcal{G}$ (pour toute fonction f vérifiant i), $|f(g)|^2$ ne dépend que de x), vérifie

$$\int_{\mathcal{H}_\xi \setminus \mathcal{G}} \varphi(x)\, dx < +\infty .$$

L'espace $\mathcal{E}$ est muni du produit scalaire $(f_1, f_2) = \int_{\mathcal{H}_\xi \setminus \mathcal{G}} (f_1(g), f_2(g))\, dx$ et la représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{E}$ est définie par :

$$\forall f \in \mathcal{E}, \forall g \in \mathcal{G}, \forall a \in \mathcal{G} \quad \left[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(a) f\right](g) = f(ga). \tag{1.4}$$

Pour le produit scalaire ci-dessus, la représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ est unitaire. D'après (1.3), (1.4) et la propriété i), nous avons:

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{E}, \forall t \in \mathbb{R}^q, \forall a \in \mathcal{G} \quad \left[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(a) f\right]\big(\gamma(t)\big) &= f(\gamma(t)a) \\ &= \mathrm{e}^{i\langle \xi, h(t,a)\rangle} (f \circ \gamma)\big(\sigma(t, a)\big). \end{aligned} \tag{1.5}$$

La dernière égalité nous permet de considérer que la représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ est définie dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^q)$ de la manière suivante:

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^q), \forall t \in \mathbb{R}^q, \forall a \in \mathcal{G} \quad \left[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(a) f\right](t) = \mathrm{e}^{i\langle \xi, h(t,a)\rangle} f(\sigma(t, a)). \tag{1.6}$$

En notant pr_2 la projection de $\mathcal{G} = \mathcal{H}_\xi \oplus X$ sur X parallèlement à $\mathcal{H}_\xi$, puis pour $a \in \mathcal{G}$, $\mathrm{pr}_2(a) = \sum_{k=1}^q a_k e_{l_k}$, nous avons $\sigma(t, a) = (t_1 + a_1, t_2 + a_2, \dots, t_q + a_q)$. La différentielle de la représentation $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ est alors l'opérateur

$$\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(a) = i\langle \xi, h'(t, a)\rangle + \sum_{k=1}^q a_k \frac{\partial}{\partial t_k},$$

où, par définition $h'(t, a) = \frac{d}{ds} h(t, sa)|_{s=0}$.

L'expression de $h'(t, a)$ dépend de l'appartenance de a à $\mathcal{H}_\xi$ ou X et découle du lemme 1.2 ci-dessus.

Lemme 1.3. *Avec les notations ci-dessus, nous avons pour $a \in \mathcal{H}_\xi$*

$$h'(t,a) = \mathrm{e}^{\operatorname{ad}\gamma(t)}.a\,, \tag{1.7}$$

et pour $a \in X$

$$h'(t,a) = [\gamma(t),a] + \frac{1}{2}\big[\gamma(t),[\gamma(t),a]\big] - \mathrm{pr}_1\big\{a_1e_{\ell_1} + e^{\operatorname{ad}t_1e_{\ell_1}}.a_2e_{\ell_2} + \\ + e^{\operatorname{ad}t_1e_{\ell_1}} \circ e^{\operatorname{ad}t_2e_{\ell_2}}.a_3e_{\ell_3} + \cdots + e^{\operatorname{ad}t_1e_{\ell_1}} \circ e^{\operatorname{ad}t_2e_{\ell_2}} \circ \cdots \circ e^{\operatorname{ad}t_{q-1}e_{\ell_{q-1}}}.a_qe_{\ell_q}\big\}\,, \tag{1.8}$$

où pr_1 est la projection de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{H}_\xi$ parallèlement à X.

Démonstration. D'après (1.3), nous avons

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \mathrm{e}^{\operatorname{ad}\gamma(t)}\cdot sa = \gamma(t)(sa)\big[\gamma(t)\big]^{-1} = h(t,sa)\gamma\big(\sigma(t,sa)\big)\big[\gamma(t)\big]^{-1}.$$

En dérivant par rapport à s à l'origine, nous obtenons

$$\mathrm{e}^{\operatorname{ad}\gamma(t)}.a = h'(t,a) + A_q(t).(a_1,a_2,\cdots,a_q)\,.$$

Cette relation donne ensuite (1.7) et (1.8). ∎

Le symbole complet de l'opérateur différentiel $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(a)$ est

$$\sigma(t;\xi,p,a) = i\Big(\langle \xi, h'(t,a)\rangle + \sum_{k=1}^{q} a_kp_k\Big)\,.$$

Ce symbole donne une carte $\theta_\xi(x,p)$ de l'orbite $O(\xi)$:

Proposition 1.4. *Une carte $\mathbb{R}^{2q} \mapsto \mathcal{G}^*$, $(x,p) \mapsto \theta_\xi(x,p)$ de l'orbite $O(\xi)$ de ξ dans $\mathcal{G}^*$ est donnée par:*

$$\forall a \in \mathcal{G}, \langle \theta_\xi(x,p),a\rangle = \frac{1}{i}\sigma(-x;\xi,p,a) \qquad \text{où} \qquad x = (x_1,x_2,\ldots,x_q) \tag{1.9}$$

c'est à dire

$$\forall a \in \mathcal{H}_\xi\,,\ \langle \theta_\xi(x,p),a\rangle = \langle \xi \circ \mathrm{e}^{\operatorname{ad}\gamma(-x)},a\rangle \tag{1.10}$$

$$\forall a = \sum_{k=1}^{q} a_ke_{\ell_k} \in X\,,\ \langle \theta_\xi(x,p),a\rangle = \sum_{k=1}^{q} a_kp_k + \langle \xi \circ \mathrm{e}^{\operatorname{ad}\gamma(-x)},a\rangle - \\ \langle \xi, a_1e_{\ell_1} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}x_1e_{\ell_1}}.a_2e_{\ell_2} + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}x_1e_{\ell_1}} \circ \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}x_2e_{\ell_2}}.a_3e_{l_3} + \\ \cdots + \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}x_1e_{\ell_1}} \circ \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}x_2e_{\ell_2}} \circ \cdots \circ \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}x_{q-1}e_{\ell_{q-1}}}.a_qe_{\ell_q}\rangle\,. \tag{1.11}$$

Proposition 1.5. *Dans le cas où la suite $(e_{\ell_k})_{1\le k\le q}$ est :*

$$e_{\ell_1} = e_{n'_1+1}\,,\ e_{\ell_2} = e_{n'_1+2}\,,\ \ldots\,,\ e_{\ell_{q-n'_1}} = e_q, \\ e_{\ell_{q-n'_1+1}} = e_1\,,\ e_{\ell_{q-n'_1+2}} = e_2\,,\ \ldots\,,\ e_{\ell_q} = e_{n'_1}, \tag{1.12}$$

une carte $\mathbb{R}^{2q} \mapsto \mathcal{G}^*$, $(x,p) \mapsto \theta_\xi(x,p)$ *de l'orbite* $O(\xi)$ *de* ξ *dans* $\mathcal{G}^*$ *est donnée par :*

$$\forall u \in \mathcal{H}_\xi \quad \langle \theta_\xi(x,p), u\rangle = \Big\langle \xi \circ \mathrm{e}^{-\sum_{\sigma=1}^{q} x_\sigma \,\mathrm{ad}\, e_{\ell_\sigma}}, u\Big\rangle = \langle \xi, u\rangle - $$
$$- \sum_{\sigma=1}^{q} x_\sigma \langle \xi, [e_{\ell_\sigma}, u]\rangle + \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\tau=q-n'_1+1}^{q} x_\sigma x_\tau \langle \xi, \big[e_{\ell_\sigma}, [e_{\ell_\tau}, u]\big]\rangle. \tag{1.13}$$

$$\forall k \in [1,q] \quad \langle \theta_\xi(x,p), e_{\ell_k}\rangle = p_k - \sum_{\sigma=k+1}^{q} x_\sigma \langle \xi, [e_{\ell_\sigma}, e_{\ell_k}]\rangle +$$
$$+ \sum_{\substack{q-n'_1+1\le\sigma<\tau\le q\\ \tau>k}} x_\sigma x_\tau \langle \xi, \big[e_{\ell_\sigma}, [e_{\ell_\tau}, e_{\ell_k}]\big]\rangle + \sum_{\substack{\sigma=k+1\\ q-n'_1+1\le\sigma}}^{q} \frac{x_\sigma^2}{2} \langle \xi, \big[e_{\ell_\sigma}, [e_{\ell_\sigma}, e_{\ell_k}]\big]\rangle. \tag{1.14}$$

Dans la suite de cet article, nous considérons uniquement la carte parti-culière donnée par (1.13) et (1.14). A partir de cette carte, nous pouvons calculer le symbole de Weyl $\exp^* i\langle \eta, \beta\rangle$ de l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\beta)$ donné par (1.6), et définir la transformée de Fourier (par orbite) correspondante, comme dans [13].

Proposition 1.6. *Le symbole de Weyl* $\exp^* i\langle\theta_\xi(-x,p),\beta\rangle$ *de l'opérateur* $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\beta), \beta \in \mathcal{G}$*, est donné par:*

$$\exp^* i\langle\theta_\xi(-x,p),\beta\rangle = \mathrm{e}^{i\langle\theta_\xi(-x,p),\beta\rangle} \times$$
$$\mathrm{e}^{-i\left\langle \xi_3, \frac{\beta_{n'_1} e_{n'_1}}{2} \frac{\beta_{n'_1-1} e_{n'_1-1}}{2} \cdots \frac{\beta_1 e_1}{2} \left(\sum_{k=n'_1+1}^{n_1} \beta_k e_k\right) \frac{\beta_1 e_1}{2} \cdots \frac{\beta_{n'_1-1} e_{n'_1-1}}{2} \frac{\beta_{n'_1} e_{n'_1}}{2} \right\rangle}, \tag{1.15}$$

où $\beta = \beta_{\mathcal{G}_2\oplus\mathcal{G}_3} + \sum_{k=1}^{n_1} \beta_k e_k$.

Démonstration. D'après (1.10) et (1.11), l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\beta)$ s'écrit, pour $f \in \mathcal{E}_\xi$ telle que $f\circ\gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$ et pour $\beta = \beta_{\mathcal{H}_\xi} + \beta_X$ où $\beta_{\mathcal{H}_\xi} = \beta_{\mathcal{G}_2\oplus\mathcal{G}_3} + \sum_{j=q+1}^{n_1} \beta_j e_j$ et $\beta_X = \sum_{k=1}^{q} \beta_{\ell_k} e_{\ell_k}$:

$$\big[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\beta) f\big]\big(\gamma(x)\big) = \int_{(\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x\rangle}\, đp \int_{\mathbb{R}^q} e^{-i\langle p,y\rangle} e^{i\sum_{k=1}^{q}\beta_{\ell_k} p_k} e^{i\varphi(x)} (f\circ\gamma)(y)\, dy\,,$$

avec $\varphi(x) = \int_0^1 \psi(x,u)\, du$ où

$$\psi(x,u) = \big\langle \xi \circ e^{\mathrm{ad}(x_1+\beta_{\ell_1}u)e_{\ell_1}} \circ e^{\mathrm{ad}(x_2+\beta_{\ell_2}u)e_{\ell_2}} \circ \cdots \circ e^{\mathrm{ad}(x_q+\beta_{\ell_q}u)e_{\ell_q}}, \beta\big\rangle$$
$$-\big\langle \xi, \beta_{\ell_1}e_{\ell_1} + e^{\mathrm{ad}(x_1+\beta_{\ell_1}u)e_{\ell_1}}\cdot\beta_{\ell_2}e_{\ell_2} + e^{\mathrm{ad}(x_1+\beta_{\ell_1}u)e_{\ell_1}} \circ e^{\mathrm{ad}(x_2+\beta_{\ell_2}u)e_{\ell_2}}\cdot\beta_{\ell_3}e_{\ell_3}$$
$$+ \cdots + e^{\mathrm{ad}(x_1+\beta_{\ell_1}u)e_{\ell_1}} \circ e^{\mathrm{ad}(x_2+\beta_{\ell_2}u)e_{\ell_2}} \circ \cdots \circ e^{\mathrm{ad}(x_{q-1}+\beta_{\ell_{q-1}}u)e_{\ell_{q-1}}}\cdot\beta_{\ell_q}e_{\ell_q}\big\rangle,$$

donc son symbole de Weyl est $\exp^* i\langle\theta_\xi(-x,p),\beta\rangle = e^{i\sum_{k=1}^{q}\beta_{\ell_k}p_k} e^{i\Psi(x)}$, où

$$\Psi(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \psi(x,u)\, du = \psi(x,o) -$$
$$-\Big\langle \xi_3, \tfrac{1}{12}\sum_{k=2}^{q} \Big[v(\beta,k), \big[v(\beta,k), \beta_{\ell_k}e_{\ell_k}\big]\Big] + \tfrac{1}{24}\sum_{k=1}^{q} \Big[\beta_{\ell_k}e_{\ell_k}, \big[\beta_{\ell_k}e_{\ell_k}, v(\beta,k)\big]\Big]\Big\rangle .$$

avec $v(\beta,k) = \sum_{j=q+1}^{n_1} \beta_j e_j + \beta_{\ell_1}e_{\ell_1} + \cdots + \beta_{\ell_{k-1}}e_{\ell_{k-1}}$.

Si la suite (e_{ℓ_k}) est donnée par (1.12), alors l'orthogonalité à $\mathcal{G}_2$ pour B_ξ des vecteurs $e_{\ell_1}, \cdots, e_{\ell_{q-n'_1}}$ montre alors que le symbole de Weyl peut s'écrire sous la forme (1.15). ■

Proposition 1.7. *La transformée de Fourier $\mathcal{F}^W$ (au sens de Wildberger) définie par*

$$\big(\mathcal{F}^W f\big)(\eta) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathcal{G}} \exp^*(-i\langle\eta,\beta\rangle) f(\beta)\, d\beta \; pour\ f \in \mathcal{S}(\mathcal{G})\ et\ \eta \in \mathcal{G}^*, \tag{1.16}$$

possède les propriétés suivantes:

1) *L'application $f \mapsto \mathcal{F}^W f$ est une application continue de $\mathcal{S}(\mathcal{G})$ dans $\mathcal{S}(\mathcal{G}^*)$.*
2) *Pour $f \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, l'application $\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^* \to \mathbb{C}$, $(x,p) \to \big(\mathcal{F}^W f\big)(\theta_\xi(x,p))$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*)$.*

Démonstration. Le résultat 2) provient du fait que nous pouvons exprimer les variables $x_1, x_2, \ldots, x_q$ et $p_1, p_2, \ldots, p_q$ comme des fonctions polynomiales de $\langle\eta, u_k\rangle, 1 \le k \le q$ et $\langle\eta, e_{\ell_k}\rangle, 1 \le k \le q$. ■

Nous allons exprimer l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ en fonction de la transformée de Fourier de φ restreinte à l'orbite de ξ.

Proposition 1.8. *Soit $f \in \mathcal{E}_\xi$ tel que $f \circ \gamma \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q)$, nous avons :*

$$\begin{aligned}\forall \beta \in \mathcal{G}\,,\ & \big[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\beta) f\big]\big(\gamma(x)\big) = f(\gamma(x)\beta) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x\rangle}\, đp \int_{\mathbb{R}^q} e^{-i\langle p,y\rangle} \exp^* i\big\langle \theta_\xi\big(-\tfrac{x+y}{2}, p\big), \beta\big\rangle (f\circ\gamma)(y)\, dy \end{aligned}\tag{1.17}$$

$$\begin{aligned}\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G})\,,\ & \big[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi) f\big]\big(\gamma(x)\big) = \\ & \iint_{\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x-y\rangle} \big(\mathcal{F}^W \check{\varphi}\big)\, \big(\theta_\xi\big(-\tfrac{x+y}{2}, p\big)\big)\, (f\circ\gamma)(y)\, dy đp\,. \end{aligned}\tag{1.18}$$

Démonstration. (1.17) résulte de la définition de $\exp^* i\langle\eta,\beta\rangle$, $\beta \in \mathcal{G}$, prouvons (1.18), nous avons:

$$\begin{aligned}\big[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi) f\big]\big(\gamma(x)\big) &= \int_{\mathcal{G}} \varphi(\beta) f(\gamma(x)\beta)\, d\beta \\ = \int_{\mathcal{G}} \varphi(\beta)\, d\beta & \int_{(\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x\rangle} đp \int_{\mathbb{R}^q} e^{-i\langle p,y\rangle} \exp^* i\langle \theta_\xi\left(-\tfrac{x+y}{2}, p\right), \beta\rangle\, (f\circ\gamma)(y)\ dy\,.\end{aligned}$$

Soit N assez grand tel que $\int_{\mathbb{R}^q} \frac{1}{\left(1+|p|^2\right)^N} dp < +\infty$, le deuxième membre peut s'écrire

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{G}} \varphi(\beta)\, d\beta \int_{(\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x\rangle} \frac{1}{\left(1+|p|^2\right)^N}\, đp \int_{\mathbb{R}^q} e^{-i\langle p,y\rangle} (I - \Delta_y)^N & \\ \left\{\exp^* i\langle \theta_\xi\left(-\tfrac{x+y}{2}, p\right), \beta\rangle\, (f\circ\gamma)(y)\right\}\ dy\,, &\end{aligned}$$

ce qui s'exprime aussi par l'intégrale d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^* \oplus \mathcal{G}$

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^* \oplus \mathcal{G}} e^{i\langle p,x-y\rangle} \frac{1}{\left(1+|p|^2\right)^N} \left(I - \Delta_y\right)^N & \\ \left\{\exp^* i\left\langle \theta_\xi\left(-\tfrac{x+y}{2}, p\right), \beta\right\rangle (f\circ\gamma)(y)\right\} \varphi(\beta)\ dyđpd\beta\,, &\end{aligned}$$

ou encore par

$$\int_{(\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x\rangle} \frac{1}{\left(1+|p|^2\right)^N} \, đp \iint_{\mathbb{R}^q \oplus \mathcal{G}} e^{-i\langle p,y\rangle} \left(I - \Delta_y\right)^N$$
$$\left\{\exp^* i \left\langle \theta_\xi \left(-\tfrac{x+y}{2}, p\right), \beta\right\rangle (f \circ \gamma)(y)\right\} \varphi(\beta) \; dy d\beta$$
$$= \int_{(\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x\rangle} \frac{1}{\left(1+|p|^2\right)^N} \, đp \int_{\mathbb{R}^q} e^{-i\langle p,y\rangle} \left(I - \Delta_y\right)^N$$
$$\left\{\mathcal{F}^W \check{\varphi} \left(\theta_\xi \left(-\tfrac{x+y}{2}, p\right)\right) (f \circ \gamma)(y)\right\} \, dy$$
$$= \iint_{\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x-y\rangle} \big(\mathcal{F}^W \check{\varphi}\big)\big(\theta_\xi\big(-\tfrac{x+y}{2}, p\big)\big)(f \circ \gamma)(y) \, dy đp. \qquad \blacksquare$$

L'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi)$ est à noyau:

Proposition 1.9. *Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, $f \in \mathcal{E}_{\pi_\xi}$, nous avons:*

$$\big[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi) f\big](\gamma(x)) = \int_{\mathbb{R}^q} K_\varphi\big(\gamma(x), \gamma(y)\big) f(\gamma(y)) dy \,, \tag{1.19}$$

où le noyau K_φ est défini par

$$K_\varphi(a,b) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathcal{H}_\xi} e^{i\langle \xi,h\rangle} \varphi\big(a^{-1}hb\big) \, dh \quad , \qquad a \in \mathcal{G} \,, \quad b \in \mathcal{G} \,, \tag{1.20}$$

et peut s'écrire

$$K_\varphi\big(\gamma(x), \gamma(y)\big) = \int_{(\mathbb{R}^q)^*} e^{i\langle p,x-y\rangle} \big(\mathcal{F}^W \check{\varphi}\big) \left(\theta_\xi\big(-\tfrac{x+y}{2}, p\big)\right) \, đp \tag{1.21}$$

Démonstration. Nous avons

$$\big[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(\varphi) f\big](\gamma(x)) = \int_{\mathcal{G}} \varphi(\beta) f(\gamma(x)\beta) \, d\beta$$

et nous obtenons (1.19) et (1.20) en utilisant l'invariance à gauche de la mesure $d\beta$ et le difféomorphisme :

$$\mathcal{H}_\xi \times \mathbb{R}^q \to \mathcal{G} \quad , \quad (h,y) \to \beta = h\gamma(y)$$

qui vérifie $d\beta = dhdy$. L'expression (1.21) du noyau K_φ résulte alors de (1.18). ■

D'après Wildberger ([13], Proposition III.3.1), pour φ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$ la transformée de Fourier $\mathcal{F}^W(\varphi * \psi)$ du produit de convolution $\varphi * \psi$ s'obtient en composant sur chaque orbite $\mathcal{F}^W\varphi$ avec $\mathcal{F}^W\psi$, cette composition, notée $\mathcal{F}^W\varphi \# \mathcal{F}^W\psi$, peut s'exprimer sous la forme d'une intégrale et est donnée par le calcul de Weyl [7] .

Proposition 1.10. *Pour φ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, nous avons:*

$$\Big(\mathcal{F}^W(\varphi * \psi)\Big)\big(\theta_\xi(x,p)\big)\Big(= \big(\mathcal{F}^W\varphi \# \mathcal{F}^W\psi\big)\big(\theta_\xi(x,p)\big)\Big) =$$
$$\iint_{\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*} \mathrm{e}^{-i(\langle p,t\rangle - \langle x,\tau\rangle)} \big(\mathcal{F}^W\varphi\big)\big(\theta_\xi(x+\tfrac{t}{2}, p+\tfrac{\tau}{2})\big) \big(\widetilde{\mathcal{F}^W\psi}\big)(\tau,t) \, dt đ\tau, \tag{1.22}$$

où

$$\big(\widetilde{\mathcal{F}^W\psi}\big)(\tau,t) = \iint_{\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*} \mathrm{e}^{-i(\langle x',\tau\rangle - \langle p,t\rangle)} \big(\mathcal{F}^W\psi\big)\big(\theta_\xi(x',p)\big) \, dx' đp. \tag{1.23}$$

2. Symbole σ_P de $P \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ et fonctions poids

Soit P un opérateur différentiel invariant à gauche sur $\mathcal{G}$ élément de l'algèbre universelle enveloppante (complexifiée) $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$. Comme dans [6], désignons par $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ le sous espace de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ formé par les opérateurs P quasi-homogènes de degré m de la forme

$$P = \sum_{\|(\alpha,\beta,\gamma)\|=m} a_{\alpha,\beta,\gamma} X_1^{\alpha_1} \dots X_{n_1}^{\alpha_{n_1}} Y_1^{\beta_1} \dots Y_{n_2}^{\beta_{n_2}} Z_1^{\gamma_1} \dots Z_{n_3}^{\gamma_{n_3}}$$

où $\|(\alpha,\beta,\gamma)\| = |\alpha| + 2\,|\beta| + 3\,|\gamma|$, $(X_j)_{1\le j\le n_1}$ est une base de $\mathcal{G}_1$, $(Y_j)_{1\le j\le n_2}$ une base de $\mathcal{G}_2$ et $(Z_j)_{1\le j\le n_3}$ une base de $\mathcal{G}_3$.

Nous définissons le symbole σ_P de P en posant:

$$\sigma_P\,(\eta) = P\,(\exp^* i\langle \eta, \beta\rangle)|_{\beta=0} \tag{2.1}$$

Proposition 2.1. *Le symbole possède les propriétés suivantes:*
1) *Pour* $P \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, σ_P *est une fonction polynomiale de* $\eta \in \mathcal{G}^*$.
2) *Pour* X *vecteur de* $\mathcal{G}$, $\sigma_X\,(\eta) = i\langle \eta, X\rangle$.
3) *Si* $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, *nous avons:* $\forall t > 0, \sigma_P\,(\delta_t \eta) = t^m \sigma_P\,(\eta)$ *et*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n_1}, \forall \beta \in \mathbb{N}^{n_2}, \exists C = C_{\alpha,\beta} : \left|\left(\partial_{\eta_1}^{\alpha} \partial_{\eta_2}^{\beta} \sigma_P\right)(\eta)\right| \le C\,(1 + \|\eta\|)^{m-\|(\alpha,\beta)\|}\,, \tag{2.2}$$

où $\|(\alpha,\beta)\| = |\alpha| + 2\,|\beta|$ *et* $\|\eta\| = |\eta_1| + |\eta_2|^{\frac{1}{2}} + |\eta_3|^{\frac{1}{3}}$, $|\eta_i|$ *étant la norme euclidienne de* $\eta_i \in \mathcal{G}_i^*$, $1 \le i \le 3$,

$$\begin{aligned}&\forall f \in \mathcal{E}_\xi, \left(\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}\,(P)\, f\right)(\gamma\,(x)) = \\ &\int_{(\mathbb{R}^q)^*} \mathrm{e}^{i\langle p,x\rangle}\, đp \int_{\mathbb{R}^q} e^{-i\langle p,y\rangle} \sigma_P\left(\theta_\xi\left(-\tfrac{x+y}{2}, p\right)\right) f\,(\gamma\,(y))\, dy\,.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Démonstration. Le résultat 2) résulte de l'expression de $\exp^* i\langle \eta, \beta\rangle$. Prouvons 3), $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie $\forall t > 0, \forall f \in C^\infty\,(\mathcal{G})\,, P\,(f \circ \delta_t) = t^m\,(Pf) \circ \delta_t$, donc $\sigma_P(\delta_t\eta) = P\,(\exp^* i\langle \delta_t\eta, \beta\rangle)|_{\beta=0} = P\,(\exp^* i\langle \eta, \delta_t\beta\rangle)|_{\beta=0} = t^m \sigma_P\,(\eta)$.

Le résultat (2.2) découle de la compacité de la sphère
$\Sigma = \{\eta \in \mathcal{G}^*, \|\,\eta\,\| = 1\}$ et (2.3) s'établit par dérivation à partir de (1.17). ■

Proposition 2.2. *Soit* $\eta = \theta_\xi(x,p)$ *la carte donnée par* (1.13) *et* (1.14). *Nous avons:*

$$\forall a \in \mathcal{H}_\xi,\ \frac{\partial}{\partial x_j}\,\langle \eta, a\rangle = -\left\langle \eta, \left[e_{\ell_j}, a\right]\right\rangle\,. \tag{2.4}$$

Il existe une constante $C > 0$ *telle que*

$$\forall j \in [1,q]\ ,\ \forall k \in [1,q]\ \ \left|\frac{\partial}{\partial x_j}\,\langle \eta, e_{\ell_k}\rangle\right| \le C(1 + |\eta_2|)\,, \tag{2.5}$$

où $|\eta_2|$ *désigne la norme euclidienne de la restriction de* η *à* $\mathcal{G}_2$.

Démonstration. L'égalité (2.4) découle de (1.13) et du fait que a est orthogonal à $\mathcal{G}_2$ pour B_ξ. Prouvons (2.5), d'après (1.14) la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_j}\langle \eta, e_{\ell_k}\rangle$ ne dépend pas des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{q-n'_1}$ et est une fonction affine de $x_{q-n'_1+1}, \ldots, x_q$. En considérant la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n'_1}, v_{n'_1+1}, \ldots, v_{n_2}\}$ de $\mathcal{G}_2$ de la démonstration du lemme 1.1 nous pouvons exprimer $\frac{\partial}{\partial x_j}\langle \eta, e_{\ell_k}\rangle$ comme fonction affine de la restriction de η à $\mathcal{G}_2$. ∎

Proposition 2.3. *Soit* $\eta = \theta_\xi(x,p) = \theta_\xi^{\mathcal{G}_1^*}(x,p) + \theta_\xi^{\mathcal{G}_2^*\oplus\mathcal{G}_3^*}(x) \in \mathcal{G}_1^* \oplus (\mathcal{G}_2^* \oplus \mathcal{G}_3^*)$ *la carte associée à la suite* $(e_{\ell_k})_{1\le k\le q}$ *donnée par* (1.13) *et* (1.14) *et posons:*

$$\Phi(x,p) = 1 + \|\theta_\xi(-x,p)\| \quad , \quad \phi\,(x,p) = \left(1 + \left\|\theta_\xi^{\mathcal{G}_2^*\oplus\mathcal{G}_3^*}(-x)\right\|\right)^{-1}, \tag{2.6}$$

où $\|.\|$ *désigne la norme homogène donnée à la proposition 2.1.*

1) Le symbole σ_P *de* $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ *vérifie:*

$$\begin{aligned}&\forall\alpha \in \mathbb{N}^q, \forall\beta \in \mathbb{N}^q, \exists C_{\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta}(\xi) > 0 :\\ &\qquad \left|\partial_x^\alpha \partial_p^\beta \sigma_P\left(\theta_\xi\left(-x,p\right)\right)\right| \le C_{\alpha,\beta}\left[\Phi(x,p)\right]^{m-|\beta|}\left[\phi(x,p)\right]^{-|\alpha|}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

2) Les fonctions Φ, ϕ *sont des fonctions poids au sens de Beals* ([2],[3]).

Démonstration. Le premier point résulte des deux propositions précédentes.

D'après [2],[3] et [7], les fonctions Φ, ϕ sont des fonctions poids si elles vérifient les trois propriétés suivantes:

i) $\Phi\phi \ge 1$.

ii) Il existe des constantes strictement positives c, C telles que:

$$c \le \Phi(x,p)/\Phi(x',p') \le C \text{ et } c \le \phi(x,p)/\phi(x',p') \le C$$
$$\text{si } |x - x'| \le c\phi(x,p) \text{ et } |p - p'| \le c\Phi(x,p)\,.$$

iii) Si nous posons $R(x,p) = \dfrac{\Phi(x,p)}{\phi(x,p)}$, alors il existe des constantes strictement positives c, C, δ telles que $R(x',p')/R(x,p) \le C$ si:

$$R(x,p)|x - x'|^2 + |p - p'|^2/R(x',p') \le c\big(R(x',p')/R(x,p)\big)^\delta.$$

D'après leurs définitions, il est clair que Φ, ϕ vérifient la propriété i). Pour prouver qu'elles vérifient aussi ii), nous remarquons d'abord que la fonction $\phi(x,p)$ ne dépend que de $\bar{x} = (x_{q-n'_1+1}, x_{q-n'_1+1}, \ldots, x_q)$ et est du même ordre que $(1+|\bar{x}|)^{\frac{1}{2}}$, donc l'encadrement de $\phi(x,p)/\phi(x',p')$ résulte de l'inégalité:

$$\frac{1 + |\bar{x}'|}{1 + |\bar{x}|} \le 1 + |\bar{x} - \bar{x}'|.$$

Ensuite, d'après la proposition 2.2, les valeurs absolues des dérivées par rapport à x de chaque composante de $\theta_\xi(-x,p)$ sont majorées par $c\phi(x,p)^{-2}$ (c constante

> 0), d'où, par la formule de Taylor à l'ordre 2 et $\Phi\phi \geq 1$, l'encadrement de $\Phi(x,p)/\Phi(x',p')$. Prouvons finalement la propriété iii) avec $\delta \in]0, \frac{2}{3}[$. Posons

$$X = \frac{R(x',p')}{R(x,p)} = \frac{\Phi(x',p')}{\Phi(x,p)}\frac{\phi(x,p)}{\phi(x',p')}$$

et montrons que X est borné si

$$|x - x'| \leq cX^{\frac{\delta}{2}}R(x,p)^{-\frac{1}{2}} \text{ et } |p - p'| \leq cX^{\frac{\delta}{2}}R(x',p')^{\frac{1}{2}} .$$

Nous avons, avec des constantes C:

$$\frac{\phi(x,p)}{\phi(x',p')} \leq C(1 + |x - x'|)^{\frac{1}{2}} \leq C(1 + X^{\frac{\delta}{2}}R(x,p)^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \leq C(1 + X^{\frac{\delta}{4}}) .$$

Par Taylor à l'ordre 2 au point (x,p) pour chaque composante de $\theta_\xi(-x,p)$, nous obtenons:

$$\Phi(x',p') \leq C\big(\Phi(x,p) + X^{\frac{\delta}{2}}R(x',p')^{\frac{1}{2}} + \phi(x,p)^{-2}X^{\frac{\delta}{2}}R(x,p)^{-\frac{1}{2}} + X^{\delta}R(x,p)^{-1} + X^{\frac{\delta}{4}}R(x,p)^{-\frac{1}{4}}\big) .$$

D'une part

$$X^{\frac{\delta}{2}}\frac{R(x',p')^{\frac{1}{2}}}{\Phi(x,p)} = X^{\frac{\delta}{2}}\frac{R(x',p')^{\frac{1}{2}}}{R(x,p)^{\frac{1}{2}}}\frac{R(x,p)^{\frac{1}{2}}}{\Phi(x,p)} = X^{\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}}[\Phi(x,p)\phi(x,p)]^{-\frac{1}{2}} \leq X^{\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}} ,$$

d'autre part

$$\phi(x,p)^{-2}R(x,p)^{-\frac{1}{2}}\Phi(x,p)^{-1} = [\Phi(x,p)\phi(x,p)]^{-\frac{3}{2}} \leq 1 ,$$

donc

$$X \leq C(1 + X^{\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}} + X^{\frac{\delta}{2}} + X^{\delta} + X^{\frac{\delta}{4}})(1 + X^{\frac{\delta}{4}}) ,$$

où C est une constante indépendante de X, ceci montre que X est borné si on choisit δ dans l'intervalle $]0, \frac{2}{3}[$. ■

3. Paramétrix de $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P), P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$

Dans ce paragraphe, nous allons, sous une hypothèse sur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$, cons-truire une paramétrix de cet opérateur (Théorème 3.5).

Lemme 3.1. *Soient*

$(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *la base de* $\mathcal{G}_1$ *définie au lemme 1.1,*

$X = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$,

$\tilde{e}_j \overset{\text{déf}}{=} e_j + \sum_{k=1}^{n'_1}\langle\xi, [e_j, e_k]\rangle u_k$, $q + 1 \leq j \leq n_1$,

$\mathcal{G}'_1 \overset{\text{déf}}{=} X \oplus \tilde{Y}$ *où* $\tilde{Y} \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{Vect}(\tilde{e}_{q+1}, \tilde{e}_{q+2}, \ldots, \tilde{e}_{n_1})$.

Notons δ_t^* *la transposée de la dilatation* $\delta_t : \mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3 \to \mathcal{G}$ *donnée par* $\delta_t(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (t\beta_1, t^2\beta_2, t^3\beta_3)$, *et soient*

Γ *la fermeture dans* $\mathcal{G}^*$ *de l'ensemble* $\{\delta_t^*\theta_\xi(x,p) \mid t > 0, (x,p) \in \mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*\}$,

p_1^* la projection de $\mathcal{G}^* = {\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^* \oplus \mathcal{G}_3^*$ sur ${\mathcal{G}'_1}^*$ parallèlement à $\mathcal{G}_2^* \oplus \mathcal{G}_3^*$,
$\tau_{\eta_1^0}$ la translation ${\mathcal{G}'_1}^* \to {\mathcal{G}'_1}^*$ de vecteur $\eta_1^0 = -p_1^*(\theta_\xi(0,0))$.
$\Omega(\xi)$ l'ensemble $\Omega(\xi) = (\tau_{\eta_1^0} \circ p_1^*)(O(\xi))$.
Avec ces notations, nous avons l'inclusion

$$\overline{\Omega(\xi)} \times \{(0,0)\} \subset \Gamma \tag{3.1}$$

et $\overline{\Omega(\xi)}$ est un ensemble conique ($s\omega \in \overline{\Omega(\xi)}$ si $s > 0$ et $\omega \in \overline{\Omega(\xi)}$).

Démonstration. Introduisons d'abord quelques notations. Soit $p(t)$ la forme linéaire de $(\mathbb{R}^q)^*$ définie pour $t > 0$ par

$$\forall k \in [1,q]\,,\ (p(t)_k = \frac{1}{t}p_k + \frac{1}{t}\sum_{q-n'_1+1\le\sigma\le q\,,\,\sigma>k} x_\sigma\langle\xi,[e_{\ell_\sigma},e_{\ell_k}]\rangle\,.$$

Posons $\mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{q-n'_1} \times \mathbb{R}^{n'_1}$, $x = (y,z)$ où $y = (x_1, x_2, \ldots, x_{q-n'_1})$, $z = (x_{q-n'_1+1}, \ldots, x_q)$ et, pour $t > 0$

$$\eta(t) = \delta_t^*\theta_\xi\Big(\frac{y}{t}, \frac{z}{\sqrt{t}}, p(t)\Big)\,.$$

Pour obtenir l'inclusion (3.1)), nous allons montrer que la limite $\lim_{t\to 0^+}\eta(t)$ existe dans $\mathcal{G}^*$ et est une forme linéaire η qui vérifie

$$\eta|_{\mathcal{G}_2\oplus\mathcal{G}_3} = 0 \quad \text{et} \qquad \forall u \in \mathcal{G}'_1\,, \quad \langle\eta,u\rangle = \langle\theta_\xi(x,p) - \theta_\xi(0,0),u\rangle\,. \tag{3.2}$$

D'après (1.14), nous avons

$$\lim_{t\to 0^+}\langle\eta(t),e_{\ell_k}\rangle = \langle\theta_\xi(x,p),e_{\ell_k}\rangle\,,\ 1 \le k \le q\,.$$

Les vecteurs $\tilde{e}_k$, $q+1 \le k \le n_1$, sont dans $\mathcal{H}_\xi$ et vérifient d'après (1.13)

$$\lim_{t\to 0^+}\langle\eta(t),\tilde{e}_k\rangle = \langle\theta_\xi(x,p) - \theta_\xi(0,0),\tilde{e}_k\rangle\,,\ q+1 \le k \le n_1\,.$$

Également, pour $v \in \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$,

$$\lim_{t\to 0^+}\langle\eta(t),v\rangle = 0\,.$$

Nous obtenons ainsi (3.2)). L'ensemble $\Omega(\xi)$ est conique car en notant $\theta_\xi^{\tilde{Y}}(x)$ la restriction de $\theta_\xi(x,p)$ à $\tilde{Y}$, nous avons $p_1^*(O(\xi)) = \big\{\big(p,\theta_\xi^{\tilde{Y}}(x)\big) \bigm| (x,p) \in \mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*\big\}$ et

$$\forall s > 0,\, \forall p,\, \forall y,\, \forall z, \quad s\big(p,\theta_\xi^{\tilde{Y}}(y,z) - \theta_\xi^{\tilde{Y}}(0,0)\big) = \big(sp,\theta_\xi^{\tilde{Y}}(sy,\sqrt{s}z) - \theta_\xi^{\tilde{Y}}(0,0)\big)\,. \ \blacksquare$$

Définition 3.2. Pour simplifier l'écriture, nous notons π_ξ la représentation induite $\pi_\xi = \pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}$ de $\mathcal{G}$ dans $L^2(X)$ définie en (1.6).
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U}^p(\mathcal{G}) = \oplus_{j=0}^p\mathcal{U}_j(\mathcal{G})$, nous notons $\mathrm{H}^p_{\pi_\xi}(X)$ l'espace de Sobolev:

$$\mathrm{H}^p_{\pi_\xi}(X) = \big\{\, u \in L^2(X) \big|\, \pi_\xi(Q)u \in L^2(X) \text{ quel que soit } Q \in \mathcal{U}^p(\mathcal{G})\big\}\,. \tag{3.3}$$

Soit, pour chaque $j \in [0,p]$, une base (Q_{jk}) de $\mathcal{U}_j(\mathcal{G})$, nous posons:

$$|||u|||_{j,\pi_\xi} = \Big(\sum_k ||\pi_\xi(Q_{jk})u||^2_{L^2(X)}\Big)^{\frac{1}{2}}, \ 0 \le j \le p.$$

L'espace $\mathrm{H}^p_{\pi_\xi}(X)$ est muni de la norme

$$||u||_{p,\pi_\xi} = \Big(\sum_{j=0}^{p} |||u|||^2_{j,\pi_\xi}\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

Lemme 3.3. *Soit $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ tel que $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ soit un homéomorphisme linéaire de $\mathrm{H}^m_{\pi_\xi}(X)$ sur $L^2(X)$ et $\Omega(\xi)$ le sous-ensemble $(\tau_{\eta_1^0} \circ p_1^*)(O(\xi))$ de ${\mathcal{G}'_1}^*$. Pour $m' \in \mathbb{R}$, notons $\mathbf{S}^{m'}({\mathcal{G}'_1}^*)$ l'espace*

$$\big\{a \in C^\infty({\mathcal{G}'_1}^*) \,|\, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n_1},\ |(\partial^\alpha_{\eta_1} a)| \le C_\alpha(1+|\eta_1|)^{m'-|\alpha|}\big\}$$

et soit σ_P le symbole de P , nous avons:

i) *La fonction σ définie par $\sigma(\eta_1) = \sigma_P(\eta_1, 0, 0)$ appartient à $\mathbf{S}^m({\mathcal{G}'_1}^*)$ et ne s'annule pas sur $\overline{\Omega(\xi)} \setminus \{0\}$.*

ii) *Il existe $q_0 \in \mathbf{S}^{-m}({\mathcal{G}'_1}^*)$ tel que*

$$\sigma q_0 = 1 + \varphi \text{ avec } \varphi \in C^\infty({\mathcal{G}'_1}^*),\ \varphi(\eta_1) = 0 \text{ pour } \eta_1 \in \overline{\Omega(\xi)} \text{ et } |\eta_1| > \frac{3}{4},$$

$|\cdot|$ désignant une norme euclidienne dans ${\mathcal{G}'_1}^*$.

Démonstration. D'après ([12], théorème 5.10), pour tout $\eta_1 \in \overline{\Omega(\xi)} \setminus \{0\}$, l'opérateur $\pi_{(\eta_1,0,0)}(P)$ est injectif. L'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est subordonneée maximale pour la forme linéaire $(\eta_1, 0, 0)$ de $\mathcal{G}^*$, donc la représentation induite $\pi_{((\eta_1,0,0),\mathcal{G})}$ est scalaire et, pour $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathcal{G}'_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \mathcal{G}_3$, l'opérateur $\pi_{((\eta_1,0,0),\mathcal{G})}(\beta)$ est l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, u \mapsto \mathrm{e}^{i<\eta_1,\beta_1>}u$, l'opérateur $\pi_{((\eta_1,0,0),\mathcal{G})}(P)$ est alors l'application $u \mapsto \sigma(\eta_1)u$. Le polynôme $\sigma(\eta_1)$ est homogène de degré m et nous avons le résultat i).
Soient $|\cdot|$ une norme euclidienne dans ${\mathcal{G}'_1}^*$, d la distance définie par cette norme et S la sphère unité de ${\mathcal{G}'_1}^*$. L'ensemble $K = \overline{\Omega(\xi)} \cap S$ est compact et la fonction $\sigma(\eta_1)$ ne s'annule pas sur K, donc il existe $r > 0$ tel que, en désignant $d(\eta_1, K)$ la distance de η_1 à K:

$$d(\eta_1, K) < r \quad \text{implique} \quad \sigma(\eta_1) \neq 0.$$

Soient θ une fonction de $C_0^\infty({\mathcal{G}'_1}^*)$ égale à 1 sur un voisinage de K et à support dans $\{\eta_1 \in {\mathcal{G}'_1}^* \,|\, d(\eta_1, K) < r\}$ et χ une fonction de $C^\infty({\mathcal{G}'_1}^*)$ égale à 0 pour $|\eta_1| < \frac{1}{4}$ et à 1 pour $|\eta_1| > \frac{3}{4}$.
Si nous posons $q_0(\eta_1) = \dfrac{1}{\sigma(\eta_1)}\chi(\eta_1)\theta\Big(\dfrac{\eta_1}{|\eta_1|}\Big)$ pour $\eta_1 \in {\mathcal{G}'_1}^*$, alors nous avons $q_0 \in C^\infty({\mathcal{G}'_1}^*)$ et, pour $|\eta_1| > \frac{3}{4}$ et $t > 1, q_0(t\eta_1) = t^{-m}q_0(\eta_1)$, donc $q_0 \in \mathbf{S}^{-m}({\mathcal{G}'_1}^*)$, d'où le résultat ii). ∎

Introduisons une classe de symboles.

Définition 3.4. Si f est une fonction définie sur $O(\xi)$, nous posons $f_\xi(x,p) = f(\theta_\xi(-x,p))$. Pour $m' \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, nous notons $S^{m',-N}(O(\xi))$ la classe

$$S^{m',-N}(O(\xi)) = \{f : O(\xi) \mapsto \mathbb{C} \mid f_\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*) \text{ et } \\ \forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^q)^2, \exists C_{\alpha,\beta} > 0 : |(\partial_x^\alpha \partial_p^\beta f_\xi)(x,p)| \leq \\ C_{\alpha,\beta}[\Phi(x,p)]^{m'-|\beta|}[\phi(x,p)]^{-|\alpha|}[\Phi(x,p)\phi(x,p)]^{-N}\} .$$

Nous posons $S^{m',-\infty}(O(\xi)) = \cap_{N\in\mathbb{N}} S^{m',-N}(O(\xi))$ et $S^{m'}(O(\xi)) = S^{m',0}(O(\xi))$.

Les espaces $S^{m',-N}(O(\xi))$ munis des semi-normes habituelles sont des espaces de Fréchet.

La classe de symboles $S^{m',-N}(O(\xi))$ peut être associée à une métrique Riemannienne sur $\mathbb{R}^q \times (\mathbb{R}^q)^*$ selon Hormander [7]. Reprenons les notations de la preuve de la proposition 2.3, la propriété ii) des fonctions poids Φ et ϕ exprime que la métrique

$$g_{(x,p)}(x',p') = \frac{|x'|^2}{\phi(x,p)^2} + \frac{|p'|^2}{\Phi(x,p)^2}$$

varie lentement, de plus si σ est la forme symplectique définie par

$$\sigma(x,p;x',p') = <p,x'> - <p',x>$$

et g^σ la métrique duale de g par rapport à σ:

$$g^\sigma_{(x,p)}(x',p') = |x'|^2\Phi(x,p)^2 + |p'|^2\phi(x,p)^2 ,$$

la propriété $\Phi\phi \geq 1$ exprime que $g \leq g^\sigma$ et la propriété iii) implique que g est σ tempérée, c'est à dire vérifie:

$$\Phi(x,p)/\Phi(x',p') + \phi(x,p)/\phi(x',p') \leq C\big(1 + g^\sigma_{(x',p')}(x-x',p-p')\big)^N .$$

Cette inégalité implique également que, pour $m' \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, la fonction $m(x,p) = [\Phi(x,p)]^{m'}[\Phi(x,p)\phi(x,p)]^{-N}$ est σ, g tempérée et la classe $S^{m',-N}(O(\xi))$ est la classe notée $S(m',g)$ dans [7]. Dans la suite de cet article, la composition des symboles est alors donnée par le calcul de Weyl.

Théorème 3.5. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie graduée de rang 3, $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ tel que $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ soit un homéomorphisme linéaire de $\mathrm{H}^m_{\pi_\xi}(X)$ sur $L^2(X)$ et σ_P le symbole de P. Il existe $q \in S^{-m}(O(\xi))$ et $r \in S^{0,-\infty}(O(\xi))$ tels que*

$$\sigma_{P,\xi}\#q = 1 + r \quad \text{où} \qquad \sigma_{P,\xi}(x,p) = \sigma_P(\theta_\xi(-x,p)). \tag{3.5}$$

Démonstration. A toute fonction f définie sur $C^\infty(\mathcal{G}_1'^*)$, associons la fonction translatée définie par $\tau_{\eta_1^0}f(\eta_1) = f(\eta_1 - \eta_1^0)$ et posons, avec les notations du lemme précédent :

$$\sigma_1 = \tau_{\eta_1^0}\sigma \ , \quad q_1 = \tau_{\eta_1^0}q_0 \ , \quad \varphi_1 = \tau_{\eta_1^0}\varphi.$$

Ces fonctions appartiennent respectivement aux espaces $\mathbf{S}^m(\mathcal{G}_1'^*)$, $\mathbf{S}^{-m}(\mathcal{G}_1'^*)$, $C^\infty(\mathcal{G}_1'^*)$ et vérifient

$\sigma_1 q_1 = 1 + \varphi_1$ avec $\varphi_1 \in C^\infty(\mathcal{G}_1'^*)$, $\varphi_1(\eta_1) = 0$ pour $\eta_1 \in p_1^*(O(\xi))$ et $|\eta_1 - \eta_1^0| > \frac{3}{4}$.

Introduisons, pour $m' \in \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathbb{R}$, les espaces

$$\mathbf{S}^{m',\tau}({\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^*) = \Big\{ a \in C^\infty({\mathcal{G}'}^*_1 \oplus \mathcal{G}_2^*) \,\big|\, \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{n_1} \times \mathbb{N}^{n_2},\ \exists C = C_{\alpha,\beta} > 0 :$$
$$\big|\big(\partial^\alpha_{\eta_1}\partial^\beta_{\eta_2} a\big)(\eta_1,\eta_2)\big| \le C\big(1+|\eta_1|+|\eta_2|^{\frac12}\big)^{m'-|\alpha|-2|\beta|}\Big(\frac{1+|\eta_2|^{\frac12}}{1+|\eta_1|+|\eta_2|^{\frac12}}\Big)^{\tau-\mathrm{Min}(\tau,|\beta|)}\Big\}$$

et soient $\psi \in C_0^\infty({\mathcal{G}'_1}^*)$, $\psi = 1$ dans un voisinage de l'origine et χ_1 la fonction définie sur ${\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^*$ par $\chi_1(\eta_1,\eta_2) = 1 - \psi\left(\dfrac{\eta_1}{(1+|\eta_2|^2)^{\frac14}}\right)$. Sur le support de $1-\chi_1$, les fonctions $1+|\eta_2|^{\frac12}$ et $1+|\eta_1|+|\eta_2|^{\frac12}$ sont du même ordre et nous pouvons alors vérifier que $1-\chi_1 \in \mathbf{S}^{0,1}({\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^*)$ et $\chi_1 \in \mathbf{S}^{0,0}({\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^*)$. Il existe une constante $C > 0$ telle que $\chi_1(\eta_1,\eta_2) \neq 0$ implique $|\eta_1| \ge C(1+|\eta_1|+|\eta_2|^{\frac12})$ et il est alors facile de voir que la fonction q_2 définie par $q_2(\eta_1,\eta_2) = q_1(\eta_1)\chi_1(\eta_1,\eta_2)$ appartient à $\mathbf{S}^{-m,0}({\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^*)$.

Posons $\theta_\xi(x,p) = \Big(\theta_\xi^{\mathcal{G}'_1}(x,p), \theta_\xi^{\mathcal{G}_2}(x), \theta_\xi^{\mathcal{G}_3}\Big) \in {\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^* \oplus \mathcal{G}_3^*$ et introduisons les fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*)$,

$$\begin{aligned}
q_{2,\xi}(x,p) &= q_2\Big(\theta_\xi^{\mathcal{G}'_1}(-x,p), \theta_\xi^{\mathcal{G}_2}(-x)\Big) \in S^{-m}(O(\xi)),\\
\sigma_{1,\xi}(x,p) &= \sigma_1\Big(\theta_\xi^{\mathcal{G}'_1}(-x,p)\Big) \in S^{m}(O(\xi)),\\
\chi_{1,\xi}(x,p) &= \chi\Big(\theta_\xi^{\mathcal{G}'_1}(-x,p), \theta_\xi^{\mathcal{G}_2}(-x)\Big) \in S^{0}(O(\xi)),\\
q_{1,\xi}(x,p) &= q_1\Big(\theta_\xi^{\mathcal{G}'_1}(-x,p),\Big) \in S^{-m}(O(\xi)).
\end{aligned}$$

Etudions $\sigma_{P,\xi}\# q_{2,\xi} - 1 = (\sigma_{P,\xi} - \sigma_{1,\xi})\# q_{2,\xi} + [\sigma_{1,\xi}\#(\chi_{1,\xi}q_{1,\xi}) - \chi_{1,\xi}\sigma_{1,\xi}q_{1,\xi}] + \chi_{1,\xi}(\sigma_{1,\xi}q_{1,\xi} - 1) + \chi_{1,\xi} - 1$ en examinant chaque terme du second membre. Nous avons $\sigma_P - \sigma_1 \in \mathbf{S}^{m,1}({\mathcal{G}'_1}^* \oplus \mathcal{G}_2^*)$, donc $\sigma_{P,\xi} - \sigma_{1,\xi} \in S^{m,-1}(O(\xi))$ et le premier terme $(\sigma_{P,\xi} - \sigma_{1,\xi})\# q_{2,\xi}$ appartient à $S^{0,-1}(O(\xi))$. Le deuxième terme et le dernier $\chi_{1,\xi} - 1$ sont dans $S^{0,-1}(O(\xi))$, le troisième est dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*) \subset S^{0,-1}(O(\xi))$. Finalement, nous avons $\sigma_{P,\xi}\# q_{2,\xi} - 1 \in S^{0,-1}(O(\xi))$. Le calcul symbolique classique nous permet alors de trouver une fonction $q \in S^{-m}(O(\xi))$ et une fonction $r \in S^{0,-\infty}(O(\xi))$ qui vérifient (3.5). ■

Aux symboles de la classe $S^{m'}(O(\xi))$ avec $m' \le 0$ correspondent des opérateurs continus :

Proposition 3.6. *Si a est un symbole de $S^{m'}(O(\xi))$ avec $m' \le 0$, alors l'opérateur $a^{\mathrm{Weyl}}(x,D)$ de symbole de Weyl a est continu de $L^2(\mathbb{R}^q)$ dans $L^2(\mathbb{R}^q)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 5.3 de [7]. ■

4. Propriétés générales des opérateurs $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(Q), Q \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$

Nous établissons d'abord quelques propriétés essentiellement algébriques des fonctions de l'espace $\mathcal{S}(\mathcal{G})$, puis nous introduisons un espace $s(O(\xi))$ de fonctions à décroissance rapide définies sur l'orbite $O(\xi)$ sur lequel nous faisons agir les opérateurs $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(Q)$, $Q \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Proposition 4.1. *Si, pour $a \in \mathbb{R}^q, f \in \mathcal{S}(\mathcal{G}), g \in \mathcal{G}$, nous posons:*

$$(\mathcal{L}_a f)(g) \overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathcal{H}_\xi} e^{-i\langle \xi, h\rangle} f\left(\gamma(a)^{-1} hg\right) dh \tag{4.1}$$

alors $\mathcal{L}_a f \in \mathcal{E}_{\pi_\xi}$ et vérifie :

i) $\forall x \in \mathbb{R}^q, (\mathcal{L}_a f)(\gamma(x)) = K_{\check{f}}(\gamma(x), \gamma(a))$

ii) $\forall Q \in \mathcal{U}(\mathcal{G}), \mathcal{L}_a(Qf) = \pi_{(\xi, \mathcal{H}_\xi)}(Q) \cdot (\mathcal{L}_a f)$

Démonstration. Les deux premiers points se vérifient sur les définitions. Pour prouver ii), il suffit de considérer un champ de vecteurs U, il vient :

$$\begin{aligned}
\left[\pi_{(\xi, \mathcal{H}_\xi)}(U) \cdot \mathcal{L}_a f\right](g) &= \tfrac{d}{dt} (\mathcal{L}_a f)(g \exp tU)\big|_{t=0} \\
&= \int_{\mathcal{H}_\xi} e^{-i\langle \xi, h\rangle} \tfrac{d}{dt} f\left(\gamma(a)^{-1} hg \exp tU\right)\big|_{t=0} dh \\
&= (\mathcal{L}_a(Uf))(g). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 4.2. *Soit l'espace $s(O(\xi)) \overset{\text{déf}}{=} \cap_{m' \in \mathbb{R}} S^{m'}(O(\xi))$. La fonction f appartient à $s(O(\xi))$ si et seulement si $f_\xi = f(\theta_\xi(-x, p)))$ appartient à l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*)$ et vérifie*

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^q)^2,\ \exists C = C_{N,\alpha,\beta} > 0\ :\ \left|\left(\partial_x^\alpha \partial_p^\beta f_\xi\right)(x, p)\right| \le C\,[\Phi(x, p)]^{-N},$$

ou, en posant $\gamma_1(x) = \sum_{i=1}^q x_i e_i$,

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^q)^2,\ \exists C = C_{N,\alpha,\beta} > 0\ :$$
$$\left|\left(\partial_x^\alpha \partial_p^\beta f_\xi\right)(x, p)\right| \le C\left(1 + |p| + \left\|\xi \circ \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}\gamma_1(x)}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\|\right)^{-N}.$$

Définition 4.3. Pour $f \in s(O(\xi))$, nous notons $\big(\hat{\mathcal{L}}_a f\big)(x)$ le noyau de l'opérateur pseudo-différentiel $f_\xi^{\text{Weyl}}(x, D)$ de symbole de Weyl $f_\xi(x, p)$, c'est à dire

$$\forall a \in \mathbb{R}^q, \forall x \in \mathbb{R}^q\ \ \left(\hat{\mathcal{L}}_a f\right)(x) \overset{\text{déf}}{=} \int_{(\mathbb{R}^q)^*} \mathrm{e}^{i\langle p, x-a\rangle} f_\xi\left(\tfrac{x+a}{2}, p\right) đp \tag{4.2}$$

Pour $a = 0$, nous notons simplement $\hat{\mathcal{L}} f$ la fonction $\hat{\mathcal{L}}_0 f$

Proposition 4.4. *Nous avons les propriétés suivantes:*

1) *Pout tout $h \in \mathcal{S}(\mathcal{G})$, la restriction à $O(\xi)$ de la transformée de Fourier $\mathcal{F}^W h$ appartient à $s(O(\xi))$ et vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}^q,\ \big(\mathcal{L}_a h\big)(\gamma(x)) = \big(\hat{\mathcal{L}}_a(\mathcal{F}^W h)\big)(x). \tag{4.3}$$

2) *Si $f \in s(O(\xi))$, l'application $(x, a) \mapsto k_f(x, a) = \big(\hat{\mathcal{L}}_a f\big)(x)$ est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q)$.*

3) Si $f \in s(O(\xi))$ vérifie $\hat{\mathcal{L}}_a f = 0$ quel que soit $a \in \mathbb{R}^q$, alors $f = 0$.

4) Pour $f, g \in s(O(\xi))$ et $Q \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$, la relation

$$\sigma_Q \# g = f\,, \tag{4.4}$$

où $(\sigma_Q \# g)_\xi(x,p) = (\sigma_{Q,\xi} \# g_\xi)(x,p)$ avec $\sigma_{Q,\xi}(x,p) = \sigma_Q(\theta_\xi(-x,p))$ et $g_\xi(x,p) = g(\theta_\xi(-x,p))$, est équivalente à

$$\forall a \in \mathbb{R}^q, \pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(Q).\hat{\mathcal{L}}_a g = \hat{\mathcal{L}}_a f\,. \tag{4.5}$$

Démonstration. 1) découle des définitions et de la proposition 1.9.
2) se vérifie à partir de l'expression de $\theta_\xi(x,p)$.
3) est obtenu en posant $x + a = 2u$ et $x - a = v$

$$\forall (u,p) \in \mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^* \quad f_\xi(u,p) = \int_{\mathbb{R}^q} \mathrm{e}^{-i<p,v>} \big(\hat{\mathcal{L}}_{u-\frac{v}{2}} f\big)\big(u + \tfrac{v}{2}\big)\, dv = 0.$$

4) résulte du fait que $\sigma_Q \# f$ est le noyau de l'opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(Q) \circ f_\xi^{\mathrm{Weyl}}(x,D)$ et du point précédent. ∎

5. Hypothèse (H), espace $s(O(\xi))$ et opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$

Définition 5.1. Soient $a \in X$ et τ_a la translation $\mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X), f \mapsto \tau_a f$ définie par $(\tau_a f)(x) = f(x+a)$ et notons $\pi^a_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$, ou plus simplement $\pi^a_\xi(P)$, l'opérateur translaté

$$\pi^a_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P) = \tau_a \circ \pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P) \circ \tau_a^{-1} \tag{5.1}$$

Soit $p \in \mathbb{N}, \mathcal{U}^p(\mathcal{G}) = \oplus_{j=0}^p \mathcal{U}_j(\mathcal{G})$, nous désignons par $\mathrm{H}^p_{\pi^a_\xi}(X)$ l'espace de Sobolev:

$$\mathrm{H}^p_{\pi^a_\xi}(X) = \big\{ u \in L^2(X) \big|\, \pi^a_\xi(Q)u \in L^2(X) \text{ quel que soit } Q \in \mathcal{U}^p(\mathcal{G}) \big\}\,. \tag{5.2}$$

Soit, pour chaque $j \in [0,p]$, une base (Q_{jk}) de $\mathcal{U}_j(\mathcal{G})$, nous posons:

$$|||u|||_{j,\pi^a_\xi} = \Big(\sum_k ||\pi^a_\xi(Q_{jk})u||^2_{L^2(X)} \Big)^{\frac{1}{2}}, \ 0 \le j \le p.$$

L'espace $\mathrm{H}^p_{\pi^a_\xi}(X)$ est muni de la norme

$$||u||_{p,\pi^a_\xi} = \Big(\sum_{j=0}^p |||u|||^2_{j,\pi^a_\xi} \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.3}$$

Pour $a = 0$, nous avons $\pi^a_\xi = \pi_\xi$ et nous retrouvons l'espace défini par (3.3) avec la norme (3.4).

Définition 5.2. Nous disons que $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie l'hypothèse (H) si, pour tout s de $\mathbb{N}$, l'opérateur $\pi_\xi(P) = \pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$ est un homéomorphisme linéaire de $\mathrm{H}^{s+m}_{\pi_\xi}(X)$ sur $\mathrm{H}^s_{\pi_\xi}(X)$.

Proposition 5.3. *Si $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie* (H), *alors*

i) L'opérateur $\pi_\xi^a(P)$ est, pour tout $s \in \mathbb{N}$ un homéomorphisme linéaire de $\mathrm{H}^{s+m}_{\pi_\xi^a}(X)$ sur $\mathrm{H}^{s}_{\pi_\xi^a}(X)$ tel que

$$\|\pi_\xi^a(P)\| = \|\pi_\xi(P)\| \text{ et } \|[\pi_\xi^a(P)]^{-1}\| = \|[\pi_\xi(P)]^{-1}\|\,.$$

ii) Les opérateurs $\pi_\xi(P)$ et $\pi_\xi^a(P)$ sont des isomorphismes d'espaces de Fréchet de $\mathcal{S}(X)$ sur $\mathcal{S}(X)$.

Démonstration. i) résulte des définitions. Prouvons ii), la représentation π_ξ étant irréductible, nous avons $\cap_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{H}^{km}_{\pi_\xi}(X) = \mathcal{S}(X)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(X)$, son antécédent $\psi = [\pi_\xi(P)]^{-1}\varphi$ par l'application $\pi_\xi(P) : \mathrm{H}^{m}_{\pi_\xi}(X) \mapsto L^2(X)$ est un élément de $\mathrm{H}^{m}_{\pi_\xi}(X)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous avons $[\pi_\xi(P)]^k\psi = [\pi_\xi(P)]^{k-1}\varphi \in \mathcal{S}(X)$, donc, d'après l'hypothèse (H), ψ appartient à chaque espace $\mathrm{H}^{km}_{\pi_\xi}(X)$ et par suite à $\mathcal{S}(X)$. Si p est une semi-norme dans $\mathcal{S}(X)$, alors il existe $C > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ assez grand tel que $p(\psi) \le C\|\psi\|_{\mathrm{H}^{km}_{\pi_\xi}(X)}$, la continuité de $\big[[\pi_\xi(P)]^k\big]^{-1}$ de $L^2(X)$ dans $\mathrm{H}^{km}_{\pi_\xi}(X)$ implique que $[\pi_\xi(P)]^{-1}$ est continu de $\mathcal{S}(X)$ dans $\mathcal{S}(X)$. ∎

Définition 5.4. Nous désignons par $\dot{s}(O(\xi))$ l'espace

$$\dot{s}(O(\xi)) = \Big\{ \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^q) \,|\, \forall N \in \mathbb{N},\ \forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^q)^2,$$
$$\exists C = C_{N,\alpha,\beta} > 0 : \left|\left(\partial_x^\alpha \partial_a^\beta \psi\right)(a,x)\right| \le C\Big(1 + |x| + \left\|\xi \circ \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}\gamma_1(a)}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\|\Big)^{-N}\Big\}.$$

Lemme 5.5. *L'espace $\dot{s}(O(\xi))$ possède les propriétés:*

1) La transformée de Fourier ordinaire F par rapport à la seconde variable est un isomorphisme d'espaces de Fréchet de $\dot{s}(O(\xi))$ sur $s(O(\xi))$.

2) Si, pour $\psi \in \dot{s}(O(\xi))$, nous posons

$$(\Lambda\psi)(a,x) = \psi\Big(a + \frac{x}{2}, x\Big),$$

alors nous obtenons un isomorphisme de $\dot{s}(O(\xi))$ sur $\dot{s}(O(\xi))$.

3) Si $f = f(a,p)$ appartient à $s(O(\xi))$, alors $\tau_a(\hat{\mathcal{L}}_a f) = (\Lambda \circ F^{-1})(f) \in \dot{s}(O(\xi))$.

Démonstration. Pour 2), il suffit de remarquer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que:

$$\forall(a,x) \in (\mathbb{R}^q)^2,\ 1 + |x| + \left\|\xi \circ \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}\gamma_1(a-\frac{x}{2})}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\| \le C\Big(1 + |x| + \left\|\xi \circ \mathrm{e}^{-\operatorname{ad}\gamma_1(a)}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\|\Big)^3.$$

Le résultat 3) découle de 1) et 2). ∎

Proposition 5.6. *Soit $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifiant* (H)*.*

Si, pour $a \in X$, nous associons à chaque fonction φ de $\dot{s}(O(\xi))$ la fonction $\psi(a,\cdot)$ définie sur X par $\psi(a,\cdot) = \left(\pi^a_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)\right)^{-1}\varphi(a,\cdot)$, alors la fonction $\psi(a,x)$ est dans $\dot{s}(O(\xi))$ et l'application $\mathcal{Q}_\xi : \dot{s}(O(\xi)) \to \dot{s}(O(\xi)), \varphi \mapsto \psi$ est un isomorphisme d'espaces de Fréchet.

Démonstration. La fonction ψ vérifie $\psi(a,\cdot+a) = \left(\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)\right)^{-1}\varphi(a,\cdot+a)$ et est donc de classe C^∞ sur $X \times X$. Montrons que la fonction $(F\psi)(a,p)$ est dans $s(O(\xi))$. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $4M > q$, nous avons les estimations suivantes avec des constantes $C > 0$,

$$\begin{aligned}
&\left(1+|p|+\left\|\xi \circ \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,\gamma_1(a)}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\|\right)^{2N}\left|\int_{\mathbb{R}^q} \mathrm{e}^{-i<p,x>}\, x^\alpha(\partial_a^\beta\psi)(a,x)dx\right| \\
&\quad\le C\left|\int_{\mathbb{R}^q} \mathrm{e}^{-i<p,x>}\left(1+(-1)^N\sum_{k=1}^q \partial_{x_k}^{2N} + \left\|\xi\circ e^{ad\gamma_1(a)}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\|^{2N}\right)x^\alpha(\partial_a^\beta\psi)(a,x)dx\right| \\
&\quad\le C\left\|(1+|x|^2)^M\left(1+(-1)^N\sum_{k=1}^q \partial_{x_k}^{2N} + \left\|\xi\circ \mathrm{e}^{ad\gamma_1(a)}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\|^{2N}\right)x^\alpha(\partial_a^\beta\psi)(a,x)\right\|_{L^2(X)}.
\end{aligned}$$

D'après (1.13) et (1.14), chaque dérivée ∂_{x_k} est une somme $\sum_{Q\in\mathcal{U}^4(\mathcal{G})}\pi^a_\xi(Q)$, de même, d'après (1.13), $\xi\circ \mathrm{e}^{ad\gamma_1(a)}\big|_{\mathcal{H}_\xi} = \xi\circ \mathrm{e}^{ad[\gamma_1(a+x)-\gamma_1(x)]}\big|_{\mathcal{H}_\xi}$ est de la forme $\sum_{Q_\gamma\in\mathcal{U}^4(\mathcal{G})} x^\gamma\pi^a_\xi(Q_\gamma)$, donc d'après le lemme 5.7 qui suit, nous avons:

$$\left(1+|p|+\left\|\xi\circ \mathrm{e}^{\mathrm{ad}\,\gamma_1(a)}\big|_{\mathcal{H}_\xi}\right\|\right)^{2N}|(\partial_p^\alpha\partial_a^\beta(F\psi))(a,p)| \le \sum_{\alpha'}\|x^{\alpha'}(\partial_a^\beta\psi)(a,\cdot)\|_{8N,\pi^a_\xi}.$$

Le lemme 5.8 ci-dessous avec $km \ge 8N$ permet de majorer le second membre par une combinaison linéaire de semi-normes de φ dans $\dot{s}(O(\xi))$. ∎

Lemme 5.7.

1) *Soit, pour $k = 1,2,\ldots,q$, un champ de vecteurs $U_k = \frac{\partial}{\partial x_k} + c_k(a,x)$ où $c_k \in C^\infty(X\oplus X)$ et $U^\alpha = U_1^{\alpha_1}U_2^{\alpha_2}\ldots U_q^{\alpha_q}$. Nous avons, pour tout $x^\beta = x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\ldots x_q^{\beta_q}$ et pour toute fonction $V\in C^\infty(X\oplus X)$*

$$[U^\alpha V, x^\beta] = \sum_{0\ne\gamma\le\alpha,\gamma\le\beta}\lambda_{\alpha\beta\gamma}(U^{\alpha-\gamma}V)x^{\beta-\gamma}, \tag{5.4}$$

où les $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$ sont des constantes indépendantes de (a,x).

2) *Si $Q = \sum_{||(\alpha,\beta,\gamma)||=|\alpha|+2|\beta|+3|\gamma|=p} a_{\alpha\beta\gamma}X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \in U_p(g)$, alors:*

$$[\pi^a_\xi(Q), x^\beta] = \sum_{\substack{0\ne\gamma\le\beta,|\gamma|\le p\\ Q_{\beta\gamma}\in\mathcal{U}^{p-|\gamma|}(\mathcal{G})}}\pi^a_\xi(Q_{\beta\gamma})x^{\beta-\gamma}. \tag{5.5}$$

Démonstration. Montrons d'abord par récurrence que

$$[U^\alpha, x^\beta] = \sum_{0\neq\gamma\leq\alpha,\gamma\leq\beta} \lambda_{\alpha\beta\gamma} U^{\alpha-\gamma} x^{\beta-\gamma} \ , \quad \lambda_{\alpha\beta\gamma} \text{ constante .}$$

Si $U = U_k$, la propriété est vérifiée car:

$$[U, x^\beta] = \beta_k x_1^{\beta_1} \cdots x_{k-1}^{\beta_{k-1}} x_k^{\beta_k - 1} x_{k+1}^{\beta_{k+1}} \cdots x_q^{\beta_q} = \beta_k x^{\beta - e_k}$$

où $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), 1$ occupant la position k. Supposons qu'elle soit vérifiée pour $U^\alpha = U_1^{\alpha_1} U_2^{\alpha_2} \ldots U_j^{\alpha_j}, 1 \leq j \leq q$, il vient, pour $k \in [j, q]$:

$$\begin{aligned} U^\alpha U_k x^\beta &= (U^\alpha x^\beta) U_k + \beta_k U^\alpha x^{\beta - e_k} \\ &= x^\beta U^\alpha U_k + \sum_{0\neq\gamma\leq\alpha,\gamma\leq\beta} \lambda_{\alpha\beta\gamma} U^{\alpha-\gamma}(x^{\beta-\gamma} U_k) + \beta_k U^\alpha x^{\beta-e_k} \\ &= x^\beta U^\alpha U_k + \sum_{0\neq\gamma\leq\alpha,\gamma\leq\beta} \lambda_{\alpha\beta\gamma} U^{\alpha-\gamma}(U_k x^{\beta-\gamma} + (\gamma_k - \beta_k) x^{\beta-\gamma-e_k}) + \beta_k U^\alpha x^{\beta-e_k}, \end{aligned}$$

donc la propriété est vérifiée pour tout U^α. Nous avons alors (5.4) et nous en déduisons (5.5). ■

Lemme 5.8. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'opérateur $\pi_\xi^a(P) : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(X)$ vérifie*

$$\begin{aligned} &\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \in \mathbb{N}^q, \forall \beta \in \mathbb{N}^q, \exists C > 0 : \\ &\quad \forall a \in X, \quad \left|\left| x^\alpha (\partial_a^\beta \psi)(a, \cdot) \right|\right|_{km, \pi_\xi^a} \leq C \sum_\gamma \sum_{\delta\leq\beta} \left|\left| x^\gamma (\partial_a^\delta \varphi)(a, \cdot) \right|\right|_{(k-1)m, \pi_\xi^a} \end{aligned} \tag{5.6}$$

quelles que soient les fonctions φ et ψ de $C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus \mathbb{R}^q)$ telles que

$$\forall a \in X \quad \varphi(a, \cdot) \in \mathcal{S}(X)\, , \ \psi(a, \cdot) \in \mathcal{S}(X) \quad \text{ et } \quad \pi_\xi^a(P) \cdot \psi(a, \cdot) = \varphi(a, \cdot). \tag{5.7}$$

Démonstration. Par récurrence sur $|\alpha|$ pour $\beta = 0$, puis sur $|\beta|$ à α fixé.
1) Considérons d'abord le cas $\beta = 0$, nous avons

$$\pi_\xi^a(P) \cdot x^\alpha \psi(a, x) = [\pi_\xi^a(P), x^\alpha] \psi(a, x) + x^\alpha \varphi(a, x).$$

D'après la Proposition 5.3, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in X$:

$$\left|\left| x^\alpha \psi(a, x) \right|\right|_{km, \pi_\xi^a} \leq C \Big(\left|\left| [\pi_\xi^a(P), x^\alpha] \psi(a, x) \right|\right|_{(k-1)m, \pi_\xi^a} + \left|\left| x^\alpha \varphi(a, x) \right|\right|_{(k-1)m, \pi_\xi^a} \Big).$$

D'après (5.5), nous avons pour $\alpha \neq 0$,

$$\Big(\left|\left| [\pi_\xi^a(P), x^\alpha] \psi(a, x) \right|\right|_{(k-1)m, \pi_\xi^a} \leq C \sum_{0\neq\gamma\leq\alpha} \left|\left| x^{\alpha-\gamma} \psi(a, x) \right|\right|_{km, \pi_\xi^a}$$

et nous pouvons alors raisonner par récurrence sur $|\alpha|$.

2) Supposons que l'on ait (5.6) pour tout β tel que $|\beta| \leq p$ et montrons que l'on a une inégalité du même type avec β' vérifiant $|\beta'| = p+1$. En dérivant par rapport à a, à l'aide de la formule de Leibniz, la relation $\pi_\xi^a(P)\psi(a,x) = \varphi(a,x)$, nous pouvons, d'après 1), (1.13), (1.14) et (5.5), trouver une constante $C > 0$ (indépendante de φ et ψ) telle que:

$$\forall a \in X, \quad \big|\big|x^\alpha(\partial_a^{\beta'}\psi)(a,\cdot)\big|\big|_{km,\pi_\xi^a} \leq C\Big(\sum_\gamma \big|\big|x^\gamma(\partial_a^{\beta'}\varphi)(a,\cdot)\big|\big|_{(k-1)m,\pi_\xi^a} + \sum_{\gamma'}\sum_{\mu\leq\beta',\,|\mu|\leq p}\big|\big|x^{\gamma'}(\partial_a^\mu\psi)(a,\cdot)\big|\big|_{km,\pi_\xi^a}\Big)$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence:

$$\forall a \in X, \quad \big|\big|x^\alpha(\partial_a^{\beta'}\psi)(a,\cdot)\big|\big|_{km,\pi_\xi^a} \leq C\sum_\gamma\sum_{\delta\leq\beta'}\big|\big|x^\gamma(\partial_a^\delta\varphi)(a,\cdot)\big|\big|_{(k-1)m,\pi_\xi^a}$$

et l'inégalité est établie pour β'. ■

Proposition 5.9. *Si $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie* (H), *alors l'application*

$$L_{P,\xi} : s(O(\xi)) \to s(O(\xi))\,,\ f \mapsto \sigma_P \# f \tag{5.8}$$

est un isomorphisme d'espaces de Fréchet.

Démonstration. L'application $L_{P,\xi}$ est linéaire continue et, d'après 3) et 4) de la proposition 4.4, elle est injective. Pour montrer qu'elle est surjective, considérons une fonction $g \in s(O(\xi))$ et $\varphi = \tau_a(\hat{\mathcal{L}}_a g) \in \dot{s}(O(\xi))$. D'après la proposition 5.6, la fonction $\psi = \mathcal{Q}_\xi\varphi$ appartient à $\dot{s}(O(\xi))$, donc, d'après le lemme 5.5, la fonction $f = F\big(\Lambda^{-1}\psi\big)$ appartient à $s(O(\xi))$ et vérifie

$$\forall a \in \mathbb{R}^q\,,\ \pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)\cdot\hat{\mathcal{L}}_a f = \hat{\mathcal{L}}_a g,$$

soit, d'après 4) de la proposition 4.4, $\sigma_P \# f = g$. ■

6. Hypothèse (H) et inverse de l' opérateur $\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P)$

La démonstration du Théorème principal 6.10 repose sur différents lemmes.

Lemme 6.1.

$$\begin{aligned}&\forall m' \textit{ pair } \in \mathbb{N}, \exists C = C_{m'} > 0 : \forall\psi \in s(O(\xi)), \forall a \in \mathbb{R}^q,\\ &\qquad \|[\Phi(a,p)]^{m'}\psi(a,p)\|_{L_p^2(\mathbb{R}^q)} \leq C\sum_\alpha \|x^\alpha(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{m'+|\alpha|,\pi_\xi^a}\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Posons $\eta = \theta_\xi(-a,p)$. La restriction de η à $\mathcal{G}_2$ ne dépend que de la variable $\bar{a} = (a_{q-n_1'+1},\ldots,a_q)$, de plus, d'après le lemme 1.1 et (1.13), nous pouvons trouver une base $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n_1'}, Y_{n_1'+1}, \ldots, Y_{n_2}$ de $\mathcal{G}_2$ telles que

$$\langle\eta, Y_k\rangle = \langle\xi, Y_k\rangle + a_{q-n_1'+k} \qquad 1 \leq k \leq n_1'$$

et, pour $n'_1+1\leq \ell\leq n_2$, $\langle \eta, Y_\ell\rangle$ ne dépend que de la restriction de ξ à $\mathcal{G}_3$. Nous avons, pour $1\leq k\leq n'_1$,

$$
\begin{aligned}
&\|\langle \eta, Y_k\rangle^{\frac{m'}{2}}\psi(a,p)\|_{L^2_p(\mathbb{R}^q)}\\
&\qquad\leq C\Big(\|\big(\langle \xi, Y_k\rangle + (a_{q-n'_1+k}+x_{q-n'_1+k})\big)^{\frac{m'}{2}}(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^q)}+\\
&\qquad\qquad +\|x^{\frac{m'}{2}}_{q-n'_1+k}(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^q)}\Big)\\
&\qquad\leq C\Big(\|\pi^a_\xi(Y_k^{\frac{m'}{2}})(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^q)} + \|x^{\frac{m'}{2}}_{q-n'_1+k}(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^q)}\Big)\\
&\qquad\leq C\sum_\alpha \|x^\alpha(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{m'+|\alpha|,\pi^a_\xi}.
\end{aligned}
$$

Etudions maintenant $\|\langle\eta, e_{\ell_k}\rangle^{m'}\psi(a,p)\|_{L^2_p(\mathbb{R}^q)}$ où la suite $(e_{\ell_k})_{1\leq k\leq q}$ est donnée par (1.12). Nous pouvons écrire d'après (1.14)

$$\langle \eta, e_{\ell_k}\rangle = p_k - iL_k(a) - iq_k(\bar a)$$

avec L_k forme linéaire et q_k forme quadratique, d'où:

$$\|\langle\eta, e_{\ell_k}\rangle^{m'}\psi(a,p)\|_{L^2_p(\mathbb{R}^q)} = (2\pi)^{\frac{q}{2}}\Big\|\Big(\frac{\partial}{\partial x_k}+L_k(a)+q_k(\bar a)\Big)^{m'}(F^{-1}\psi)(a,x)\Big\|_{L^2_x(\mathbb{R}^q)}.$$

Nous avons:

$$\pi^a_\xi(e_{\ell_k}) = \frac{\partial}{\partial x_k} + L_k(x+a) + q_k(\bar x+\bar a).$$

et il existe une forme bilinéaire b_k sur $\mathbb{R}^{n'_1}\times\mathbb{R}^{n'_1}$ telle que: $q_k(\bar a) = q_k(\bar x+\bar a) + q_k(\bar x) - 2b_k(\bar x+\bar a,\bar x)$. Si nous posons $c_k(\bar a, x) = -L_k(x) + q_k(\bar x) - 2b_k(\bar x+\bar a,\bar x)$, il vient

$$\|\langle\eta, e_{\ell_k}\rangle^{m'}\psi(a,p)\|_{L^2_p(\mathbb{R}^q)} = (2\pi)^{\frac{q}{2}}\|\big(\pi^a_\xi(e_{\ell_k})+c_k(\bar a,x)\big)^{m'}(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{L^2_x(\mathbb{R}^q)}.$$

Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$, l'opérateur $\big(\pi^a_\xi(e_{\ell_k})+c_k(\bar a,x)\big)^n$ est une somme finie de la forme $\sum_{Q\in\mathcal{U}^{n+|\alpha|}(\mathcal{G})}\pi^a_\xi(Q)x^\alpha$, donc il existe alors une constante $C>0$ telle que:

$$\|\langle\eta, e_{\ell_k}\rangle^{m'}\psi(a,p)\|_{L^2_p(\mathbb{R}^q)} \leq C\sum_\alpha\|x^\alpha(F^{-1}\psi)(a,x)\|_{m'+|\alpha|,\pi^a_\xi}.$$

De même, pour $u\in\mathcal{H}_\xi\cap\mathcal{G}_1$, $\langle\eta,u\rangle$ est de la forme $\langle\xi,u\rangle - iL_k(a) - iq_k(\bar a)$, L_k linéaire, q_k quadratique, donc nous avons encore des estimations analogues pour $\|\langle\eta,u\rangle^{m'}\psi(a,p)\|_{L^2_p(\mathbb{R}^q)}$. ∎

Pour simplifier l'écriture, nous notons dans la suite $\phi(x)$ la fonction $\phi(x,p)$ définie en (2.6).

Lemme 6.2. *Les propriétés suivantes sont vérifiées*

$$\forall\alpha\in\mathbb{N}^q, \forall n\in\mathbb{N}, \exists C = C_{\alpha,n}>0 : \|x^\alpha f\|_{m+n+|\alpha|,\pi^a_\xi}\leq C\sum_{\beta\leq\alpha}\|x^\beta g\|_{n+|\beta|,\pi^a_\xi}, \quad (6.1)$$

quelles que soient les fonctions f et g de $\mathcal{S}(X)$ vérifiant $\pi_\xi^a(P).f = g$.

$$\forall\alpha \in \mathbb{N}^q, \forall\beta \in \mathbb{N}^q, \forall n \in \mathbb{N},\ \exists C = C_{\alpha,\beta,n} > 0 :$$

$$\|x^\alpha[\phi(a)]^{2|\beta|}(\partial_a^\beta f)(a,x)\|_{m+n+|\alpha|+|\beta|,\pi_\xi^a} \leq C \sum_{\gamma,\delta} \|x^\delta[\phi(a)]^{2|\gamma|}(\partial_a^\gamma g)(a,x)\|_{n+|\gamma|+|\delta|,\pi_\xi^a}, \tag{6.2}$$

quels que soient $a \in \mathbb{R}^q$ et les fonctions f et g de $\dot{s}(O(\xi))$ vérifiant $\pi_\xi^a(P).f(a,\cdot) = g(a,\cdot)$.

Démonstration. (6.1) se démontre par récurrence sur $|\alpha|$. Nous avons

$$\pi_\xi^a(P)x^\alpha f(x) = [\pi_\xi^a(P), x^\alpha]f(x) + x^\alpha g(x)$$

et nous pouvons montrer, comme au lemme 5.7, que

$$[\pi_\xi^a(P), x^\alpha] = \sum_{\substack{0\neq\beta\leq\alpha, |\beta|\leq m \\ Q_{\alpha\beta}\in\mathcal{U}^{m-|\beta|}(\mathcal{G})}} \pi_\xi^a(Q_{\alpha\beta})x^{\alpha-\beta}.$$

Prouvons (6.2). Nous appliquons (6.1) pour $\beta = 0$, puis nous raisonnons par récurrence sur $|\beta|$ à α fixé. Supposons que (6.2) soit vraie pour tout β vérifiant $|\beta| = p$ et soit β' tel que $|\beta'| = p + 1$. D'après la formule de Leibniz, la relation $\pi_\xi^a(P)f(a,x) = g(a,x)$ implique

$$\pi_\xi^a(P)\cdot(\partial_a^{\beta'} f)(a,x) = (\partial_a^{\beta'} g)(a,x) - \sum_{\mu+\nu=\beta', \mu\neq 0} C_{\beta'}^\mu (\partial_a^\mu \pi_\xi^a(P))(\partial_a^\nu f)(a,x).$$

(6.1) avec n remplacé par $n + |\beta'|$ implique qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\|x^\alpha[\phi(a)]^{2|\beta'|}(\partial_a^{\beta'} f)(a,x)\|_{m+n+|\alpha|+|\beta'|,\pi_\xi^a} \leq{}& \\ C\Big(\sum_{\lambda\leq\alpha} \|x^\lambda[\phi(a)]^{2|\beta'|}(\partial_a^{\beta'} g)(a,x)\|_{n+|\beta'|+|\lambda|,\pi_\xi^a} &+ \\ \sum_{\lambda\leq\alpha, \mu+\nu=\beta', \mu\neq 0} \|x^\lambda[\phi(a)]^{2|\beta'|}(\partial_a^\mu \pi_\xi^a(P))(\partial_a^\nu f)(a,x)\|_{n+|\beta'|+|\lambda|,\pi_\xi^a}\Big)&.\end{aligned}$$

L'opérateur $\partial_a^\mu \pi_\xi^a(P)$ est une somme finie de termes de la forme $\pi_\xi^a(Q_\rho)(\bar{x}+\bar{a})^\rho$ où $\bar{x} = (x_{q-n_1'+1}, \ldots, x_q), \bar{a} = (a_{q-n_1'+1}, \ldots, a_q), \rho \in \mathbb{N}^{n_1'},\ Q_\rho \in \mathcal{U}^{m-\mu'}(\mathcal{G}), \mu' \geq |\mu| \geq |\rho|$. Nous avons

$$x^\lambda \pi_\xi^a(Q_\rho) = \sum_{\sigma\leq\lambda} \pi_\xi^a(Q_{\rho,\sigma})x^\sigma,\ \ Q_{\rho,\sigma} \in \mathcal{U}^{m-\mu'-|\lambda-\sigma|}(\mathcal{G}),$$

donc $\|x^\lambda[\phi(a)]^{2|\beta'|}(\partial_a^\mu \pi_\xi^a(P))(\partial_a^\nu f)(a,x)\|_{n+|\beta'|+|\lambda|,\pi_\xi^a}$ est majorée par une somme finie de termes de la forme

$$\|[\phi(a)]^{2(|\beta'|-|\nu|)}(\bar{x}+\bar{a})^\rho x^\sigma[\phi(a)]^{2|\nu|}(\partial_a^\nu f)(a,x)\|_{m+n+|\beta'|-\mu'+|\sigma|,\pi_\xi^a}$$

avec $|\beta'| - \mu' \leq |\beta'| - |\mu| = |\nu|$ et $|\rho| \leq |\beta'| - |\nu|$ et par suite par

$$C\sum_{\sigma'} \|x^{\sigma'}[\phi(a)]^{2|\nu|}(\partial_a^\nu f)(a,x)\|_{m+n+|\sigma'|+|\nu|,\pi_\xi^a}$$

avec $|\nu| \leq p$, on utilise alors l'hypothèse de récurrence. ■

Lemme 6.3. *Soient B la forme quadratique dans le dual $(\mathbb{R}^q)^* \oplus \mathbb{R}^q$ de $\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*$ donnée par $B(\tau, x) = -\frac{1}{2} < \tau, x >= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \tau_k x_k$ et $B(D) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^q \frac{\partial^2}{\partial a_k \partial p_k}$ l'opérateur différentiel vérifiant $B(D)\, \mathrm{e}^{i<\tau,a>+i<p,x>} = B(\tau, x)\, \mathrm{e}^{i<\tau,a>+i<p,x>}$. Si nous posons, pour $f \in s(O(\xi))$:*

$$(\mathcal{M}f)(a,p) = \int_{\mathbb{R}^q} \mathrm{e}^{-i<p,x>} (\hat{\mathcal{L}}_a f)(x+a)\, dx = \int_{\mathbb{R}^q} \mathrm{e}^{-i<p,x>}\, dx \int_{(\mathbb{R}^q)^*} \mathrm{e}^{i<p',x>} f_\xi\Big(a + \frac{x}{2}, p'\Big)\, đp', \tag{6.3}$$

alors $\mathcal{M}$ est un opérateur linéaire de $s(O(\xi))$ qui possède les propriétés suivantes:

i) $\mathcal{M}f = \exp\{iB(D)\} f_\xi$.

ii) $\mathcal{M}$ *est inversible, d'inverse* $\mathcal{M}^{-1} = \exp\{-iB(D)\}$.

iii) $\|\mathcal{M}f\|_{L^2_{(a,p)}} = \|f_\xi\|_{L^2_{(a,p)}}$.

iv) Si, pour $m' \in \mathbb{R}$, on note $s_{m'}(O(\xi))$ l'espace $s(O(\xi))$ muni de la topologie induite par $S^{m'}(O(\xi)$, alors $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{-1}$ sont continues de $s_{m'}(O(\xi))$ dans $s_{m'}(O(\xi))$.

Démonstration. D'après la définition de $\exp\{iB(D)\} f_\xi$, nous avons:

$$[\exp\{iB(D)\} f_\xi]\,(a', p') = \iint \mathrm{e}^{i<p',x>+i<\tau,a'>-\frac{i}{2}<\tau,x>} đ\tau dx \iint e^{-i<p,x>-i<\tau,a>} f_\xi(a,p) da đp.$$

Mais

$$\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}<\tau,x>} \iint \mathrm{e}^{-i<p,x>-i<\tau,a>} f_\xi(a,p)\, da đp = \iint \mathrm{e}^{-i<p,x>-i<\tau,a''>} f_\xi\Big(a'' - \frac{x}{2}, p\Big)\, da'' đp,$$

d'où i). Nous vérifions de même ii) par des intégrations. Prouvons iii), d'après Plancherel:

$$\|(\mathcal{M}f)_\xi|^2_{L^2_{(a,p)}} = (2\pi)^q \iint_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} \Big| \int_{(\mathbb{R}^q)^*} |\, \mathrm{e}^{i<p',x>} f_\xi\Big(a + \frac{x}{2}, p'\Big)\, đp' \Big|^2 da dx$$
$$= (2\pi)^q \iint_{\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q} |(F^{-1} f_\xi)(a,x)|^2\, da dx = \|f_\xi\|^2.$$

Pour prouver iv), il suffit d'utiliser le théorème 3.5' de [7] après avoir remarqué que la forme quadratique duale g^B de la métrique g par rapport à B est donnée par $g^B_{(x,p)}(x', p') = \frac{1}{16}\big(|x'|^2 \Phi(x,p)^2 + |p'|^2 \phi(x,p)^2\big)$. ∎

Introduisons une partition de l'unité liée à la métrique sur $\mathbb{R}^q$ définie par

$$g_a(y) = \frac{|y|^2}{[\phi(a)]^2} \text{ où } |y| \text{est la norme euclidienne de } y.$$

L'inégalité $\phi(a) \leq 1$ quel que soit $a \in \mathbb{R}^q$ implique que cette métrique est à variation lente: il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que

$$g_a(y) \leq c \Rightarrow \frac{1}{C} g_a(t) \leq g_{a+y}(t) \leq C g_a(t) \text{ quel que soit } t \in \mathbb{R}^q.$$

Pour $\rho > 0$, désignons par $B(a, \rho)$ la boule ouverte

$$B(a, \rho) = \{y \in \mathbb{R}^q \mid g_a(a-y) < \rho^2\},$$

nous avons une partition de l'unité [7]:

Proposition 6.4. *Il existe un réel $R > 0$, une suite $(\gamma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^q)$ et une suite $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ telles que*

i) Il existe $N_0 > 0$ tel que au plus N_0 boules $B(a_\nu, R)$ ont une intersection non vide;

ii) $\mathbb{R}^q = \cup_{\nu\in\mathbb{N}} B(a_\nu, R)$, supp $(\gamma_\nu) \subset B(a_\nu, R)$, $\sum_{\nu\in\mathbb{N}} \gamma_\nu = 1$;

iii) La suite $(\gamma_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace
$S(1, g) \overset{\text{déf}}{=} \{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^q) \mid \forall\alpha \in \mathbb{N}^q, \exists C_\alpha : |(\partial^\alpha\gamma)(x) \leq C_\alpha[\phi(x)]^{-|\alpha|}\}$.

Le lemme technique suivant sera utilisé dans la preuve du théorème principal de cet article.

Lemme 6.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $N \in \mathbb{N}$ vérifiant $N > n + q$, il existe une constante $C > 0$ et une semi-norme $\tilde{\mathrm{N}}$ dans l'espace $S^{n,-N}(O(\xi))$ telles que, pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, pour tout $f \in S^{n,-N}(O(\xi))$ vérifiant* $\mathrm{supp} f(\cdot, p) \subset B_\nu = \big\{a \in \mathbb{R}^q \big| |a - a_\nu| \leq R\phi(a_\nu)\big\}$ *quel que soit p, on ait*

$$\big|\big|[\phi(a)]^n \big(\hat{\mathcal{L}}_a^\xi f\big)(x)\big|\big|_{L^2(\mathbb{R}_a^q \times \mathbb{R}_x^q)} \leq C\tilde{\mathrm{N}}(f) \cdot$$

Démonstration. La fonction $\hat{\mathcal{L}}_a^\xi f$ est définie par l'intégrale oscillante (4.2). Introduisons les nouvelles variables $u = x - a, v = \dfrac{a+x}{2}$ et la fonction $\tilde{f}(u, v) = \big(\hat{\mathcal{L}}_{v-\frac{u}{2}}^\xi f\big)(v + \frac{u}{2}) = \int_{(\mathbb{R}^q)^*} \mathrm{e}^{i<p,u>} f(v, p)\, đp$ sur $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ qui vérifie $\mathrm{supp}\tilde{f}(u, \cdot) \subset B_\nu$ quel que soit u.

Soit M un entier que nous choisirons suffisamment grand et L_p l'opérateur différentiel défini, à partir du laplacien Δ_p, par

$$L_p = \frac{1}{1 + [\phi(v)]^{-2M}|u|^{2M}}(1 + (-1)^M[\phi(v)]^{-2M}\Delta_p^M) \cdot$$

Nous avons $L_p \mathrm{e}^{i<p,u>} = \mathrm{e}^{i<p,u>}$ et $\tilde{f}(u, v) = \displaystyle\int_{(\mathbb{R}^q)^*} \mathrm{e}^{i<p,u>} L_p f(v, p)\, đp$, donc il existe une semi-norme $\tilde{\mathrm{N}}$ dans $S^{n,-N}(O(\xi))$ telles que

$$|\tilde{f}(u, v)| \leq \frac{\tilde{\mathrm{N}}(f)}{1 + [\phi(v)]^{-2M}|u|^{2M}} \int_{(\mathbb{R}^q)^*} [\Phi(v, p)]^{-N+n}[\phi(v)]^{-N}\, đp$$

et une constante $C > 0$ telle que

$$|\tilde{f}(u,v)| \leq \frac{C\tilde{\mathrm{N}}(f)}{1+[\phi(v)]^{-2M}|u|^{2M}} \int_0^{+\infty} \frac{r^{q-1}[\phi(v)]^{-N}}{(r+[\phi(v)]^{-1})^{N-n}}\, dr \cdot$$

Faisons le changement de variable $r = [\phi(v)]^{-1}s$ et prenons $N > n+q$, il vient, avec une constante $C > 0$, $|\tilde{f}(u,v)| \leq \dfrac{C\tilde{\mathrm{N}}(f)[\phi(v)]^{-q-n}}{1+[\phi(v)]^{-2M}|u|^{2M}}$. Il existe également une constante C' telle que $\forall u \in \mathbb{R}^q$, $\forall v \in \mathbb{R}^q$, $\left[\phi\left(v - \frac{u}{2}\right)\right]^n [\phi(v)]^{-n} \leq C'[\phi(u)]^{-n}$ quel que soit $(u,v) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$. Nous avons donc, avec une constante $C > 0$:

$$\left|\left|[\phi(a)]^n \big(\hat{\mathcal{L}}^\xi_a f\big)(x)\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^q_a \times \mathbb{R}^q_x)} \leq \left[C\tilde{\mathrm{N}}(f)\right]^2 \iint_{\mathbb{R}^q \times B_\nu} \frac{[\phi(u)]^{-2n}[\phi(v)]^{-2q}}{(1+[\phi(v)]^{-2M}|u|^{2M})^2}\, dudv\,.$$

En introduisant les nouvelles variables $u' = [\varphi(v)]^{-1}u, v' = v$, nous obtenons:

$$\left|\left|[\varphi(a)]^n \big(\hat{\mathcal{L}}^\xi_a f\big)(x)\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^q_a \times \mathbb{R}^q_x)} \leq \left[C\tilde{\mathrm{N}}(f)\right]^2 \Big(\int_{B_\nu} [\varphi(v')]^{-q}\, dv'\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^q} \frac{[\varphi(u')]^{-2n}}{(1+|u'|^{2M})^2}\, du'\Big).$$

Il existe une constante $c > 0$ telle que $[\varphi(v')]^{-q} \leq c[\varphi(a_\nu)]^{-q}$ quel que soit $v' \in B_\nu$, la première intégrale du deuxième membre est alors majorée par une constante indépendante de ν. La seconde intégrale est finie si on prend M assez grand. ■

Lemme 6.6. *Soit $G \in C^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$ vérifiant*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}\,, \quad \exists C > 0 \ : \quad G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} C|x|^\alpha\,, \tag{6.4}$$

alors, pour toute fonction $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nous avons:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |g(x)|^2 \leq \left|\left|\frac{1}{G}g\right|\right|^2_{L^2(\mathbb{R})} + ||Gg'||^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{6.5}$$

Démonstration. Les fonctions $\dfrac{1}{G}g$ et Gg' sont dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$, donc d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g(x)|^2 &= 2\left|\int_x^{+\infty} \frac{1}{G(t)} g(t)G(t)g'(t)\, dt\right| \\ &\leq 2\left|\int_x^{+\infty} \frac{1}{[G(t)]^2}(g(t))^2\, dt\right|\left|\int_x^{+\infty} [G(t)]^2(g'(t))^2\, dt\right|\end{aligned}$$

et nous en déduisons immédiatement (6.5). ■

Lemme 6.7. *Soit ψ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$, vérifiant*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists C > 0 \ : \qquad \psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} C|x|^\alpha$$

et Ψ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^*_+$, vérifiant les deux propriétés suivantes *i) Il existe un réel β tel que:* $\forall x \in \mathbb{R}, \exists C = C(x) > 0 \;:\; \Psi(x,p) \underset{p \to +\infty}{\sim} C|p|^{\beta}$;

ii) $\forall (x,p) \in \mathbb{R}^2 \,,\; \psi(x)\Psi(x,p) \geq 1\,.$

Pour toute fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, nous avons

$$\sup_{(x,p)\in\mathbb{R}^2} |f(x,p|^2 \leq ||f||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \\ \Big|\Big|\Psi \frac{\partial f}{\partial p}\Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \Big|\Big|\psi \frac{\partial f}{\partial x}\Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \Big|\Big|\psi\Psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p}\Big|\Big|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{6.6}$$

Démonstration. En appliquant deux fois le lemme précédent, nous avons:

$$\begin{aligned}
|f(x,p)|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\psi(x)} |f(x,p)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,p)\Big|^2 dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\psi(x)} \Big[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\Psi(x,p)} |f(x,p)|^2\, dp + \int_{\mathbb{R}} \Psi(x,p) \Big|\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\Big|^2 dp\Big]\, dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \Big[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\Psi(x,p)} \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,p)\Big|^2 dp + \int_{\mathbb{R}} \Psi(x,p) \Big|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p}(x,p)\Big|^2 dp\Big]\, dx \\
&\leq \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\psi(x)\Psi(x,p)} |f(x,p)|^2\, dxdp + \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\Psi(x,p)}{\psi(x)} \Big|\frac{\partial f}{\partial p}(x,p)\Big|^2 dxdp \\
&+ \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\psi(x)}{\Psi(x,p)} \Big|\frac{\partial f}{\partial x}(x,p)\Big|^2 dxdp + \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x)\Psi(x,p) \Big|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p}(x,p)\Big|^2 dxdp.
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété ii), nous obtenons (6.6). ∎

Lemme 6.8. (Inégalité du type Sobolev).

$$\exists C > 0 : \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^q \times (\mathbb{R}^q)^*) \\ \sup_{(x,p)\in\mathbb{R}^q\times(\mathbb{R}^q)^*} |f(x,p)|^2 \leq C \sum_{(\alpha,\beta)\in\{0,1\}^q\times\{0,1\}^q} ||\Phi^{|\alpha|}\phi^{|\beta|}(\partial_p^{\alpha}\partial_x^{\beta} f)||_{L^2(\mathbb{R}^q\times(\mathbb{R}^q)^*)}. \tag{6.7}$$

Démonstration. Il suffit d'établir (6.7) avec les fonctions poids Φ, ϕ remplacées par les fonctions $\tilde{\Phi}$ et $\tilde{\phi}$ de classe C^{∞} données par

$$\tilde{\Phi}(x,p) = (1 + |\eta_1(x,p)|^4 + |\eta_2(x)|^2)^{\frac{1}{4}}\,,\; \tilde{\phi}(x) = (1 + |\eta_2(x)|^2)^{-\frac{1}{4}} \tag{6.8}$$

où les fonctions η_1 et η_2 sont définies par $\eta = \theta_{\xi}(-x,p) = \eta_1(x,p) + \eta_2(x) + \eta_3 \in \mathcal{G}_1^* \oplus \mathcal{G}_2^* \oplus \mathcal{G}_3^*$. et $|\cdot|$ est la norme euclidienne. D'après les estimations de la proposition 2.2, la fonction $\tilde{\Phi}$ vérifie:

$$\forall m \in \mathbb{N},\; \exists C = C_m > 0 : \\ \forall k \in [1,q] \quad \Big|\frac{\partial \tilde{\Phi}^m}{\partial p_k}\Big| \leq C\tilde{\Phi}^{m-1}\,,\; \Big|\frac{\partial \tilde{\Phi}^m}{\partial x_k}\Big| \leq C\tilde{\Phi}^m\tilde{\phi}^{-1} \tag{6.9}$$

et de même la fonction $\tilde{\phi}$ ne dépend que des variables $x_{n_1'+1}, \ldots, x_q$ et vérifie

$$\forall m \in \mathbb{N},\; \exists C = C_m > 0 \;:\; \forall k \in [n_1'+1, q] \quad \Big|\frac{\partial \tilde{\phi}^m}{\partial x_k}\Big| \leq C\tilde{\phi}^{m-1}. \tag{6.10}$$

Les variables x et $p' = (p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_q)$ étant fixées, la fonction de p_k donnée par $\tilde{\Phi}_{x,p'}(p_k) = \tilde{\Phi}(x,p)$ vérifie

$$\exists C > 0 \quad : \qquad |\tilde{\Phi}_{x,p'}(p_k)| \underset{p_k \to +\infty}{\sim} C|p_k|.$$

Egalement, en fixant la variable $x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_q)$ dans $\mathbb{R}^{q-1}$, la fonction de x_k donnée par $\tilde{\phi}_{x'}(x_k) = \tilde{\phi}(x)$ est soit constante, soit équivalente à $C|x_k|^{-\frac{1}{2}}$ quand $x_k \to -\infty$, C constante.

Si les variables $x_2, x_3, \dots, x_q, p_2, p_3, \dots, p_q$ sont fixées, alors la fonction $g(x_1, p_1) = f(x,p)$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et, d'après le lemme 6.8

$$\begin{aligned} |f(x,p)|^2 = |g(x_1,p_1)|^2 \leq \iint_{\mathbb{R}^2} \Big[|f(x,p)|^2 + \Big| \tilde{\Phi}(x,p) \frac{\partial f}{\partial p_1}(x,p) \Big|^2 \\ + \Big| \tilde{\phi}(x) \frac{\partial f}{\partial x_1}(x,p) \Big|^2 + \Big| \tilde{\phi}(x) \tilde{\Phi}(x,p) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial p_1}(x,p) \Big|^2 \Big] \, dx_1 dp_1. \end{aligned}$$

Fixant ensuite les variables $x_1, x_3, \dots, x_q, p_1, p_3, \dots, p_q$, nous majorons les fonctions à intégrer grâce au lemme 6.6 et aux estimations (6.9) et (6.10), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} &\exists C > 0 \, : \forall (x,p) \in \mathbb{R}^q \times (\mathbb{R}^q)^* \qquad |f(x,p)|^2 \leq \\ &C \sum_{(\alpha,\beta) \in \{0,1\}^2 \times \{0,1\}^2} \iint_{\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^*)^2} |\tilde{\Phi}^\alpha(x,p) \tilde{\phi}^\beta(x) (\partial_p^\alpha \partial_x^\beta f)(x,p)|^2 \, dx_1 dx_2 dp_1 dp_2. \end{aligned}$$

Par récurrence, nous avons l'estimation (6.7). ∎

Le symbole σ_P étant un polynôme, la fonction $\sigma_{P,\xi} \# f_\xi$, $f \in s(O(\xi))$, est une somme finie:

$$\left(\sigma_{P,\xi} \# f_\xi \right)(x,p) = \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\beta|} \left(\tfrac{i}{2} \right)^{|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha! \beta!} \left(\partial_x^\alpha \partial_p^\beta \sigma_{P,\xi} \right) \left(\partial_p^\alpha \partial_x^\beta f_\xi \right)(x,p) \, ,$$

cette expression nous permet de prolonger à l'espace $C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*)$ l'application $L_{P,\xi}$ de la proposition 5.9. Pour $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*)$, nous posons

$$\sigma_{P,\xi} \# \varphi = \sum_{\alpha,\beta} (-1)^{|\beta|} \left(\tfrac{i}{2} \right)^{|\alpha|+|\beta|} \frac{1}{\alpha! \beta!} \left(\partial_x^\alpha \partial_p^\beta \sigma_{P,\xi} \right) \left(\partial_p^\alpha \partial_x^\beta \varphi \right)(x,p) \tag{6.11}$$

et nous notons $L_{P,\xi}$ l'application linéaire $C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*) \to C^\infty(\mathbb{R}^q \oplus (\mathbb{R}^q)^*), \varphi \mapsto \sigma_{P,\xi} \# \varphi$.

Proposition 6.9. *Si $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie* (H), *alors l'image de l'application*

$$L_{P,\xi} : S^{-m}(O(\xi)) \to S^0(O(\xi)) \, , \quad f \mapsto \sigma_P \# f \tag{6.12}$$

contient $S^{0,-\infty}(O(\xi))$.

Démonstration. Soit $g \in S^{0,-\infty}(O(\xi))$ et (γ_ν) la partition de l'unité de la proposition 6.4. La fonction $h_{\nu,\xi} = g_\xi \gamma_\nu$ appartient à $s(O(\xi))$ et, d'après la proposition 5.9, il en est de même de $f_{\nu,\xi} = L_{P,\xi}^{-1}(h_{\nu,\xi})$. En tout point (x,p) de $\mathbb{R}^q \times (\mathbb{R}^q)^*$, le nombre d'indices ν tels que $f_{\nu,\xi}(x,p) \neq 0$ est inférieur ou égal au nombre N_0 de la proposition 6.4, donc pour montrer que la fonction $f_\xi = \sum_\nu f_{\nu,\xi}$ appartient à l'espace $S^{-m}(O(\xi))$, il suffit de montrer que la suite $(f_{\nu,\xi})_{\nu \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée de $S^{-m}(O(\xi))$.

La relation $\sigma_P \# f_{\nu,\xi} = h_{\nu,\xi}$ implique, d'après la proposition 4.4 et la définition de l'opérateur $\pi_\xi^a(P)$

$$\pi^a_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(P) \cdot \big[\big(\hat{\mathcal{L}}_a f_{\nu,\xi}\big)(x+a)\big] = \big(\hat{\mathcal{L}}_a h_{\nu,\xi}\big)(x+a). \tag{6.13}$$

D'après *iv)* du lemme 6.3, il suffit alors de prouver que la fonction $\mathcal{M} f_{\nu,\xi}$ est dans $S^{-m}(O(\xi))$ avec des semi-normes indépendantes de ν, donc, compte tenu de $\Phi\phi \geq 1$, de prouver que

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in \mathbb{N}^q, \forall \beta \in \mathbb{N}^q, \exists C_{\alpha,\beta} > 0 \text{ indépendant de } \nu : \\ \sup_{(a,p)\in(\mathbb{R}^q\times(\mathbb{R}^q)^*)} \big[\Phi(a,p)\big]^{m+|\alpha|+|\beta|}\big[\phi(a)\big]^{2|\beta|}\big|\partial_p^\alpha \partial_a^\beta (\mathcal{M} f_{\nu,\xi})(a,p)\big| \leq C_{\alpha,\beta}.\end{gathered} \tag{6.14}$$

Dans ces inégalités, nous pouvons remplacer les fonctions poids Φ, ϕ par les fonctions $\tilde{\Phi}, \tilde{\phi}$ de classe C^∞ données par (6.8). D'après $\tilde{\Phi}\tilde{\phi} \geq 1$, (6.14) est alors une conséquence des deux assertions:

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in \mathbb{N}^q, \forall \beta \in \mathbb{N}^q, m+|\alpha|+|\beta| \text{ pair }, \exists C_{\alpha,\beta} > 0 \text{ indépendant de } \nu : \\ \sup_{(a,p)} \big[\tilde{\Phi}(a,p)\big]^{m+|\alpha|+|\beta|}\big[\tilde{\phi}(a)\big]^{2|\beta|}\big|\partial_p^\alpha \partial_a^\beta (\mathcal{M} f_{\nu,\xi})(a,p)\big| \leq C_{\alpha,\beta}.\end{gathered} \tag{6.15}$$

$$\begin{gathered}\forall \alpha \in \mathbb{N}^q, \forall \beta \in \mathbb{N}^q, m+|\alpha|+|\beta| \text{ impair }, \exists C_{\alpha,\beta} > 0 \text{ indépendant de } \nu : \\ \sup_{(a,p)} \big[\tilde{\Phi}(a,p)\big]^{m+1+|\alpha|+|\beta|}\big[\tilde{\phi}(a)\big]^{2|\beta|+1}\big|\partial_p^\alpha \partial_a^\beta (\mathcal{M} f_{\nu,\xi})(a,p)\big| \leq C_{\alpha,\beta}.\end{gathered} \tag{6.16}$$

Montrons d'abord l'assertion (6.15). Soit la fonction ψ_ν de $s(O(\xi))$

$$\psi_\nu(a,p) = \big[\tilde{\Phi}(a,p)\big]^{m+|\alpha|+|\beta|}\big[\tilde{\phi}(a)\big]^{2|\beta|}\partial_p^\alpha \partial_a^\beta (\mathcal{M} f_{\nu,\xi})(a,p),$$

d'après le lemme 6.8, nous avons à montrer que, pour chaque multi-indice $(\alpha',\beta') \in \{0,1\}^q \times \{0,1\}^q$, les normes $||\Phi^{|\alpha'|}\phi^{|\beta'|}(\partial_p^{\alpha'}\partial_x^{\beta'}\psi_\nu)||_{L^2(\mathbb{R}^q\times(\mathbb{R}^q)^*)}$ sont majorées par des constantes indépendantes de ν.

Considérons d'abord la norme $||\psi_\nu||_{L^2(\mathbb{R}^q\times(\mathbb{R}^q)^*)}$. D'après le lemme 6.1 avec $m' = m + |\alpha| + |\beta|$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned}\forall a \in \mathbb{R}^q,\ \forall \nu \in \mathbb{N},\ &\|\psi_\nu(a,\cdot)\|_{L^2((\mathbb{R}^q)^*)} \leq \\ &C[\phi(a)]^{2|\beta|}\sum_{\alpha'}\big\|x^{\alpha'}\partial_a^\beta\big[\big(\hat{\mathcal{L}}_a f_{\nu,\xi}\big)(x+a)\big]\big\|_{m+|\alpha'|+|\beta|,\pi_\xi^a}.\end{aligned}$$

Le lemme 6.2 et (6.13) impliquent alors l'existence d'une autre constante $C > 0$ telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}^q$ et pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, on ait :

$$\begin{aligned}
\|\psi_\nu(a,\cdot)\|^2_{L^2((\mathbb{R}^q)^*)} &\leq C \sum_{\gamma,\,\delta} \left\| x^\delta [\phi(a)]^{2|\gamma|} \partial_a^\gamma \left[\left(\hat{\mathcal{L}}_a h_{\nu,\xi} \right)(x+a) \right] \right\|^2_{|\gamma|+|\delta|, \pi_\xi^a} . \\
&= C \sum_{\gamma,\,\delta} \left\| [\phi(a)]^{2|\gamma|} \hat{\mathcal{L}}_a (\partial_a^\gamma \partial_p^\delta h_{\nu,\xi})(x) \right\|^2_{|\gamma|+|\delta|, \pi_\xi} \\
&= C \sum_{\gamma,\,\delta} \sum_{Q \in \mathcal{U}^{|\gamma|+|\delta|}} \left\| [\phi(a)]^{2|\gamma|} \left[\pi_{(\xi,\mathcal{H}_\xi)}(Q) \hat{\mathcal{L}}_a (\partial_a^\gamma \partial_p^\delta h_{\nu,\xi}) \right](x) \right\|^2_{L^2_x(\mathbb{R}^q)} \\
&= C \sum_{\gamma,\,\delta} \sum_{Q \in \mathcal{U}^{|\gamma|+|\delta|}} \left\| [\phi(a)]^{2|\gamma|} \hat{\mathcal{L}}_a (\sigma_Q \# (\partial_a^\gamma \partial_p^\delta h_{\nu,\xi}))(x) \right\|^2_{L^2_x(\mathbb{R}^q)}
\end{aligned}$$

Nous appliquons le lemme 6.5 à la fonction $\sigma_Q \# (\partial_a^\gamma \partial_p^\delta h_{\nu,\xi})$ qui appartient à l'espace $S^{2|\gamma|,-N}(O(\xi))$. En choisissant $N > 2|\gamma| + q$, il existe une constante $C > 0$ et des semi-normes $\tilde{\mathrm{N}}_\gamma$ dans $S^{2|\gamma|,-N}(O(\xi))(O(\xi))$ telles que

$$||\psi_\nu||^2_{L^2(\mathbb{R}^q \times (\mathbb{R}^q)^*)} \leq C \sum_{\gamma,\delta} \sum_{Q \in \mathcal{U}^{|\gamma|+|\delta|}} \left[\tilde{\mathrm{N}}_\gamma (\sigma_Q \# (\partial_a^\gamma \partial_p^\delta h_{\nu,\xi})) \right]^2 .$$

D'après (6.11) et la formule de Leibniz, les semi-normes du second membre sont majorées par une constante indépendante de ν.

Soit $(\alpha', \beta') \in \{0,1\}^q \times \{0,1\}^q$, d'après (6.9), (6.10) et à nouveau la formule de Leibniz, le module de $\left[\tilde{\Phi}(a,p)\right]^{|\alpha'|} \left[\tilde{\phi}(a)\right]^{|\beta'|} (\partial_p^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} \psi_\nu)(a,p)$ est majorée par une combinaison linéaire de termes de la forme

$$\left[\tilde{\Phi}(a,p)\right]^{m+|\alpha''|+|\beta''|} \left[\tilde{\phi}(a)\right]^{2|\beta''|} |\partial_p^{\alpha''} \partial_a^{\beta''} (\mathcal{M} f_{\nu,\xi})(a,p)|,$$

nous pouvons alors trouver une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \nu \in \mathbb{N} \; , \quad ||\Phi^{|\alpha'|} \phi^{|\beta'|} (\partial_p^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} \psi_\nu)||_{L^2(\mathbb{R}^q \times (\mathbb{R}^q)^*)} \leq C$$

et nous avons prouvé (6.15). La seconde assertion (6.16) se démontre de manière analogue. ∎

Théorème 6.10. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie graduée de rang 3. Si $P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ vérifie l'hypothèse* (H)*, alors nous pouvons trouver un symbole $q \in S^{-m}(O(\xi))$ tel que :*

$$\sigma_{P,\xi} \# q = 1 \qquad \text{où} \qquad \sigma_{P,\xi}(x,p) = \sigma_P(\theta_\xi(-x,p)). \tag{6.17}$$

Démonstration. D'après le théorème 3.5, il existe $q_0 \in S^{-m}(O(\xi))$ et $r \in S^{0,-\infty}(O(\xi))$ tels que : $\sigma_{P,\xi} \# q_0 = 1 + r$. D'après la proposition 6.9, nous pouvons trouver $f \in S^{-m}(O(\xi))$ tel que $\sigma_{P,\xi} \# f = r$, d'où le théorème. ∎

Références

[1] Arnal, D., and J. C. Cortet, *Nilpotent Fourier transform and applications*, Lett. Math. Phys. **9** (1985), 25–34.

[2] Beals, R., *A general calculus of pseudo-differential operators*, Duke Math. J. **42** (1975), 1–42.

[3] —, *Characterization of pseudo-differential operators and applications*, Duke Math. J. **44** (1977), 45–57.

[4] Christ, M., D. Geller, P. GLowacki, and L. Polin, *Pseudodifferential operators on groups with dilations*, Duke Math. **68** (1992), 31–65.

[5] Geller, D., *Local solvability and homogenoeous distributions on the Heisenberg group*, Commun. Partial Differ. Equations. **5** (1980), 475–560.

[6] Helffer, B., et J. Nourrigat, "Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs,"Progress in Math. **58** (1985).

[7] Hörmander, L., *The Weyl calculus of Pseudo-Differential Operators*, Comm. Pure Appl. Math. **32** (1979), 359–443.

[8] Kirillov, A. A., *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russ. Math. Surveys **17** (1962), 53–104.

[9] Manchon, D., *Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents*, J. reine angew. Math. **418** (1991), 77–129.

[10] Melin, A., *Parametrix constructions for right invariant differential operators on nilpotent groups*, Ann. Global Anal. Geom. **1** (1983), 79–130.

[11] —, *Parametrix constructions for some classes of right invariant differential operators on the Heisenberg group*, Commun. Partial Diff. Equations **6**, (1981) 1363–1405.

[12] Nourrigat, J., *L^2-inequalities and representations of nilpotent groups*, CIMPA School of Harmonic Analysis, Wuhan (China), April-May 1991.

[13] Wildberger, N., "Quantization and Harmonic Analysis on Nilpotent Lie Groups," Ph. D. thesis, Yale University, 1983.

Maxime Gouleau
Département de Mathématiques
CNRS-UMR 6629
Faculté des Sciences et des Techniques
BP92208
F-44322 Nantes Cédex 03
Maxime.Gouleau@math.univ-nantes.fr

Received October 24, 2000
and in final form February 1, 2002