Journal of Lie Theory
Volume **14** (2004) 165–198

Classification des structures CR invariantes pour les groupes de Lie compacts.

Jean-Yves Charbonnel et Hella Ounaïes Khalgui

Communicated by J. Faraut

Abstract. Let G_0 be a compact Lie group of dimension N whose Lie algebra is $\mathfrak{g}_0$. The notion of CR structure on a C^∞ manifold is known a long time ago. In this note we are interested by the CR stuctures on G_0 which are invariant by the left action of the group on the tangent bundle and which are of maximal rank. Such a structure is defined by its fibre $\mathfrak{h}$ at the neutral element which is a subalgebra of the complexification $\mathfrak{g}$ of $\mathfrak{g}_0$ whose dimension is the entire part $[N/2]$ of $N/2$ and whose intersection with $\mathfrak{g}_0$ is equal to $\{0\}$. Up to conjugation by the adjoint group of $\mathfrak{g}_0$, these subalgebras are classified. When N is even, there is only one type, type $CR0$. When N is odd, there are two types, type $CR0$ and type CRI. These types are given in terms of Cartan subalgebras and root systems. In any case, these subalgebras are solvable. Following [3], we introduce the notion of CR structures which are G_0-invariant and invariant by the transverse action of a G_0-invariant Lie subgroup. When this group is commutative, we get the notion of G_0-rigidity. We then prove, when N is odd, that a G_0-invariant CR structure, of maximal rank, is G_0-rigid if and only if the fibre of the CR structure at the neutral element, is of type $CR0$. Following [13], we introduce the canonical fibre bundle K of a G_0-invariant CR structure, of maximal rank, when N is odd. We prove that K contains a closed G_0-invariant form if and only if the fibre of the CR structure at the neutral element, is of type $CR0$ or type $CRII$. As for type $CR0$ and CRI, the $CRII$ type is defined up to conjugation by the adjoint group of $\mathfrak{g}_0$ in terms of Cartan subalgebras an root systems. In fact, every subalgebra of type $CRII$ is of type CRI.

1. Introduction.

Soient X une variété réelle C^∞ de dimension positive N et T un sous fibré de rang r du complexifié du fibré tangent. On note L l'espace des sections C^∞ de T et on dit que T est *formellement intégrable* si L est stable pour la structure d'algèbre de Lie sur les champs de vecteurs sur X.

Définition. Le couple (X,T) est appelé variété CR si T est formellement intégrable et si pour tout x dans X l'intersection de T_x et de $\overline{T_x}$ est nulle. On note T_x la fibre en x de T et $\overline{T_x}$ le conjugué de T_x par la conjugaison du complexifié du fibré tangent dont l'ensemble des points fixes est le fibré tangent à X.

ISSN 0949–5932 / \$2.50

Le fibré T sera dit structure CR de rang maximum sur X si l'entier r est le plus grand entier pour lequel il existe une structure CR de rang r sur X.

Soit G_0 un groupe de Lie compact de dimension N. On désigne par $\mathfrak{g}_0$ l'algèbre de Lie de G_0 et par $\mathfrak{g}$ le complexifié de $\mathfrak{g}_0$. Pour tout ξ dans $\mathfrak{g}_0$ et pour tout g dans G_0, on note $g.\xi$ l'image de ξ par la différentielle en l'élément neutre e de l'application $h \mapsto gh$ de G_0 dans G_0. L'application $(g, \xi) \mapsto g.\xi$ est alors un isomorphisme de $G_0 \times \mathfrak{g}_0$ sur le fibré tangent TG_0 à G_0. Dans ce qui suit, on identifie $G_0 \times \mathfrak{g}_0$ et TG_0 au moyen de cet isomorphisme. Le complexifié $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TG_0$ de TG_0 s'identifie alors à $G_0 \times \mathfrak{g}$. Une structure CR, G_0-invariante, sur G_0 est une structure CR sur G_0 qui est stable par les automorphismes $(g, \xi) \mapsto (hg, \xi)$ de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TG_0$. En particulier, une structure CR sur G_0, qui est G_0-invariante, est déterminée par sa fibre en e qui est une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. L'application $T \mapsto \mathfrak{h}$ est alors une bijection de l'ensemble des structures CR sur G_0, G_0-invariantes, sur l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$.

Dans ce mémoire, on donne une classification des structures CR sur G_0 qui sont de rang maximum et G_0-invariantes. Cela revient à classer les sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ de dimension maximale qui ont une intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. Pour cela, on fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}_0$ de $\mathfrak{g}_0$. On désigne par $\mathfrak{a}$ le complexifié de $\mathfrak{a}_0$, par R l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ et par R_+ un système de racines positives dans R. Conformément à l'usage, pour tout α dans R, on note $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel de poids α. La somme $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ des $\mathfrak{g}_\alpha$, pour α dans R_+, est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ dont tous les éléments sont nilpotents et la somme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ est une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ est l'ensemble des éléments nilpotents. On rappelle que la dimension l de $\mathfrak{a}$ est le rang de $\mathfrak{g}$ et que N est égal à $l + 2n$, en désignant par n le cardinal de R_+. Si $\mathfrak{m}$ est un sous-espace de $\mathfrak{a}$ de dimension $[l/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$, la somme $\Phi(\mathfrak{m})$ de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ est une sous-algèbre de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. Pour x réel, $[x]$ désigne la partie entière de x. On pose alors la définition :

Définition. On dira qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ si elle est conjuguée, sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, à une sous-algèbre $\Phi(\mathfrak{m})$ où $\mathfrak{m}$ est un sous-espace de dimension $[l/2]$ de $\mathfrak{a}$ d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$.

Dans le cas, où N est impair, on introduit l'ensemble $\mathcal{D}(R_+)$ des quadruplets $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ où α est une racine simple de R_+, où $\mathfrak{m}$ est un sous-espace de dimension $[l/2]$ du noyau de α dans $\mathfrak{a}$ dont l'intersection avec $\mathfrak{g}_0$ est nulle, où x est un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$ et où t est un élément de $\mathfrak{a}_0$. Pour tout quadruplet $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ dans $\mathcal{D}(R_+)$, on pose :

$$\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t) = \mathfrak{m} \oplus \bigoplus_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathbb{C}(t + x) \ .$$

Alors $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. On pose alors la définition :

Définition. On dira qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$ si elle est conjuguée, sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, à une sous-algèbre $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ où $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est un élément de $\mathcal{D}(R_+)$.

Dans le cas de la dimension impaire, il n'y a pas d'inclusion entre l'ensemble des sous-algèbres de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ et l'ensemble des sous-algèbres de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$. Néanmoins si $\mathcal{D}(R_+)$ contient $(\alpha, \mathfrak{m}, x, 0)$, alors $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, 0)$ est de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$. En effet, dans ce cas, $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, 0)$ est égal à $\Phi(\mathfrak{m})$. On peut alors énoncer le théorème principal de ce mémoire :

Théorème. *Soit T une structure CR, G_0-invariante, sur G_0 et de rang maximum. Alors T est de rang $[N/2]$ et la fibre de T en e est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de type $CR0$, relativement à $\mathfrak{g}_0$, si N est pair et de type $CR0$ ou CRI, relativement à $\mathfrak{g}_0$, si N est impair. En outre, pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ qui est de type $CR0$, relativement à $\mathfrak{g}_0$, dans le cas N pair, et de type $CR0$ ou CRI, relativement à $\mathfrak{g}_0$, dans le cas N impair, il existe une unique structure CR, G_0-invariante, de rang $[N/2]$, sur G_0 dont la fibre en e est $\mathfrak{h}$.*

Le cas où $\mathfrak{g}_0$ est égal à $\mathfrak{su}_2$ a été étudié par Debiard et Gaveau. Ils ont montré l'existence d'un type de structure CR dans [7]. M. Rais a montré l'existence des deux types de structures CR en identifiant $\mathfrak{su}_2$ et $\mathfrak{so}_3(\mathbb{R})$. Dans le cas de la dimension paire, les structures CR qu'on trouve sont en fait des structures complexes sur la variété analytique sous-jacente à G_0. Dans [14], H. Samelson donne un exemple de structure complexe G_0-invariante sur un groupe de Lie compact de dimension paire. Le premier théorème ci-dessus dit en particulier que les structures analytiques complexes invariantes données par H. Samelson sont les seules. Le cas de la dimension impaire a été étudié par G. Gigante et G. Tomassini [9]. Ils montrent le théorème ci-dessus pour N impair sous une hypothèse de torsion. Le théorème principal de ce mémoire montre en particulier que cette hypothèse de torsion est superflue. Dans [2], M. S. Baouendi et L. P. Rothschild s'intéressent au problème de la réalisation locale d'une structure CR sur X. Il s'agit de trouver un plongement local de la variété X dans un espace $\mathbb{C}^m$ qui est annulé par les sections locales de T. Dans le cas traité ici, c'est toujours possible car les structures sont analytiques. Une démontsration de ce dernier point est donnée dans [15]. M. S. Baouendi et L. P. Rothschild montrent qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel plongement local existe, est que la structure CR soit localement invariante par l'action transverse d'un groupe de Lie. Dans [3] est introduite la notion de structure rigide :

Soient M une variété C^∞ et TM son fibré tangent. On dira que la structure CR T sur M est rigide si elle est invariante par l'action transverse d'un groupe de Lie commutatif. Cela revient à dire qu'il existe une sous-algèbre de Lie commutative $\mathfrak{p}$, de dimension finie, de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur M qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$[\mathfrak{p}, L] \subset L \ , \ T_x \oplus \overline{T_x} \oplus \mathbb{C}\mathfrak{p}(x) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_x M \ ,$$

pour tout x appartenant à M, en désignant par L l'espace des sections C^∞ de T au dessus de M.

Dans le contexte de ce mémoire, on pose par analogie la définition suivante :

Définition. Soit G un groupe de Lie qui opère de manière C^∞ sur une varitété C^∞ X. Soit T une structure CR, G-invariante, sur X. On désigne par TX le fibré tangent à X et par L l'espace des sections C^∞ de T au dessus de X. On dira que T est invariant par la G-action transverse d'un groupe de Lie s'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{p}$, de dimension finie, de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur X qui est G-invariante et qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$[\mathfrak{p}, L] \subset L \ , \ T_x \oplus \overline{T_x} \oplus \mathbb{C}\mathfrak{p}(x) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_x X \ ,$$

où x est dans X.

Dans le cas où $\mathfrak{p}$ est une algèbre commutative, on dira que la structure CR T est G-rigide.

On montre alors le théorème :

Théorème. *On suppose G_0 de dimension impaire. Soit T une structure CR, G_0-invariante, de rang maximum, sur G_0. Alors T est G_0-rigide si et seulement si la fibre en e de T est une sous-algèbre de type $CR0$ de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{g}_0$.*

On remarque en particulier que ce théorème montre en quoi les sous-algèbres de type $CR0$ de $\mathfrak{g}$, relativement à $\mathfrak{g}_0$, sont meilleures que les sous-algèbres de type CRI. Dans [13], H. Jacobowitz s'intéresse au problème de la réalisation locale dans le cas où N est égal à $2M+1$ et où la structure CR est de rang M. Pour cela, il introduit l'espace K des sections globales du fibré canonique relatif à la structure CR. Par définition, K est l'espace des $M+1$-formes différentielles sur X, à valeurs complexes, qui sont annulées par les produits intérieurs par les sections globales de T. En outre, il montre que l'existence d'une forme fermée dans K est liée à une propriété de la $\overline{\partial}_b$-cohomologie de la structure CR sur X. Dans le cas où X est le groupe G_0, on étudie le problème de l'existence d'une forme fermée, G_0-invariante dans K. On est alors conduit à poser la définition suivante :

Définition. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On dira que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CRII$ de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ si elle est conjuguée sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ où $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est un élément de $\mathcal{D}(R_+)$ qui a la propriété suivante :

$$\sum_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} \langle \beta, t \rangle = 0 \ .$$

Par définition, une sous-algèbre de type $CRII$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$. On a alors le théorème :

Théorème. *On suppose G_0 de dimension $2M+1$. Soient T une structure CR sur G_0, G_0-invariante, de rang M et K l'espace des sections globales de son fibré canonique. Alors les conditions suivantes :*

1) *la fibre en e de T est une sous-algèbre de type $CR0$ ou de type $CRII$ relativement à $\mathfrak{g}_0$,*

2) *K contient une forme fermée G_0-invariante et non nulle,*

sont équivalentes.

La suite de ce mémoire est divisée en 6 sections. Dans la section 2, on montre qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$ est résoluble. Pour cela, on utilise une propriété métrique des groupes semi-simples réels. On rappelle aussi une propriété élémentaire des sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$. Dans la section 3, on introduit les sous-algèbres de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ et on en donne une caractérisation géométrique. En particulier, une sous-algèbre de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$ est de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ si et seulement si elle est normalisée par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Dans la section 4, on introduit les sous-algèbres de type CRI et de type $CRII$ relativement à $\mathfrak{g}_0$, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de dimension impaire. On donne une caractérisation géométrique des sous-algèbres de type $CR0$ ou de type CRI. En particulier, une sous-algèbre de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$ est de type $CR0$ ou de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$ si et seulement si le sous-espace de ses éléments nilpotents est de dimension $n-1$ ou n et normalisé par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On montre en outre que tout automorphisme de $\mathfrak{g}_0$ laisse stable chacun des trois types, $CR0$, CRI, $CRII$, de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. On montre dans la section 6 que toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$ est de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ dans le cas de la dimension paire et de type $CR0$ ou CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$ dans le cas de la dimension impaire. Pour cela, on raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$ en utilisant les centralisateurs dans $\mathfrak{g}$ de sous-algèbres commutatives non centrales de $\mathfrak{g}_0$. On commence par monter que le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$ contient une sous-algèbre commutative non centrale. Dans la section 5, on donne quelques lemmes utiles aux démonstrations de 6. On termine la section 5 par deux lemmes qui montrent un corollaire dont découle une partie du deuxième théorème. Enfin dans la section 7, on donne les trois théorèmes avec leurs démonstrations.

2. Sous-algèbres résolubles.

Soit G_0 un groupe compact connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}_0$. Puisque G_0 est un groupe compact, il a une représentation fidèle dans un espace vectoriel réel V_0 de dimension finie. On désigne par V le complexifié de V_0 et on identifie $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ des endomorphismes de V. La sous-algèbre $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(V)$ est alors réductive et algébrique. On trouvera en [6](Ch. II, §14) une introduction à la notion de sous-algèbres algébriques. On note G le sous-groupe analytique de $\mathrm{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On rappelle que $[x]$ désigne la partie entière du nombre réel x. Le but de cette section est la proposition :

Proposition. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. Alors $\mathfrak{h}$ est résoluble.*

2.1 Puisque la représentation de G_0 dans V_0 est fidèle, G_0 s'identifie au sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Soit H le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$. On désigne par $\overline{H}$ l'adhérence de H dans G.

Lemme 2.1. *Soient $\mathfrak{q}$ la somme $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{h}$ et $\tilde{\mathfrak{h}}$ l'algèbre de Lie de $\overline{H}$.*

i) *La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\tilde{\mathfrak{h}}$ est un idéal.*

ii) *Le sous-espace $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{g}$ est un sous-espace réel de codimension au plus* 1 *de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{g}_0$. En outre, lorsque N est pair, $\mathfrak{q}$ est égal à $\mathfrak{g}$.*

i) La sous-algèbre $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ de $\mathfrak{g}$ est algébrique d'après [6](Ch. II, Théorème 15). En outre, elle est l'algèbre de Lie du sous-groupe dérivé $[H, H]$ de H ; donc $[H, H]$ est un sous-groupe fermé de G. Par suite, $[H, H]$ contient les commutateurs du sous-groupe $\overline{H}$; donc $[H, H]$ est le sous-groupe dérivé de $\overline{H}$ et $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]$ est l'algèbre dérivée de $\tilde{\mathfrak{h}}$. En particulier, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\tilde{\mathfrak{h}}$.

ii) Puisque l'intersection de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}_0$ est nulle, la dimension du sous-espace réel $\mathfrak{q}$ est égale à :

$$2[\frac{N}{2}] + N \ .$$

Lorsque N est pair, cet entier est égal à $2N$. Quand N est impair, cet entier est égal à $2N - 1$, d'où l'assertion.

2.2 Soit X la variété des classes à gauche de G modulo G_0. On note θ l'application canonique de G sur X et $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ l'algèbre de Lie réelle sous-jacente à $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{g}_0$ est une forme réelle de $\mathfrak{g}$, G_0 est un sous-groupe compact maximal de G. Soit B une extension non dégénérée à $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ de la forme de Killing de l'algèbre dérivée de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. Il résulte alors de [10](Ch. V, Theorem 3.1) que pour un bon choix de B, B définit sur X une structure riemannienne G-invariante à courbure négative.

Proposition 2.2. *Soit Y l'image de $\overline{H}$ par θ. Alors Y est une sous-variété fermée connexe de X. En outre, la restriction à Y de la structure riemannienne sur X est une structure riemannienne à courbure négative.*

Soit τ l'application :

$$\overline{H} \times G_0 \to G \ , \ (g, h) \mapsto gh \ .$$

Puisque G_0 est compact, l'image de τ est fermée dans G ; or cette image est l'image réciproque de Y par θ ; donc Y est fermé dans X car θ est une application ouverte. En outre, Y est l'orbite sous $\overline{H}$ du point $\theta(G_0)$ de X ; donc Y est une sous-variété fermée connexe de X car $\overline{H}$ est connexe.

On note x_0 l'image de G_0 par θ, ρ la structure riemannienne sur X, $\tilde{D}$ la connexion de Levi-Cività sur X et D la connexion de Levi-Cività sur Y. Soient $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$ relativement à B et $\mathfrak{p}'$ l'intersection de $\mathfrak{p}$ avec $\mathfrak{g}_0 + \tilde{\mathfrak{h}}$. D'après l'assertion (ii) du lemme 2.1, $\mathfrak{p}'$ est un sous-espace de codimension au plus 1 de $\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{p}'$ est égal à $\mathfrak{p}$, X est égal à Y. On peut donc supposer $\mathfrak{p}'$ distinct de $\mathfrak{p}$. On désigne par ν un champ de vecteurs sur un ouvert X' de X qui contient x_0 et qui est normal à Y en tout point de l'intersection Y' de X' et de Y. Soit $\mathcal{E}$ l'espace des champs de vecteurs sur X' qui sont tangents à Y en tout point de Y'. Si ξ est un champ de vecteurs sur X', on désigne par le même symbole sa restriction à Y'. Il existe alors une fonction λ et une seule sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$, à valeurs dans l'espace des fonctions sur Y', qui est définie par la relation suivante :

$$\tilde{D}_\xi \eta = D_\xi \eta + \lambda(\xi, \eta) \nu \ ,$$

pour tout ξ et pour tout η dans $\mathcal{E}$.

D'après les relations satisfaites par les connexions, λ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$.

Assertion. *Pour tout ξ et pour tout η dans $\mathcal{E}$, on a la relation :*

$$\lambda(\xi,\eta) = -\rho(\eta,\tilde{D}_\xi\nu)\ .$$

Pour tout champ de vecteurs ξ sur X' et pour toute fonction ϕ sur X', on note $\xi.\phi$ la dérivée de Lie de ϕ dans la direction définie par ξ. Puisque η et ξ sont dans $\mathcal{E}$, les fonctions $\rho(\eta,\nu)$ et $\xi.\rho(\eta,\nu)$ sont nulles sur Y' ; or la fonction $\rho(D_\xi\eta,\nu)$ sur Y' est nulle et on a :

$$\xi.\rho(\eta,\nu) = \rho(\tilde{D}_\xi\eta,\nu) + \rho(\eta,\tilde{D}_\xi\nu)\ ;$$

donc d'après la définition de λ, il vient :

$$\lambda(\xi,\eta) = -\rho(\eta,\tilde{D}_\xi\nu)\ .$$

On désigne par $\tilde{R}$ la courbure sur X et par R la courbure sur Y.

Assertion. *Soient ξ, η, ζ dans $\mathcal{E}$. Alors le champ de vecteurs sur Y' :*

$$\tilde{R}(\xi,\eta)\zeta - R(\xi,\eta)\zeta + \rho(\zeta,\tilde{D}_\eta\nu)\tilde{D}_\xi\nu - \rho(\zeta,\tilde{D}_\xi\nu)\tilde{D}_\eta\nu\ ,$$

est le produit de ν et d'une fonction sur Y'.

D'après la première assertion, on a :

$$D_\xi D_\eta\zeta = D_\xi(\tilde{D}_\eta\zeta + \rho(\zeta,\tilde{D}_\eta\nu)\nu)$$

$$= \ \tilde{D}_\xi\tilde{D}_\eta\zeta + \rho(\tilde{D}_\eta\zeta,\tilde{D}_\xi\nu)\nu + \rho(\zeta,\tilde{D}_\eta\nu)\tilde{D}_\xi\nu + \xi.\rho(\zeta,\tilde{D}_\eta\nu)\nu + \rho(\zeta,\tilde{D}_\eta\nu)\rho(\tilde{D}_\xi\nu,\nu)\nu\ .$$

En outre, on a :

$$D_{[\xi,\eta]}\zeta = \tilde{D}_{[\xi,\eta]}\zeta + \rho(\zeta,\tilde{D}_{[\xi,\eta]}\nu)\nu\ ;$$

donc il vient :

$$R(\xi,\eta)\zeta = \tilde{R}(\xi,\eta)\zeta + \rho(\zeta,\tilde{D}_\eta\nu)\tilde{D}_\xi\nu - \rho(\zeta,\tilde{D}_\xi\nu)\tilde{D}_\eta\nu + \psi\nu\ ,$$

où ψ est une fonction sur Y'. ∎

Pour tout ξ dans $\mathfrak{p}$, on désigne par ξ^* le champ de vecteurs G-invariant sur X dont la valeur en x_0 est l'image de ξ par l'application linéaire tangente à θ en l'élément neutre. Pour tout ξ dans $\mathfrak{p}'$, la restriction de ξ^* à X' appartient à $\mathcal{E}$.

Assertion. *Soient ξ et η dans $\mathfrak{p}'$. Alors on a :*

$$\rho(R(\xi^*,\eta^*)\eta^*,\xi^*) = \rho(\tilde{R}(\xi^*,\eta^*)\eta^*,\xi^*) + \rho(\tilde{D}_{\eta^*}\eta^*,\nu)\rho(\tilde{D}_{\xi^*}\xi^*,\nu) - \rho(\tilde{D}_{\xi^*}\eta^*,\nu)\rho(\tilde{D}_{\eta^*}\xi^*,\nu)\ .$$

Puisque ν est orthogonal à ξ^* sur Y', l'égalité suivante résulte de la deuxième assertion :

$$\rho(R(\xi^*,\eta^*)\eta^*,\xi^*) = \rho(\tilde{R}(\xi^*,\eta^*)\eta^*,\xi^*) + \rho(\eta^*,\tilde{D}_{\eta^*}\nu)\rho(\tilde{D}_{\xi^*}\nu,\xi^*) - \rho(\eta^*,\tilde{D}_{\xi^*}\nu)\rho(\tilde{D}_{\eta^*}\nu,\xi^*)\ .$$

Puisque les fonctions $\rho(\eta^*,\nu)$ et $\rho(\xi^*,\nu)$ sont nulles sur Y', on a :

$$\rho(\eta^*,\tilde{D}_{\eta^*}\nu) = -\rho(\tilde{D}_{\eta^*}\eta^*,\nu)\ ,\ \rho(\xi^*,\tilde{D}_{\xi^*}\nu) = -\rho(\tilde{D}_{\xi^*}\xi^*,\nu)\ ,$$

$$\rho(\eta^*,\tilde{D}_{\xi^*}\nu) = -\rho(\tilde{D}_{\xi^*}\eta^*,\nu)\ ,\ \rho(\xi^*,\tilde{D}_{\eta^*}\nu) = -\rho(\tilde{D}_{\eta^*}\xi^*,\nu)\ ,$$

d'où l'assertion. ∎

Par définition, le groupe $\overline{H}$ opère transitivement sur Y ; or la structure riemannienne sur X étant G- invariante, la structure riemannienne sur Y est $\overline{H}$- invariante ; donc il suffit de montrer que pour tout ξ et pour tout η dans $\mathfrak{p}'$, la valeur en x_0 de la fonction $\rho(R(\xi^*, \eta^*)\eta^*, \xi^*)$ est négative. D'après [10](Ch. IV, Theorem 4.2), la valeur en x_0 de $\tilde{R}(\xi^*, \eta^*)\eta^*$ est égale à $[\eta, [\xi, \eta]]$ et d'après [10](Ch. IV, Theorem 4.1 and Theorem 4.3, (iii)), les valeurs en x_0 de $\tilde{D}_{\eta^*}\eta^*$ et $\tilde{D}_{\xi^*}\xi^*$ sont respectivement égales à η et ξ ; donc d'après la troisième assertion, la valeur en x_0 de $\rho(R(\xi^*, \eta^*)\eta^*, \xi^*)$ est égale à :

$$B([\xi, \eta], [\xi, \eta]) - \rho(\tilde{D}_{\xi^*}\eta^*, \nu)(x_0)\rho(\tilde{D}_{\eta^*}\xi^*, \nu)(x_0) .$$

D'après les propriétés d'une connexion, on a :

$$\tilde{D}_{\xi^*}\eta^* - \tilde{D}_{\eta^*}\xi^* = [\xi^*, \eta^*] ;$$

or $\mathfrak{g}_0$ contient $[\xi, \eta]$ et $\mathfrak{g}_0$ est orthogonal à la valeur en x_0 de ν pour B ; donc les valeurs en x_0 de $\rho(\tilde{D}_{\xi^*}\eta^*, \nu)$ et de $\rho(\tilde{D}_{\eta^*}\xi^*, \nu)$ sont égales. Puisque $B([\xi, \eta], [\xi, \eta])$ est négatif, la valeur en x_0 de $\rho(R(\xi^*, \eta^*)\eta^*, \xi^*)$ est négative.

2.3 Dans cette section, on démontre la proposition 2. On suppose $\mathfrak{h}$ non résoluble. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ contient alors une sous-algèbre semi-simple $\mathfrak{s}$. Soient $\mathfrak{k}$ une forme compacte de $\mathfrak{s}$ et K le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Alors K est un sous-groupe semi-simple, compact, connexe de $\overline{H}$. D'après le lemme 2.1, il suffit de trouver un élément h de $\overline{H}$ pour lequel $h^{-1}Kh$ est contenu dans G_0. Cela revient à dire que le point $\theta(h)$ de la sous-variété Y de X est fixe pour l'action de K dans X.

Puisque K est un sous-groupe de $\overline{H}$, Y est invariant par l'action de K. On note $\tilde{Y}$ le revêtement universel de Y et $\tilde{K}$ le revêtement universel de K. Il existe alors une unique action de $\tilde{K}$ dans $\tilde{Y}$ qui définit par passage au quotient l'action de K dans Y. De même, il existe sur $\tilde{Y}$ une unique structure riemannienne qui définit par passage au quotient la structure riemannienne sur Y. D'après la proposition 2.2, la structure riemannienne sur $\tilde{Y}$ est invariante par $\tilde{K}$, complète et à courbure négative. Puisque K est compact et semi-simple, $\tilde{K}$ est compact ; donc d'après [10](Ch. I, Theorem 13.5), l'action de $\tilde{K}$ dans $\tilde{Y}$ a un point fixe. Par suite, l'action de K dans Y a un point fixe.

2.4 On rappelle qu'une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathfrak{g}$ et qu'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre commutative maximale de $\mathfrak{g}_0$. Les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ sont conjuguées sous l'action adjointe de G_0 dans $\mathfrak{g}_0$ d'après [11](Theorem 34.4). La dimension l d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ est le rang de $\mathfrak{g}_0$ et de $\mathfrak{g}$. On note $2n$ le nombre de racines dans $\mathfrak{g}$ d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Lemme 2.3. *Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Alors l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. En outre, toute sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ est conjuguée à $\mathfrak{b}$ sous l'action adjointe de G_0.*

Puisque $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, sa dimension est $l+n$. Soit $\mathfrak{t}_0$ l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$. Alors $\mathfrak{t}_0$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}_0$; or tous les éléments de $\mathfrak{g}_0$ sont semi-simples ; donc $\mathfrak{t}_0$ est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}_0$ et sa dimension est au plus égale à l. Les dimensions des espaces vectoriels réels sous-jacents à $\mathfrak{b}$ et à $\mathfrak{g}$ sont respectivement $2l+2n$ et $2l+4n$; or $\mathfrak{g}_0$ est de dimension $l+2n$; donc $\mathfrak{t}_0$ est de dimension au moins $3l+4n-(2l+4n)$. Par suite, $\mathfrak{t}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$.

Soient $\mathfrak{d}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{s}_0$ son intersection avec $\mathfrak{g}_0$. Alors $\mathfrak{s}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$; or les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ sont conjuguées sous l'action adjointe de G_0 dans $\mathfrak{g}_0$; donc $\mathfrak{d}$ est conjuguée sous l'action adjointe de G_0 à une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{t}_0$. D'après [11](24.1, Proposition A), le groupe de Weyl de $\mathfrak{t}_0$ permute les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ qui contiennent $\mathfrak{t}_0$; donc $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{d}$ sont conjugués sous l'action adjointe de G_0 dans $\mathfrak{g}$.

3. Sous-algèbres de type $CR0$.

Comme en 2, G_0 est un sous-groupe connexe compact du groupe des automorphismes linéaires d'un espace vectoriel réel de dimension finie et $\mathfrak{g}$ est le complexifié de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$. Dans cette section, on définit une classe de sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Pour cela on utilisera les notations qui suivent et qui resteront fixées dans la suite de ce mémoire. Soient $\mathfrak{a}_0$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{a}$ son complexifié. Alors $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. On note R le système de racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ et on choisit un système de racines positives R_+ dans R. Conformément à l'usage, pour tout α dans R, $\mathfrak{g}_\alpha$ désigne le sous-espace poids, de poids α, de l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$. On note l la dimension de $\mathfrak{a}$ et n le cardinal de R_+. Alors la dimension N de $\mathfrak{g}$ est égale à $l+2n$. On désigne par $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans R_+ et $\mathfrak{b}$ la somme $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. Alors $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ est le sous-espace de ses éléments nilpotents.

3.1 Soient V_0 un espace vectoriel réel de dimension m et V son complexifié. On note $v \mapsto \overline{v}$ la conjugaison de V dont l'ensemble des points fixes est V_0.

Lemme 3.1. *Soit W un sous-espace de V dont l'intersection avec V_0 est nulle. Alors la dimension de W est au plus égale à $[m/2]$. En outre, il existe des sous-espaces de V de dimension $[m/2]$ et d'intersection nulle avec V_0.*

L'intersection de W et de $\overline{W}$ est un sous espace de V qui est engendré par son intersection avec V_0 ; or l'intersection de W et de V_0 est nulle ; donc l'intersection de W et de $\overline{W}$ est nulle. Par suite, la dimension de la somme de W et de $\overline{W}$ est le double de la dimension de W ; donc la dimension de W est au plus égale à $[m/2]$. On note p l'entier $[m/2]$ et $v_1,\ldots,v_{2p}$ des vecteurs linéairement indépendants de V_0. Alors les vecteurs de V :

$$v_1+iv_2\ ,\ldots,\ v_{2p-1}+iv_{2p}\ ,$$

sont linéairement indépendants et engendrent un sous-espace d'intersection nulle avec V_0.

3.2 Pour tout sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$, $\Phi(\mathfrak{m})$ désigne la somme de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$.

Proposition 3.2. *Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace de $\mathfrak{a}$ dont l'intersection avec $\mathfrak{a}_0$ est nulle.*

i) *Le sous-espace* $\Phi(\mathfrak{m})$ *est une sous-algèbre résoluble de* $\mathfrak{g}$*, d'intersection nulle avec* $\mathfrak{g}_0$.

ii) *Si la dimension de* $\mathfrak{m}$ *est égale à* $[l/2]$*,* $\Phi(\mathfrak{m})$ *est une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *d'intersection nulle avec* $\mathfrak{g}_0$ *et de dimension maximale.*

i) Puisque $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{m}$, il contient $\Phi(\mathfrak{m})$. Puisque $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{b}$ et que $\Phi(\mathfrak{m})$ contient $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$, $\Phi(\mathfrak{m})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{b}$. Par suite, $\Phi(\mathfrak{m})$ est résoluble. La sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{a}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ est contenue dans $\mathfrak{b}$; donc d'après le lemme 2.3, $\mathfrak{a}_0$ est l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$. Par suite, l'intersection de $\Phi(\mathfrak{m})$ et de $\mathfrak{g}_0$ est contenue dans l'intersection de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{g}_0$; or $\mathfrak{m}$ est l'intersection de $\mathfrak{a}$ et de $\Phi(\mathfrak{m})$; donc l'intersection de $\Phi(\mathfrak{m})$ et de $\mathfrak{g}_0$ est nulle car l'intersection de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{a}_0$ est nulle.

ii) On suppose $\mathfrak{m}$ de dimension $[l/2]$. Alors $\Phi(\mathfrak{m})$ est de dimension $[N/2]$; donc d'après le lemme 3.1, $\Phi(\mathfrak{m})$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$ et de dimension maximale.

Définition 3.3. On dira qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ si elle est conjuguée, sous l'action adjointe de G_0 dans $\mathfrak{g}$, à une sous-algèbre $\Phi(\mathfrak{m})$ où $\mathfrak{m}$ est un sous-espace de dimension $[l/2]$ de $\mathfrak{a}$ d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. Dans le cas où $\mathfrak{g}_0$ est fixé, on dira qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est de type $CR0$ lorsqu'elle est de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$.

3.3 Si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, on note $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ son normalisateur dans $\mathfrak{g}$.

Proposition 3.4. *Soit* $\mathfrak{h}$ *une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}$ *de dimension* $[N/2]$ *et d'intersection nulle avec* $\mathfrak{g}_0$*. On note* $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ *l'ensemble des éléments nilpotents de* $\mathfrak{h}$.

i) *La sous-algèbre* $\mathfrak{h}$ *est de type* $CR0$ *relativement à* $\mathfrak{g}_0$ *si et seulement si* $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ *contient une sous-algèbre de Cartan de* $\mathfrak{g}_0$.

ii) *La sous-algèbre* $\mathfrak{h}$ *est de type* $CR0$ *si et seulement si* $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ *contient le sous-espace des éléments nilpotents d'une sous-algèbre de Borel de* $\mathfrak{g}$.

D'après la proposition 2, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$; donc $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

i) Pour tout sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}$ normalise la sous-algèbre $\Phi(\mathfrak{m})$ définie en 3.2 ; or toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}_0$ conjuguée à $\mathfrak{a}_0$ sous l'action adjointe de G_0 est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$; donc $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ si $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$. Réciproquement, on suppose que $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ contient une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Puisque les sous-algèbres de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ sont conjuguées à $\mathfrak{a}_0$ sous l'action adjointe de G_0, on peut supposer que $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ contient $\mathfrak{a}$. Alors $\mathfrak{a}$ normalisant $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$; donc il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{h}$. D'après le lemme 2.3, $\mathfrak{d}$ est conjugué à $\mathfrak{b}$ sous l'action adjointe de G_0 ; donc on peut supposer $\mathfrak{b}$ égal à $\mathfrak{d}$. Les poids de l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{h}$ sont alors soit nuls soit contenus dans R_+. Soit P l'ensemble des éléments de R_+ pour lesquels $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{g}_\alpha$. On note $\mathfrak{g}^P$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{g}^P = \bigoplus_{\alpha\in P} \mathfrak{g}_\alpha \ .$$

Puisque $\mathfrak{a}$ nomalise $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ est la somme de $\mathfrak{g}^P$ et d'un sous-espace $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}$, d'après [5](Ch. VIII, §3, Proposition 1). Puisque l'intersection de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{a}_0$ est nulle, la dimension de $\mathfrak{m}$ est au plus égale à $[l/2]$ d'après le lemme 3.1 ; or la dimension de $\mathfrak{h}$ est $[N/2]$ et le cardinal de P est au plus égal à n ; donc $\mathfrak{m}$ est de dimension $[l/2]$, P est égal à R_+ et $\mathfrak{h}$ est égal à $\Phi(\mathfrak{m})$. Par suite, $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$.

ii) Par définition, la condition est nécessaire. On suppose que $\mathfrak{h}_{\rm u}$ contient le sous-espace des éléments nilpotents d'une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est résoluble, il est contenu dans une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$; donc d'après le lemme 2.3, on peut supposer que $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{h}_{\rm u}$. Alors $\mathfrak{b}_{\rm u}$ est égal à $\mathfrak{h}_{\rm u}$ car la dimension de $\mathfrak{h}_{\rm u}$ est au moins égale à celle de $\mathfrak{b}_{\rm u}$; or $\mathfrak{b}_{\rm u}$ contient $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$; donc $\mathfrak{a}_0$ normalise $\mathfrak{h}$. Il résulte de (i) que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CR0$.

4. Sous-algèbres de type CRI et de type $CRII$.

Dans cette section, on suppose la dimension N de $\mathfrak{g}$ impaire. On définit les notions de sous-algèbre de type CRI et de type $CRII$ relativement à $\mathfrak{g}_0$. Par définition, toute sous-algèbre de type $CRII$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ est de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$. Comme en 2, $\mathfrak{g}$ est identifié à une sous-algèbre algébrique de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel complexe de dimension finie et le groupe G_0 est un groupe connexe compact d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. On utilise les notations $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}$, R, R_+, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_{\rm u}$ de 3. On rappelle que l est le rang de $\mathfrak{g}$, que $2n$ est le cardinal de R et que N est égal à $l+2n$. Puisque N est impair, l est impair.

4.1 Soit $\mathcal{D}(R_+)$ l'ensemble des quadruplets $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ où α est une racine simple de R_+, où $\mathfrak{m}$ est un sous-espace de dimension $[l/2]$ du noyau de α dans $\mathfrak{a}$ dont l'intersection avec $\mathfrak{g}_0$ est nulle, où x est un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$ et où t est un élément de $\mathfrak{a}_0$. Pour tout quadruplet $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ dans $\mathcal{D}(R_+)$, on pose :

$$\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t) = \mathfrak{m} \oplus \bigoplus_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{g}_\beta \oplus \mathbb{C}(t+x) \ .$$

Lemme 4.1. *Soit $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ dans $\mathcal{D}(R_+)$. Alors le sous-espace $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de dimension $[N/2]$ dont l'intersection avec $\mathfrak{g}_0$ est nulle.*

La dimension de $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est $(l-1)/2+n$; or N est égal à $l+2n$; donc $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est de dimension $[N/2]$. Soit $\mathfrak{p}$ la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}_\beta$ où β est dans $R_+ \setminus \{\alpha\}$. Puisque α est une racine simple, $\mathfrak{p}$ est un idéal de $\mathfrak{b}$; or α étant nul sur $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}$ centralise $t+x$; donc $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. D'après le lemme 2.3, $\mathfrak{a}_0$ est l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$; or l'intersection de $\mathfrak{a}$ et de $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est égale à $\mathfrak{m}$; donc l'intersection de $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ et de $\mathfrak{g}_0$ est nulle.

Définition 4.2. On dira qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$ si elle est conjuguée, sous l'action adjointe de G_0 dans $\mathfrak{g}$, à une sous-algèbre $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ où $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est un élément de $\mathcal{D}(R_+)$. Dans le cas où $\mathfrak{g}_0$ est fixé, on dira qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est de type CRI lorsqu'elle est de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$.

4.2 Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. D'apès la proposition 2, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble.

Proposition 4.3. *On note $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ le sous-espace des éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace de $\mathfrak{a}$ de dimension $[l/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$.*

i) *La sous-algèbre $\Phi(\mathfrak{m})$ est de type CRI si et seulement si $\mathfrak{m}$ est contenu dans le noyau d'une racine simple de R_+.*

ii) *Si $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension $n-1$ et normalisé par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, alors le normalisateur de $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ dans $\mathfrak{g}$ contient une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.*

iii) *On suppose que $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{b}$ et que $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est un sous-espace de dimension $n-1$, normalisé par $\mathfrak{b}$. Alors il existe un élément $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ de $\mathcal{D}(R_+)$ pour lequel $\mathfrak{h}$ est égal à $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$.*

iv) *La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$ ou de type CRI si et seulement si $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension au moins $n-1$ et normalisé par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. En outre, $\mathfrak{h}$ est de type CRI si $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension $n-1$ et normalisé par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$.*

Puisque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.

i) On suppose que $\mathfrak{m}$ est contenu dans le noyau d'une racine simple α de R_+. Soit x un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$. Alors $\mathcal{D}(R_+)$ contient $(\alpha, \mathfrak{m}, x, 0)$ et $\Phi(\mathfrak{m})$ est égal à $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, 0)$. Réciproquement, on suppose que $\Phi(\mathfrak{m})$ est une sous-algèbre de type CRI. Alors il existe un élément $(\alpha, \mathfrak{p}, x, t)$ de $\mathcal{D}(R_+)$ et un élément g de G_0 pour lesquels $\mathrm{Ad}\, g(\Phi(\mathfrak{m}))$ est égal à $\Theta(\alpha, \mathfrak{p}, x, t)$. Le sous-espace des éléments nilpotents de $\Phi(\mathfrak{m})$ est égal à $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ et contient le sous-espace des éléments nilpotents de $\Theta(\alpha, \mathfrak{p}, x, t)$ dont la dimension est celle de $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$; donc g normalise $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. D'après [11](23.1, Corollary D), le normalisateur de $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ dans le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$ est le sous-groupe de Borel d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$; donc pour tout ξ dans $\mathfrak{b}$, $\mathrm{Ad}\, g(\xi) - \xi$ est un élément nilpotent. Puisque g est dans G_0, $\mathfrak{a}_0$ contient $\mathrm{Ad}\, g(\xi) - \xi$ pour tout ξ dans $\mathfrak{a}_0$ car $\mathfrak{a}_0$ est l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$; or tout élément de $\mathfrak{a}_0$ est semi-simple; donc g centralise $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}$. Par suite $\mathfrak{m}$ est égal à $\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{m})$; or $\mathfrak{p}$ est l'intersection de $\Theta(\alpha, \mathfrak{p}, x, t)$ et de $\mathfrak{a}$; donc $\mathfrak{m}$ est contenu dans $\mathfrak{p}$ et le noyau de la racine simple α.

ii) On suppose $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ de dimension $n-1$ et normalisé par une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ le normalisateur de $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ dans $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{t} + \mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$; donc elle est contenue dans une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{d}$ de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$. On rappelle qu'une sous-algèbre de Borel de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$. Le sous-espace $\mathfrak{d}_{\mathrm{u}}$ des éléments nilpotents de $\mathfrak{d}$ contient $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$. Si $\mathfrak{d}_{\mathrm{u}}$ contient strictement $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$, alors il est de dimension n et $\mathfrak{d}$ est de dimension au moins $l+n$; donc dans ce cas, $\mathfrak{d}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Dans le cas contraire, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est l'ensemble des éléments nilpotents du radical de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$; donc d'après [5](Ch. VIII, §10, Théorème 2), $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. Par suite, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ contient une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.

iii) Puisque $\mathfrak{a}_0$ normalise $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$, il existe un élément α de R_+ pour lequel $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ et $\mathfrak{g}_\alpha$. En outre, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est somme de sous-espaces poids de l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$; or pour tout β dans R_+, $\mathfrak{g}_\beta$ est de dimension 1 ; donc $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est somme directe des sous-espaces $\mathfrak{g}_\beta$ où β est dans $R_+ \backslash \{\alpha\}$. Puisque $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{h}$, α est une racine simple. Soit $\mathfrak{a}'$ l'intersection de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{h} + \mathbb{C}x$. Puisque $\mathfrak{h}$ est de dimension $[l/2] + n$, $\mathfrak{a}'$ est de dimension $[l/2] + 1$; donc d'après le lemme 3.1, son intersection avec $\mathfrak{a}_0$ est non nulle. Soit t un élément non nul de cette intersection. Alors il existe un nombre complexe non nul a pour lequel $\mathfrak{h}$ contient $t+ax$ car t n'est pas dans $\mathfrak{h}$. Par suite, $\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ et $t+ax$; or $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{a}'+\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$; donc $\mathfrak{h}$ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$, $t+ax$ et l'intersection $\mathfrak{m}$ de $\mathfrak{a}'$ avec $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est de dimension $[l/2]+n$, $\mathfrak{m}$ est de dimension $[l/2]$. En outre, l'intersection de $\mathfrak{m}$ et de $\mathfrak{g}_0$ est nulle. Pour tout y dans $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}$ contient $[y,t+ax]$ qui est égal à $a[y,x]$; or $[y,x]$ est colinéaire à x ; donc il est nul. Par suite, $\mathfrak{m}$ est contenu dans le noyau de α, $\mathcal{D}(R_+)$ contient $(\alpha,\mathfrak{m},x,t)$ et $\mathfrak{h}$ est égal à $\Theta(\alpha,\mathfrak{m},x,t)$.

iv) Soit $(\alpha,\mathfrak{m},x,t)$ un quadruplet dans $\mathcal{D}(R_+)$. Le sous-espace des éléments nilpotents de $\Theta(\alpha,\mathfrak{m},x,t)$ contient $\mathfrak{g}_\beta$ si β est un élément de R_+ distinct de α. En outre, il contient x si et seulement si t est nul car t est dans $\mathfrak{a}_0$. Alors $\mathfrak{a}_0$ normalise le sous-espace des éléments nilpotents de $\Theta(\alpha,\mathfrak{m},x,t)$ qui est de dimension au moins $n-1$. Par conjuguaison sous l'action adjointe de G_0, $\mathfrak{h}$ satisfait la condition de l'assertion si $\mathfrak{h}$ est de type CRI. D'après l'assertion (ii) de la proposition 3.2, il en est de même si $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$.

On suppose que $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension au moins $n-1$ et normalisé par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (ii), $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ contient une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$; or $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$; donc $\mathfrak{h}$ est contenu dans une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui normalise $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$. D'après le lemme 2.3, quitte à remplacer $\mathfrak{h}$ par un conjugué sous l'action de G_0, on peut supposer que $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{h}$ et normalise $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$. Si $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est égal à $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CR0$ d'après l'assertion (ii) de la proposition 3.4. Si $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension $n-1$, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type CRI d'après l'assertion (iii).

4.3 Soit g un automorphisme de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. Par extension des scalaires de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, g est un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

Définition 4.4. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On dira que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CRII$ de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{g}_0$ si elle est conjuguée sous l'action adjointe de G_0 dans $\mathfrak{g}$ à une sous-algèbre $\Theta(\alpha,\mathfrak{m},x,t)$ où $(\alpha,\mathfrak{m},x,t)$ est un élément de $\mathcal{D}(R_+)$ qui a la propriété suivante :

$$\sum_{\beta\in R_+\setminus\{\alpha\}} \langle\beta,t\rangle = 0\ .$$

Dans le cas où $\mathfrak{g}_0$ est fixé, on dira qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est de type $CRII$ lorsqu'elle est de type $CRII$ relativement à $\mathfrak{g}_0$.

Par définition, une sous-algèbre de type $CRII$ est de type CRI. D'après l'assertion (i) de la proposition 4.3, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CRII$ si elle est de type $CR0$ et de type CRI.

Lemme 4.5. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$.*

i) *La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$, au sens de 3.2, si et seulement si $g(\mathfrak{h})$ est de type $CR0$.*

ii) *La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de type CRI, au sens de 4.1, si et seulement si $g(\mathfrak{h})$ est de type CRI.*

iii) *La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de type $CRII$ si et seulement si $g(\mathfrak{h})$ est de type $CRII$.*

Puisque g est un automorphisme de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h}$ et $g(\mathfrak{h})$ ont même dimension et l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{g}_0$ est nulle si et seulement si l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec $\mathfrak{g}_0$ est nulle. Puisque g est un automorphisme de $\mathfrak{g}$, l'image par g d'une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$; or le sous-espace $\mathfrak{d}_{\mathrm{u}}$ des éléments nilpotents de $\mathfrak{d}$ est l'algèbre dérivée de $\mathfrak{d}$; donc l'image de $\mathfrak{d}_{\mathrm{u}}$ par g est le sous-espace des éléments nilpotents de la sous-algèbre de Borel $g(\mathfrak{d})$. L'assertion (i) résulte alors de l'assertion (ii) de la proposition 3.4. Puisque l'image par g d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$, l'assertion (ii) résulte de ce qui précède et de l'assertion (iv) de la proposition 4.3.

iii) On suppose $\mathfrak{h}$ de type $CRII$. Il s'agit de montrer que $g(\mathfrak{h})$ est de type $CRII$. Vu l'arbitraire de l'automorphisme g, on peut supposer $\mathfrak{h}$ égal à $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ où $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est un élément de $\mathcal{D}(R_+)$ qui satisfait l'égalité suivante :

$$\sum_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} \langle \beta, t \rangle = 0 \ .$$

On rappelle que $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ désigne le sous-espace des éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$. D'après ce qui précède, tout élément de $g(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est nilpotent ; donc $g(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est le sous-espace des éléments nilpotents de $g(\mathfrak{h})$. La sous-algèbre $g(\mathfrak{b})$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ qui normalise $g(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$. D'après le lemme 2.3, il existe un élément h de $\mathrm{Ad}(G_0)$ pour lequel $hg(\mathfrak{b})$ est égal à $\mathfrak{b}$. Alors $\mathfrak{b}$ normalise $hg(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$. En outre, hg normalise $\mathfrak{a}_0$ et $\mathfrak{a}$ car $\mathfrak{a}_0$ est l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$.

Pour tout β dans R, la forme linéaire $\xi \mapsto \langle \beta, hg(\xi) \rangle$ sur $\mathfrak{a}$ appartient à R. On la note $\iota(\beta)$. Alors ι est une permutation de R. Pour tout ξ dans $\mathfrak{a}$ et pour tout y dans $\mathfrak{g}_\beta$, on a :

$$hg([\xi, y]) = \langle \beta, \xi \rangle hg(y) = [hg(\xi), hg(y)] \, ;$$

donc $hg(\mathfrak{g}_\beta)$ est égal à $\mathfrak{g}_{\iota^{-1}(\beta)}$. Pour tout β dans R_+, $\mathfrak{b}$ contient $hg(\mathfrak{g}_\beta)$ car hg normalise $\mathfrak{b}$; donc $\iota(R_+)$ est égal à R_+.

Le sous-espace $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ étant de dimension $n-1$ ou n, on considère successivement les deux cas suivants :

1) $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension $n-1$,

2) $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension n.

1) D'après l'assertion (iii) de la proposition 4.3, il existe un élément $(\alpha', \mathfrak{m}', x', t')$ de $\mathcal{D}(R_+)$ pour lequel $hg(\mathfrak{h})$ est égal à $\Theta(\alpha', \mathfrak{m}', x', t')$. Puisque $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sont les intersections respectives de $\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{h}$ et $hg(\mathfrak{h})$, $\mathfrak{m}'$ est égal à $hg(\mathfrak{m})$. Puisque α est nul sur $\mathfrak{m}$ et $\overline{\mathfrak{m}}$, $\iota^{-1}(\alpha)$ est nul sur $\mathfrak{m}'$ et $\overline{\mathfrak{m}'}$; donc les racines α' et $\iota^{-1}(\alpha)$ ont même noyau. Par suite, $\iota^{-1}(\alpha)$ est égal à α' et $\mathfrak{g}_{\alpha'}$ contient $hg(x)$; donc $\mathcal{D}(R_+)$ contient $(\alpha', \mathfrak{m}', hg(x), hg(t))$. En outre, $hg(\mathfrak{h})$ est égal à $\Theta(\alpha', \mathfrak{m}', hg(x), hg(t))$; or on a :

$$\sum_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha'\}} \langle \beta, hg(t) \rangle = \sum_{\beta \in R_+ \setminus \{\alpha\}} \langle \beta, t \rangle = 0 \, ;$$

donc $hg(\mathfrak{h})$ et $g(\mathfrak{h})$ sont des sous-algèbres de type $CRII$.

2) Dans ce cas, t est nul et $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est égal à $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. Alors $hg(\mathfrak{h})$ est la somme de $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ et d'un sous-espace $\mathfrak{m}'$ de $\mathfrak{a}$. Puisque $\mathfrak{m}'$ est l'intersection de $\mathfrak{a}$ et de $hg(\mathfrak{h})$,

$\mathfrak{m}'$ est égal à $hg(\mathfrak{m})$; donc $\mathfrak{m}' + \overline{\mathfrak{m}'}$ est le noyau de la racine $\iota^{-1}(\alpha)$. Puisque la permutation ι^{-1} de R_+ est compatible à la somme des racines, $\iota^{-1}(\alpha)$ est une racine simple ; donc $\mathcal{D}(R_+)$ contient $(\iota^{-1}(\alpha), \mathfrak{m}', hg(x), 0)$. En outre, $hg(\mathfrak{h})$ est égal à $\Theta(\iota^{-1}(\alpha), \mathfrak{m}', hg(x), 0)$. Par suite, $hg(\mathfrak{h})$ et $g(\mathfrak{h})$ sont des sous-algèbres de type $CRII$.

5. Résultats préliminaires.

Dans cette section, on donne quelques lemmes préliminaires à la démonstration du théorème principal de 6. On utilise les notations $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}$, R, R_+, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ de 3. On rappelle que l est la dimension de $\mathfrak{a}$ et que n est le cardinal de R_+. On désigne par $x \mapsto \overline{x}$ la conjugaison de $\mathfrak{g}$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{g}_0$.

5.1 Soit $\mathfrak{t}_0$ une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}_0$. On note $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ et $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ les centralisateurs de $\mathfrak{t}_0$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0$. Alors $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ est une sous-algèbre réductive dans $\mathfrak{g}$, égale à la complexifiée de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$.

Lemme 5.1. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. On suppose que $\mathfrak{t}_0$ est contenu dans l'intersection de $\mathfrak{g}_0$ et d'une sous-algèbre résoluble $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{h}$. On pose :*

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}} \ , \ \mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{h} \cap \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0) \ , \ \mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{p} \cap \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0) \ .$$

i) *Le sous-espace $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0)$ est la somme des sous-espaces $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et $\overline{\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)}$. En outre, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0)$ est un sous-espace de codimension au plus 1 de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$.*

ii) *Si la dimension de $\mathfrak{g}$ est paire, la dimension de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ est paire.*

iii) *La sous-algèbre $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ satisfait les relations suivantes :*

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0) \cap \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0) = \{0\} \ \textit{et} \ \dim \mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0) = [\frac{\dim \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)}{2}] \ .$$

D'après la proposition 2, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$. On désigne par $\mathfrak{t}'_0$ l'intersection de $\mathfrak{r}$ et de $\mathfrak{g}_0$. Alors $\mathfrak{t}'_0$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}_0$ dont tous les éléments sont semi-simples ; donc $\mathfrak{t}'_0$ est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{g}_0$. On note $\mathfrak{t}'$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{t}'_0$. Alors $\mathfrak{t}'$ est l'intersection de $\mathfrak{r}$ et de $\overline{\mathfrak{r}}$.

i) Soit x dans $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0)$. Alors il existe des éléments x_1 et x_2 de $\mathfrak{h}$ pour lesquels x est la somme de x_1 et de $\overline{x_2}$. Puisque $\mathfrak{t}_0$ centralise x, pour tout t dans $\mathfrak{t}_0$, on a :

$$[t, x_1] = -\overline{[t, x_2]} \, ;$$

or $\mathfrak{r}$ contient $[t, x_1]$ et $[t, x_2]$; donc $\mathfrak{t}'$ contient $[t, x_1]$ et $[t, x_2]$. Puisque $\mathfrak{t}'$ est une sous-algèbre commutative qui contien $\mathfrak{t}_0$, on a :

$$[t, [t, x_1]] = [t, [t, x_2]] = 0 \ ,$$

pour tout t dans $\mathfrak{t}_0$; or $\mathrm{ad}t$ est un endomorphisme semi-simple pour tout t dans $\mathfrak{t}_0$; donc $\mathfrak{t}_0$ centralise x_1 et x_2. Par suite, x appartient à la somme de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et de $\overline{\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)}$. D'après le lemme 3.1, $\mathfrak{p}$ est un sous-espace de codimension au plus 1 dans $\mathfrak{g}$; donc la codimension de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0)$ dans $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ est au plus égale à 1.

ii) Si $\mathfrak{g}$ est de dimension paire, $\mathfrak{p}$ est égal à $\mathfrak{g}$; donc $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0)$ est égal à $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$. Puisque l'intersection de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et de $\mathfrak{g}_0$ est nulle, la dimension de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0)$ est le double de la dimension de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ d'après (i) ; donc la dimension de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ est paire quand la dimension de $\mathfrak{g}$ est paire.

iii) Puisque $\mathcal{Z}_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{t}_0)$ est un sous-espace de codimension au plus 1 de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$, l'assertion résulte de (i).

5.2 Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace de $\mathfrak{a}$ pour lequel $\mathfrak{m}+\overline{\mathfrak{m}}$ est de codimension au plus 1 dans $\mathfrak{a}$. On note $\mathfrak{a}'_0$ l'intersection de $\mathfrak{a}_0$ et de $\mathfrak{m}+\overline{\mathfrak{m}}$. Alors $\mathfrak{a}'_0$ est un sous-espace de codimension au plus 1 de $\mathfrak{a}_0$.

Lemme 5.2. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ normalisée par $\mathfrak{m}$. Soient α et β des éléments de la réunion de R et de $\{0\}$.*

i) *Si α et β ont même restriction à $\mathfrak{m}$, alors α et β ont même restriction à $\mathfrak{a}'_0$.*

ii) *Soit Q l'ensemble des poids non nuls de l'action adjointe de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{h}$. Pour tout λ dans Q, λ est la restriction à $\mathfrak{m}$ d'un unique élément α de R. En outre, $\mathfrak{g}_\alpha$ est le sous-espace des éléments de $\mathfrak{h}$ de poids λ.*

iii) *La sous-algèbre $\mathfrak{a}'_0$ normalise $\mathfrak{h}$.*

iv) *Soit $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}'_0)$ le sous-espace des éléments de $\mathfrak{h}$ qui centralisent $\mathfrak{a}'_0$. Alors il existe une partie P de R pour laquelle $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}'_0)$ et des sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans P.*

i) On suppose que α et β ont même restriction à $\mathfrak{m}$. Soit x dans $\mathfrak{m}$. Puisque $\mathfrak{a}$ est le complexifié de $\mathfrak{a}_0$, il existe des éléments x_1 et x_2 de $\mathfrak{a}_0$ qui satisfont la relation :

$$x = x_1 + ix_2 .$$

Puisque les restrictions de α et de β à $\mathfrak{a}_0$ prennent des valeurs imaginaires pures, on a :

$$\langle \alpha, x_1\rangle = \langle \beta, x_1\rangle \text{ et } \langle \alpha, x_2\rangle = \langle \beta, x_2\rangle ;$$

donc α et β prennent la même valeur en $\overline{x}$. Vu l'arbitraire de x, α et β ont même restriction à $\mathfrak{a}'_0$.

ii) Soit λ dans Q. On note $\mathfrak{h}_\lambda$ et $\mathfrak{g}_\lambda$ les sous-espaces des vecteurs de poids λ pour les actions adjointes de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$. Alors $\mathfrak{h}_\lambda$ est l'intersection de $\mathfrak{g}_\lambda$ et de $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{a}$ contient $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{g}_\lambda$ est la somme des espaces poids $\mathfrak{g}_\alpha$ étendue à l'ensemble éléments α de R qui prolongent λ ; or d'après l'assertion (i), cet ensemble n'a qu'un seul élément α ; donc $\mathfrak{h}_\lambda$ est égal à $\mathfrak{g}_\alpha$ car $\mathfrak{g}_\alpha$ est de dimension 1.

iii) Soit R_0 l'ensemble des éléments de R qui sont nuls sur $\mathfrak{m}$. Soient $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ le sous-espace des éléments de $\mathfrak{g}$ qui commutent à $\mathfrak{m}$ et $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m})$ l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$. Puisque $\mathfrak{m}$ est contenu dans $\mathfrak{a}$, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$ est la somme de $\mathfrak{a}$ et des sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans R_0. D'après (i), tout élément de R_0 est nul sur $\mathfrak{a}'_0$; donc $\mathfrak{a}'_0$ centralise $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{m})$. Soit $\mathfrak{h}'$ la somme des sous-espace $\mathfrak{h}_\lambda$ où λ est dans Q. D'après (ii), $\mathfrak{a}$ normalise $\mathfrak{h}'$. Puisque $\mathfrak{m}$ est une sous-algèbre commutative dont tous les éléments sont semi-simples, $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m})$ et de $\mathfrak{h}'$; donc $\mathfrak{a}'_0$ normalise $\mathfrak{h}$.

iv) Soit P l'ensemble des éléments de R dont la restriction à $\mathfrak{m}$ appartient à Q. D'après (ii), $\mathfrak{h}'$ est la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans P. D'après (i), pour tout α dans P, la restriction de α à $\mathfrak{a}'_0$ n'est pas nulle ; donc le sous-espace des éléments de $\mathfrak{h}'$ qui commutent à $\mathfrak{a}'_0$ est nul. Puisque $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m})$ et de $\mathfrak{h}'$, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m})$ est égal à $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}'_0)$ car $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m})$ centralise $\mathfrak{a}'_0$ d'après (iii).

5.3 On note $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$, N_1 et N_2 les dimensions de $\mathfrak{c}$ et de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Alors N est la somme N_1+N_2. L'intersection $\mathfrak{c}_0$ de $\mathfrak{c}$ et de $\mathfrak{g}_0$ est le centre de $\mathfrak{g}_0$.

Lemme 5.3. *Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace de dimension $[N/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. On désigne par $\mathfrak{h}'$ l'intersection de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et de $\mathfrak{h}+\mathfrak{c}$. Alors la dimension de $\mathfrak{h}'$ est au moins égale à $[N_2/2]$.*

La dimension de $\mathfrak{h}'$ est égale à :

$$\dim\mathfrak{h} - \dim[\mathfrak{h}\cap\mathfrak{c}] = [\frac{N_1+N_2}{2}] - \dim[\mathfrak{h}\cap\mathfrak{c}]\,;$$

or l'intersection de $\mathfrak{c}_0$ et de $\mathfrak{h}$ étant nulle, la dimension de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{c}$ est au plus égale à $[N_1/2]$ d'après le lemme 3.1 ; donc la dimension de $\mathfrak{h}'$ est au moins égale à $[N_2/2]$.

5.4 On note $\mathfrak{a}'_0$ l'intersection de $\mathfrak{a}_0$ avec $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ et $\mathfrak{a}'$ son complexifié. Selon les notations de 5.3, $l-N_1$ est la dimension de $\mathfrak{a}'$. Soient α une racine simple dans R_+, x un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$ et t un élément de $\mathfrak{a}'_0$. On désigne par $\mathfrak{p}$ la somme des sous-espaces radiciels $\mathfrak{g}_\beta$ où β est dans $R_+\backslash\{\alpha\}$.

Lemme 5.4. *On suppose $l-N_1$ impair. Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace de dimension $(l-N_1-1)/2$ de $\mathfrak{a}'$ qui est d'intersection nulle avec $\mathfrak{a}'_0$ et qui est contenu dans le noyau de α. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ pour laquelle l'intersection $\mathfrak{h}'$ de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et de $\mathfrak{h}+\mathfrak{c}$ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{m}$, $x+t$ et $\mathfrak{p}$. Alors le noyau de α normalise $\mathfrak{h}$.*

Par définition, $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre résoluble dont l'ensemble des éléments nilpotents contient $\mathfrak{p}$. Soient β dans $R_+\backslash\{\alpha\}$ et y dans $\mathfrak{g}_\beta$. D'après l'assertion (i) du lemme 5.2, β n'est pas nul sur $\mathfrak{m}$. Soit u un élément de $\mathfrak{m}$ en lequel β est non nul. Alors $[u,y]$ est un multiple non nul de y ; or $\mathfrak{h}'$ est contenu dans $\mathfrak{h}+\mathfrak{c}$; donc y appartient à l'algèbre dérivée de $\mathfrak{h}$. Vu l'arbitraire de β, $\mathfrak{p}$ est contenu dans $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{c}$ est contenu dans le noyau de α, $\mathfrak{h}$ est contenu dans le sous-espace engendré par $\mathfrak{p}$, $x+t$ et le noyau de α ; donc $\mathfrak{h}$ est la somme de $\mathfrak{p}$ et d'un sous-espace du sous-espace engendré par $x+t$ et le noyau de α. Puisque le noyau de α est une sous-algèbre commutative qui centralise $x+t$ et qui normalise $\mathfrak{p}$, il normalise $\mathfrak{h}$.

5.5 Soit $\mathfrak{m}$ un sous-espace de $\mathfrak{a}'$ de dimension $[(l-N_1)/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$.

Lemme 5.5. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ pour laquelle l'intersection $\mathfrak{h}'$ de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et de $\mathfrak{h}+\mathfrak{c}$ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. Alors le normalisateur $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ contient un hyperplan de $\mathfrak{a}_0$.*

Par définition, $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre résoluble dont l'ensemble des éléments nilpotents est $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. D'après l'assertion (i) du lemme 5.2, il existe au plus un élément de R_+ qui est nul sur $\mathfrak{m}$. On désigne par α l'élément de R_+ qui est nul sur $\mathfrak{m}$ quand il existe. Dans le cas contraire, α est nul. On note $\mathfrak{p}$ la somme des $\mathfrak{g}_\beta$ où β est dans $R_+\backslash\{\alpha\}$. On montre comme en 5.4 que $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{p}$. Alors $\mathfrak{h}$ est la somme de $\mathfrak{p}$ et d'un sous-espace du sous-espace engendré par $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}_\alpha$. Si α est nul, $\mathfrak{g}_\alpha$ est nul. Puisque le noyau de α est une sous-algèbre commutative qui normalise $\mathfrak{p}$ et centralise $\mathfrak{g}_\alpha$, il normalise $\mathfrak{h}$. Le lemme résulte alors de ce que le noyau de α contient un hyperplan de $\mathfrak{a}_0$.

5.6 On rappelle que $\mathfrak{g}_0$ est une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel réel, de dimension finie, V_0 que G_0 est le sous-groupe analytique de $\mathrm{GL}(V_0)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$, que V est le complexifié de V_0 et que G est le sous-groupe analytique de $\mathrm{GL}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

On utilise les notations de 4.1 et on considère un élément $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ de $\mathcal{D}(R_+)$ pour lequel t est non nul. On désigne par $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ et par $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ le sous-espace de ses éléments nilpotents. On désigne par $\mathfrak{l}$ la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Puisque α est une racine simple, $\mathfrak{l}$ est une algèbre semi-simple de dimension 3.

Lemme 5.6. *Soient u un élément de $\mathfrak{g}_0$ et μ une forme linéaire sur $\mathfrak{b}$ qui satisfont les conditions suivantes :*

1) *μ est nul sur $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$,*

2) *μ prend des valeurs imaginaires sur $\mathfrak{a}_0$,*

3) *pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ contient $[u, \xi] - \langle \mu, \xi \rangle u$.*

i) *Le normalisateur de $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ dans $\mathfrak{g}$ est la sous-algèbre parabolique $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{g}$ égale à $\mathfrak{l} + \mathfrak{b}$.*

ii) *L'intersection $\mathfrak{l}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ et de $\mathfrak{l}$ est le sous-espace engendré par les éléments $i[x, \overline{x}]$, $x + \overline{x}$, $i(x - \overline{x})$.*

iii) *Soit K_0 le sous-groupe analytique de G_0 d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_0$. Alors il existe un élément g de K_0 pour lequel $\mathfrak{b}$ contient $\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h})$ et $\mathrm{Ad}\, g(u)$.*

iv) *Si g est un élément de K_0 qui satisfait la condition de l'assertion* (iii), *alors il existe un élément non nul t' de $\mathfrak{a}_0$ et un nombre complexe non nul a pour lesquels $\mathrm{Ad}\, g(\mathfrak{h})$ est égal $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, ax, t')$.*

v) *La restriction de μ à $\mathfrak{a}$ est colinéaire à α.*

vi) *Le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est contenu dans $\mathfrak{b}$.*

vii) *Le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$ est le noyau de la restriction de α à $\mathfrak{a}_0$.*

i) On rappelle que $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ désigne le normalisateur de $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ dans $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est contenu dans $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ et que t est non nul, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est la somme des sous-espaces $\mathfrak{g}_\beta$ où β est dans $R_+ \backslash \{\alpha\}$; donc $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}_\alpha$ normalisent $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$. Puisque α est une racine simple, pour tout β dans R_+, $\beta - \alpha$ n'est pas dans R ; donc $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ normalise $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$. Puisque $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est une sous-algèbre qui contient $\mathfrak{a}$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est somme de sous-espaces poids de l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$; or pour tout β dans R_+, $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{g}_{-\beta}]$ est un sous-espace non nul de $\mathfrak{a}$; donc $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est la somme des sous-espaces $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Par suite, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est égal à $\mathfrak{p}$. En particulier, $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{b}$; donc elle est parabolique.

ii) Puisque x est un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$, $\overline{x}$ engendre le sous-espace $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ qui est égal à $\overline{\mathfrak{g}_\alpha}$ car $\mathfrak{a}$ est le complexifié d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$. Alors $\mathfrak{g}_0$ contient les trois éléments $i[x, \overline{x}]$, $x + \overline{x}$, $i(x - \overline{x})$. Ces éléments étant linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, ils engendrent le sous-espace $\mathfrak{l}$, d'où l'assertion.

iii) D'après la condition (3), le sous-espace engendré par $\mathfrak{h}$ et u est une sous-algèbre résoluble ; or u normalise $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ d'après les conditions (1) et (3) ; donc d'après l'assertion (i), il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{d}$ de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ qui contient $\mathfrak{h}$ et u. Soit B le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ et P le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$. On désigne par τ l'application :

$$K_0 \times B \to P \ , \ (k,b) \mapsto kb \ .$$

Puisque $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{a}$ et x, $\mathfrak{l}_0 + \mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{l}$; donc τ est une submersion en tout point. Puisque K_0 est compact, l'image de τ est égale à P car elle y est fermée et ouverte. D'après [11](Theorem 21.3), deux sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{p}$ sont conjuguées sous l'action adjointe de P ; or $\mathfrak{b}$ est contenu dans $\mathfrak{p}$; donc d'après ce qui précède, deux sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{p}$ sont conjuguées sous l'action adjointe de K_0 dans $\mathfrak{p}$. Par suite, il existe un élément g de K_0 pour lequel $\mathfrak{b}$ contient $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$ et $\mathrm{Ad}\,g(u)$.

iv) Puisque K_0 normalise $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est contenu dans $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$; or l'action adjointe de K_0 dans $\mathfrak{g}$ laisse fixe tout élément de $\mathfrak{m}$ car $\mathfrak{l}$ centralise $\mathfrak{m}$; donc $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$ contient $\mathfrak{m}$. Par suite, $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ et $\mathrm{Ad}\,g(t+x)$. Puisque $\mathrm{Ad}\,g(x)$ est un élément nilpotent de $\mathfrak{l}$ qui appartient à $\mathfrak{b}$, il existe un nombre complexe non nul a pour lequel $\mathrm{Ad}\,g(x)$ est égal à ax. Puisque $\mathfrak{b}$ contient $\mathrm{Ad}\,g(t+x)$ et $\mathrm{Ad}\,g(x)$, $\mathfrak{b}$ contient $\mathrm{Ad}\,g(t)$; or $\mathrm{Ad}\,g(t)$ est un élément non nul de $\mathfrak{g}_0$; donc $\mathrm{Ad}\,g(t)$ est un élément non nul de $\mathfrak{a}_0$. Par suite, $\mathcal{D}(R_+)$ contient $(\alpha, \mathfrak{m}, ax, \mathrm{Ad}\,g(t))$ et $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$ est égal à $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, ax, \mathrm{Ad}\,g(t))$.

v) On utilise un élement g de K_0 qui satisfait la condition de l'asertion (iii). D'après la condition (3), pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$ contient $[\mathrm{Ad}\,g(u), \mathrm{Ad}\,g(\xi)] - \langle \mu, \xi \rangle \mathrm{Ad}\,g(u)$. Puisque $\mathrm{Ad}\,g(u)$ est dans $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{b}$, il appartient à $\mathfrak{a}_0$; or $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{m})$ est égal à $\mathfrak{m}$ d'après (iv) ; donc $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$ contient $\langle \mu, \xi \rangle \mathrm{Ad}\,g(u)$ pour tout ξ dans $\mathfrak{m}$. Puisque l'intersection de $\mathfrak{g}_0$ et de $\mathrm{Ad}\,g(\mathfrak{h})$ est nulle, μ est nul sur $\mathfrak{m}$. Par hypothèse, μ prend des valeurs imaginaires sur $\mathfrak{a}_0$; donc pour tout ξ dans $\mathfrak{a}$, on a :

$$\langle \mu, \overline{\xi} \rangle = -\overline{\langle \mu, \xi \rangle} \ .$$

Par suite, μ est nul sur le noyau de α qui est la somme de $\mathfrak{m}$ et de $\overline{\mathfrak{m}}$; donc la restriction de μ à $\mathfrak{a}$ est colinéaire à α.

vi) On rappelle que $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ désigne le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. Puisque $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ contient $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ est contenu dans $\mathfrak{l} + \mathfrak{b}$ d'après l'assertion (i) ; or le noyau de α normalise $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}$ est contenu dans la somme de $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{h}$ et du noyau de α ; donc le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est la somme de $\mathfrak{h}$, du noyau de α et du sous-espace des éléments de $\mathfrak{l}$ qui normalisent $\mathfrak{h}$. Soit y un élément de $\mathfrak{l}$ qui normalise $\mathfrak{h}$. On note a, b, c ses coordonnées dans la base $\overline{x}, i[x, \overline{x}], x$. Si t centralise x, il centralise $\mathfrak{l}$ et $[y, t+x]$ est un élément de $\mathfrak{l}$ qui est non nul lorsque a ou b n'est pas nul ; or t n'étant pas nul, l'intersection de $\mathfrak{l}$ et de $\mathfrak{h}$ est nulle dans ce cas ; donc le normalisateur de $\mathfrak{h}$ est le sous-espace engendré par $\mathfrak{h}$, x et le noyau de α lorsque t centralise x. On suppose que t ne centralise pas x. Alors $[y, t+x]$ est un élément de $\mathfrak{l}$ dont la coordonnée en $\overline{x}$ n'est pas nulle si a n'est pas nul ; donc a est nul et $[y, t+x]$ est colinéaire à x. Par suite, $[y, t+x]$ est nul car t n'est pas nul ; donc y est colinéaire à la projection de $t+x$ sur $\mathfrak{l}$ parallèlement au noyau de α. Alors y appartient à la somme de $\mathfrak{h}$ et du noyau de α. Le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est donc contenu dans $\mathfrak{b}$.

vii) Puisque $\mathfrak{a}_0$ est l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{a}_0$ contient le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$ d'après l'assertion (vi). Si v est un élément de $\mathfrak{a}_0$ en lequel α n'est pas nul, $[v, t+x]$ est un multiple non nul de x qui n'appartient pas à $\mathfrak{h}$ car t est non nul ; or le noyau de α normalise $\mathfrak{h}$; donc le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$ est le noyau de la restriction de α à $\mathfrak{a}_0$.

5.7 Dans cette sous-section, on donne un résultat utile à la démonstration du théorème 7.4. On utilise les notations de 5.6. Pour tout g dans G et pour tout ξ dans $\mathfrak{g}$, $g.\xi$ désigne le vecteur tangent à G en g, image de ξ par l'application linéaire tangente, en l'élément neutre e de G, à l'application $h \mapsto gh$. Si g est dans G_0 et si ξ est dans $\mathfrak{g}_0$, $g.\xi$ est tangent à G_0. Pour toute fonction C^∞ φ sur G_0, on note $\varphi'(g)$ sa différentielle en g.

Lemme 5.7. *Soit E un sous-espace vectoriel, de dimension finie, de l'espace des fonctions C^∞ sur G_0, à valeurs complexes, qui est non nul et stable par la représentation régulière gauche de G_0. Soit u un élément de $\mathfrak{g}_0$. On suppose que u et E satisfont les conditions suivantes :*

1) *pour tout φ et pour tout ψ dans E, on a :*

$$\varphi(g)\langle\psi'(g), g.u\rangle = \psi(g)\langle\varphi'(g), g.u\rangle \ ,$$

pour tout g dans G_0,

2) *pour tout φ dans E, pour tout g dans G_0 et pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ contient l'élément :*

$$\varphi(g)[u,\xi] - \langle\varphi'(g), g.\xi\rangle u \ ,$$

3) *l'élément u ne normalise pas $\mathfrak{h}$.*

i) *Tout élément de E est la restriction à G_0 d'une fonction polynomiale sur l'anneau des endomorphismes linéaires de V_0.*

ii) *Il existe une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ qui satisfait l'égalité :*

$$\langle\varphi'(g), g.\xi\rangle = \langle\lambda, \xi\rangle\varphi(g) \ ,$$

pour tout g dans G_0, pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$ et pour tout φ dans E.

iii) *Il existe un nombre complexe z qui satisfait l'égalité :*

$$\langle\varphi'(g), g.u\rangle = z\varphi(g) \ ,$$

pour tout g dans G_0 et pour tout φ dans E.

iv) *Il existe une forme linéaire μ sur $\mathfrak{b}$ qui satisfait les conditions* (1), (2), (3) *du lemme* 5.6. *En outre, si u est dans $\mathfrak{a}_0$, on peut trouver μ satisfaisant l'égalité :*

$$\langle\varphi'(g), g.\xi\rangle = \langle\mu, \xi\rangle\varphi(g) \ ,$$

pour tout g dans G_0, pour tout ξ dans $\mathfrak{b}$ et pour tout φ dans E.

v) *L'élément t n'appartient pas au noyau de α. En outre, si $\mathfrak{a}_0$ contient u, il existe un réel non nul a qui satisfait les deux conditions suivantes : la restriction de μ à $\mathfrak{a}_0$ est égale à $-a\alpha$ et u est égal à at.*

vi) *Soit φ la restriction à G d'une fonction polynomiale sur l'anneau des endomorphismes linéaires de V. On suppose que pour tout g dans G, φ satisfait les égalités :*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(g\exp(t\xi))\,|_{t=0} = -\langle\alpha,\xi\rangle\varphi(g)\ ,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(g\exp(t\eta))\,|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\exp(t\overline{\eta})g)\,|_{t=0} = 0\ ,$$

pour tout ξ dans $\mathfrak{a}$ et pour tout η dans $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. Alors φ est nul.

i) Soient φ dans E et $\varphi_1,\ldots,\varphi_l$ une base de E. Il existe des fonctions $a_1,\ldots,a_l$ sur G_0 qui sont définies par la relation :

$$\varphi(gh) = a_1(g)\varphi_1(h) + \cdots + a_l(g)\varphi_l(h)\ ,$$

pour tout g et pour tout h dans G_0. Alors les fonctions $a_1,\ldots,a_l$ sont des coefficients de la restriction à E de la représentation régulière gauche de G_0 qui est une représentation de dimension finie de G_0 ; donc elles sont les restrictions à G_0 de fonctions polynomiales sur l'anneau des endomorphismes linéaires de V_0. D'après l'égalité ci-dessus, pour $h = e$, φ est combinaison linéaire des fonctions $a_1,\ldots,a_l$; donc φ est la restriction à G_0 d'une fonction polynomiale sur l'anneau des endomorphismes linéaires de V_0.

ii) Soit g dans G_0. Puisque u n'appartient pas à $\mathfrak{h}$, pour tout φ dans E et pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, $\varphi'(g)$ est nul en $g.\xi$ si φ est nul en g. Puisque E est un sous-espace non nul, G_0-invariant, de l'espace des fonctions sur G_0, il existe un élément φ de E qui n'est pas nul en g. Soit $\lambda(g)$ la forme linéaire sur $\mathfrak{h}$ qui est définie par la relation :

$$\langle\varphi'(g), g.\xi\rangle = \varphi(g)\langle\lambda(g),\xi\rangle\ ,$$

pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$. Puisque u ne normalise pas $\mathfrak{h}$, la forme linéaire $\lambda(g)$ n'est pas nulle d'après la condition (2) ; or pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, les formes linéaires sur E :

$$\psi\mapsto\psi(g) \text{ et } \psi\mapsto\langle\psi'(g), g.\xi\rangle\ ,$$

sont colinéaires d'après ce qui précède ; donc pour tout ψ dans E et pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, on a :

$$\langle\psi'(g), g.\xi\rangle = \psi(g)\langle\lambda(g),\xi\rangle\ .$$

Alors d'après (2), $\mathfrak{h}$ contient l'élément :

$$[u,\xi] - \langle\lambda(g),\xi\rangle u\ ,$$

pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$. Soit h un point de G_0 distinct de g. Vu l'arbitraire de g, il existe une forme linéaire $\lambda(h)$ sur $\mathfrak{h}$ qui satisfait les deux relations :

$$\langle\psi'(h), h.\xi\rangle = \psi(h)\langle\lambda(h),\xi\rangle \text{ et } [u,\xi] - \langle\lambda(h),\xi\rangle u \in \mathfrak{h}\ ,$$

pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$. Si $\lambda(h)$ est distinct de $\lambda(g)$, alors pour tout ξ dans un ouvert non vide de $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ contient $[u,\xi]$; or u ne normalise pas $\mathfrak{h}$; donc $\lambda(g)$ est égal à $\lambda(h)$. Par suite, il existe une forme linéaire λ sur $\mathfrak{h}$ qui satisfait la condition de l'assertion.

iii) Soit g dans G_0. D'après la condition (1), pour φ dans E, $\langle\varphi'(g), g.u\rangle$ est nul si $\varphi(g)$ est nul car E contient des éléments qui ne sont pas nuls en g ; donc il existe un nombre complexe $z(g)$ qui satisfait l'égalité :

$$\langle\varphi'(g), g.u\rangle = z(g)\varphi(g) \ ,$$

pour tout φ dans E. Vu l'arbitraire de g, pour h dans G_0, il existe un nombre complexe $z(h)$ qui satisfait la condition analogue en h. Puisque E est stable par la représentation régulière gauche, pour φ dans E, E contient la fonction $k \mapsto \varphi(gh^{-1}k)$. Par suite, il vient :

$$\langle\varphi'(g), g.u\rangle = z(h)\varphi(g) \ ;$$

donc $z(h)$ est égal à $z(g)$, d'où l'assertion.

iv) Soient B, B_{u}, H les sous-groupes analytiques de G d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$, $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, B est le sous-groupe de Borel de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$. En particulier, B est un sous-groupe algébrique. D'après l'assertion (i), φ s'étend de manière unique en une fonction sur G qui est la restriction à G d'une fonction polynomiale sur l'anneau des endomorphismes linéaires de V. On note φ cette extension. Puisque G_0 est dense dans G pour la topologie de Zariski, pour tout ψ dans E, pour tout g dans G et pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, on a :

$$\langle\psi'(g), g.\xi\rangle = \psi(g)\langle\lambda, \xi\rangle \ ,$$

d'après (ii). Alors il existe un homomorphisme analytique χ de H dans $\mathbb{C}^*$ dont la différentielle en e est λ et qui satisfait l'égalité :

$$\psi(gh) = \chi(h)\psi(g) \ ,$$

pour tout ψ dans E, pour tout g dans G et pour tout h dans H. Soit H' l'ensemble des éléments h de G qui satisfont la condition suivante : pour tout ψ dans E, les fonctions sur G, ψ et $g \mapsto \psi(gh)$ sont colinéaires. Alors H' est un sous-groupe algébrique de G qui contient H. En outre, il existe un caractère rationnel χ' de H' qui prolonge χ. Soit $\mathfrak{h}'$ l'algèbre de Lie de H'. Si x est dans $\mathfrak{m}$, il existe des éléments x_1 et x_2 de $\mathfrak{a}_0$ pour lesquels x est égal à $x_1 + ix_2$. Alors x_1 et x_2 sont répliques de x ; donc d'après [6](Ch. II, §14, Proposition 2), $\mathfrak{h}'$ contient x_1, x_2 et $\overline{x}$. Vu l'arbitraire de x, $\mathfrak{h}'$ contient la somme de $\mathfrak{m}$ et $\overline{\mathfrak{m}}$ qui est le noyau de α. Puisque $\mathfrak{b}$ est le sous-espace de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{h}$, $\overline{\mathfrak{m}}$ et $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$, il existe donc un caractère rationnel de B qui prolonge la restriction de χ' à l'intersection de B et de H'. Soit μ la différentielle en e de ce caractère. Alors μ est une forme linéaire sur $\mathfrak{b}$ qui prolonge λ et qui est nulle sur $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. Puisque le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}_0$ est compact, tout caractère rationnel de B prend des valeurs complexes de module 1 sur ce sous-groupe ; donc μ prend des valeurs imaginaires sur $\mathfrak{a}_0$. Par suite, μ satisfait les conditions (1), (2), (3) du lemme 5.6.

On suppose que u appartient à $\mathfrak{a}_0$. D'après l'assertion (iii), u appartient à $\mathfrak{h}'$; donc l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{h}'$ contient $\mathfrak{h}$, $\overline{\mathfrak{m}}$ et u. Puisque u ne normalise pas $\mathfrak{h}$, il n'est pas dans le noyau de α ; donc l'intersection de $\mathfrak{h}'$ et de $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{a}$. Par suite, elle contient x et est égale à $\mathfrak{b}$. L'assertion résulte alors de ce qui précède.

v) D'après les conditions (1) et (3) du lemme 5.6, u normalise $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$; donc d'après la condition (3) du lemme, $\mathfrak{h}$ ne contient pas $[u,t+x]$. Par suite, μ n'est pas nul en t ; or d'après l'assertion (v) du lemme 5.6, la restriction de μ à $\mathfrak{a}$ est colinéaire à α ; donc α n'est pas nul en t.

On suppose que $\mathfrak{a}_0$ contient u. Alors il existe un réel a pour lequel $u-at$ appartient au noyau de α. L'élément $[u,t+x]$ est alors égal à $a\langle\alpha,t\rangle x$; or $\mathfrak{h}$ contient $[u,t+x]-\langle\mu,t\rangle u$; donc $a\langle\alpha,t\rangle$ est égal à $-\langle\mu,t\rangle$. Par suite, a n'est pas nul, μ est égal à $-a\alpha$ et u est égal à at.

vi) Soit L le sous-groupe analytique de G dont l'algèbre de Lie est la sous-algèbre engendrée par $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. Alors L est un sous-groupe algébrique de G. Puisque le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est simplement connexe, il existe un morphisme π du groupe algébrique $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur L. Soient U le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\overline{\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}}$ et ζ le caractère rationnel de B dont la différentielle en e est la forme linéaire qui prolonge $-\alpha$ et qui est nulle sur $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$. D'après les hypothèses sur φ, $\varphi(ugb)$ est égal à $\zeta(b)\varphi(g)$ pour tout u dans U, pour tout g dans G et pour tout b dans B.

Pour tout nombre complexe non nul a et pour tout couple (b,c) de nombre complexes, on a :

$$\varphi\circ\pi(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}) = a^{-1}\varphi(e) \,;$$

or $\varphi\circ\pi$ est une fonction régulière sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$; donc $\varphi(e)$ est nul. Par suite, φ est nul sur UB. Puisque $\mathfrak{g}$ est la somme de $\mathfrak{b}$ et de $\overline{\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}}$, UB est un ouvert de G ; donc φ est nul car φ est la restriction à G d'une fonction polynomiale sur l'anneau des endomorphismes de V.

Corollaire 5.8. *Soit E un sous-espace vectoriel, de dimension finie, de l'espace des fonctions C^∞ sur G_0, à valeurs complexes, qui est non nul et stable par la représentation régulière gauche de G_0. Soit u un élément de $\mathfrak{g}_0$. On suppose que u et E satisfont les deux conditions suivantes :*

1) *pour tout φ et pour tout ψ dans E, on a :*

$$\varphi(g)\langle\psi'(g),g.u\rangle = \psi(g)\langle\varphi'(g),g.u\rangle \ ,$$

pour tout g dans G_0,

2) *pour tout φ dans E, pour tout g dans G_0 et pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}$ contient l'élément :*

$$\varphi(g)[u,\xi] - \langle\varphi'(g),g.\xi\rangle u \ ,$$

Alors u appartient à $\mathfrak{h}+\overline{\mathfrak{h}}$.

D'après l'assertion (vii) du lemme 5.6, il suffit de montrer que u normalise $\mathfrak{h}$. On suppose que u ne normalise pas $\mathfrak{h}$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. D'après l'assertion (iv) du lemme, il existe une forme linéaire μ sur $\mathfrak{b}$ qui satisfait les conditions (1), (2), (3) du lemme 5.6. Alors d'après les assertions (iii) et (iv) du lemme 5.6, on peut supposer que $\mathfrak{a}_0$ contient u. D'après l'assertion (v) du lemme, quitte à remplacer u par un multiple scalaire, on peut supposer u égal à t. Alors d'après cette assertion, $-\alpha$ est la restriction de μ à $\mathfrak{a}$ et α n'est pas nul en t.

D'après l'assertion (iv) du lemme, pour tout φ dans E, pour tout g dans G_0 et pour tout ξ dans $\mathfrak{b}$, on a :

$$\langle \varphi'(g), g.\xi \rangle = \varphi(g)\langle \mu, \xi \rangle \ .$$

Puisque E est stable par la représentation régulière gauche de G_0, par différentiation de cette action, on a des représentations de $\mathfrak{g}_0$ et de $\mathfrak{g}$ dans E ; donc d'après le théorème de Lie, il existe un élément non nul φ de E qui est annulé par $\overline{\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}}$. D'après l'assertion (i) du lemme, φ est la restriction à G_0 d'une fonction sur G qui est la restriction d'une fonction polynomiale sur l'anneau des endomorphismes linéaires de V. On la note φ. Puisque G_0 est partout dense dans G pour la topologie de Zariski :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(g\exp(t\xi))\,|_{t=0} = -\langle \alpha, \xi \rangle \varphi(g) \ , \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(g\exp(t\eta))\,|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\exp(t\overline{\eta})g)\,|_{t=0} = 0 \ ,$$

pour tout ξ dans $\mathfrak{a}$, pour tout η dans $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ et pour tout g dans G. Ceci est absurde d'après l'assertion (vi) du lemme.

6. Sous-algèbres de type CRM.

On dira qu'une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ est *de type CRM relativement à $\mathfrak{g}_0$* si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$, au sens de 3.2, ou si $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type CRI relativement à $\mathfrak{g}_0$, au sens de 4.1, lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension impaire. Dans le cas où $\mathfrak{g}_0$ est fixé, on dira qu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ est *de type CRM* lorsqu'elle est de type CRM relativement à $\mathfrak{g}_0$. Le but de cette section est le théorème :

Théorème. *Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui vérifie les deux conditions suivantes :*

$$\dim \mathfrak{h} = [N/2] \ \textit{et} \ \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 = \{0\} \ .$$

Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type CRM relativement à $\mathfrak{g}_0$.

On démontrera le théorème en raisonnant par récurrence sur N. Lorsque $\mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie commutative, toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ qui vérifie les deux relations :

$$\dim \mathfrak{h} = [N/2] \ \text{et} \ \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 = \{0\} \ ,$$

est de type CRM. Dans ce qui suit, on suppose que le théorème est vrai en dimension inférieure à celle de $\mathfrak{g}$ et que $\mathfrak{g}_0$ n'est pas une algèbre de Lie commutative. D'après la proposition 2, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble. On utilisera les notations $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}$, R, R_+, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ de 3.

6.1 On rappelle que d'après 2, $\mathfrak{g}$ est identifié à une sous-algèbre algébrique de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. On désigne par $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ l'ensemble des éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est résoluble, $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est un idéal de $\mathfrak{h}$. On appelle tore de $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre algébrique commutative de $\mathfrak{g}$ dont tous les éléments sont semi-simples [6](Ch. II, §14). De même, on appelle tore de $\mathfrak{g}_0$ une sous-algèbre algébrique commutative de $\mathfrak{g}_0$ dont tous les éléments sont semi-simples. Puisqu'une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ ou de $\mathfrak{g}_0$ est algébrique si et seulement si elle contient les répliques de chacun de ses éléments, l'intersection de

$\mathfrak{g}_0$ et d'une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}_0$. Si $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}_0$, elle est réunion de ses tores maximaux car toute sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{p}$ est commutative et contenue dans un tore de $\mathfrak{g}_0$.

Proposition 6.1. *On suppose $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ de rang au moins 2. Soit $\mathfrak{c}_0$ le centre de $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{c}$ son complexifié. On note $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h})$ le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$. Soit $\mathfrak{t}_0$ un tore maximal de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h})$. Alors $\mathfrak{t}_0$ contient strictement $\mathfrak{c}_0$.*

Puisque $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h})$ une sous-algèbre algébrique de $\mathfrak{g}_0$, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h})$ est la réunion de ses tores maximaux ; donc il suffit de montrer que $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h})$ contient strictement $\mathfrak{c}_0$. On désigne par $\mathfrak{h}'$ l'intersection de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et de $\mathfrak{h}+\mathfrak{c}$. Soient N_1 et N_2 les dimensions respectives de $\mathfrak{c}$ et de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. On distingue successivement les deux cas suivants :

1) N_1 n'est pas nul,

2) N_1 est nul.

1) L'algèbre $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{c}$ et de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. D'après le lemme 5.3, la dimension de $\mathfrak{h}'$ est au moins égale à $[N_2/2]$. Si l'intersection de $\mathfrak{h}'$ et de $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ est non nulle, $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h})$ contient strictement $\mathfrak{c}_0$ car $\mathfrak{h}'$ normalise $\mathfrak{h}$. On peut donc supposer que l'intersection de $\mathfrak{h}'$ et de $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ est nulle. Alors d'après le lemme 3.1, la dimension de $\mathfrak{h}'$ est égale à $[N_2/2]$; donc d'après l'hypothèse de récurrence pour $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$, $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de type CRM de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Par suite, d'après les lemmes 5.4 et 5.5, le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$ contient un hyperplan d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$; or par hypothèse, $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ est de rang au moins 2 ; donc $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{h})$ contient strictement $\mathfrak{c}_0$.

2) Dans ce cas, $\mathfrak{g}$ est semi-simple et de rang au moins 2. Soient $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ et $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ les normalisateurs de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ dans $\mathfrak{g}$.

Assertion. *Soit $\mathfrak{r}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ qui contient $\mathfrak{h}$. Alors l'intersection de $\mathfrak{r}$ et de $\mathfrak{g}_0$ est non nulle.*

Puisque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$, elle est contenue dans une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{r}$ de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$. On rappelle qu'une sous-algèbre de Borel de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est une sous-algèbre résoluble maximale de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$. On suppose l'assertion fausse. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. Puisque $\mathfrak{h}$ est de dimension $[N/2]$, $\mathfrak{r}$ est égal à $\mathfrak{h}$ d'après le lemme 3.1 ; donc $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est le sous-espace des éléments nilpotents de $\mathfrak{r}$; or $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est un idéal de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$; donc $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est l'ensemble des éléments nilpotents du radical de $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$. Par suite, d'après [5](Ch. VIII, §10, Théorème 2), $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}_{\mathrm{u}})$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{r}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Ceci est absurde d'après l'assertion (i) du lemme 2.3. ■

Soit $\mathfrak{t}_0$ l'intersection de $\mathfrak{r}$ et de $\mathfrak{g}_0$. D'après l'assertion (iii) du lemme 5.1, l'intersection $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ de $\mathfrak{h}$ et de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ est une sous-algèbre qui satisfait les deux relations suivantes :

$$\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)\cap\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)=\{0\} \text{ et } \dim\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)=[M/2]\ ,$$

où M est la dimension de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$; donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ est une sous-algèbre de type CRM de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ relativement à $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$. Par suite,

$\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ contient un sous-espace $\mathfrak{m}$ qui satisfait la condition suivante : l'intersection de $\mathfrak{g}_0$ et de $\mathfrak{m}+\overline{\mathfrak{m}}$ est un sous-espace de codimension au plus 1 d'une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{s}_0$ de $\mathfrak{g}_0$. Alors d'après l'assertion (iii) du lemme 5.2, il existe un hyperplan de $\mathfrak{s}_0$ qui normalise $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{g}$ est de rang au moins 2, cet hyperplan est non nul.

6.2 Dans le cas où $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est de rang 1, $\mathfrak{g}$ est isomorphe au produit direct de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et de son centre $\mathfrak{c}$.

Lemme 6.2. *On suppose* $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ *de rang* 1. *Alors* $\mathfrak{h}$ *est une sous-algèbre de type* CRM *relativement à* $\mathfrak{g}_0$.

On rappelle que $\mathfrak{h}'$ désigne l'intersection de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et de $\mathfrak{h}+\mathfrak{c}$. Puisque $\mathfrak{h}$ est résoluble, $\mathfrak{h}'$ est résoluble ; donc la dimension de $\mathfrak{h}'$ est au plus égale à 2. On note $\mathfrak{h}_2$ l'intersection de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{c}$. On distingue les deux cas suivants :

1) $\mathfrak{c}$ est de dimension impaire $2M_1+1$,

2) $\mathfrak{c}$ est de dimension paire $2M_1$.

1) La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de dimension M_1+2 ; or d'après le lemme 3.1, la dimension de $\mathfrak{h}_2$ est au plus égale à M_1 ; donc $\mathfrak{h}'$ est de dimension 2 et $\mathfrak{h}_2$ est de dimension M_1. Alors $\mathfrak{h}'$ est une sous-algèbre de Borel de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$; donc d'après le lemme 2.3, $\mathfrak{h}'$ est le sous-espace engendré par un élément t de $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ et par un élément u de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ normalisé par t. Par suite, il existe des éléments x_1 et x_2 de $\mathfrak{c}$ pour lesquels $\mathfrak{h}$ est le sous-espace engendré par $t+x_1$, $u+x_2$ et $\mathfrak{h}_2$; donc t normalise $\mathfrak{h}$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est alors normalisée par une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$; donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CR0$ de $\mathfrak{g}$ d'après l'assertion (i) de la proposition 3.4.

2) La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est de dimension M_1+1 et $\mathfrak{h}'$ est de dimension 2 ou 1. Si $\mathfrak{h}'$ est de dimension 2, on conclut comme en (1). On suppose $\mathfrak{h}'$ de dimension 1. Alors $\mathfrak{h}_2$ est de dimension M_1. D'après le lemme 2.3, toute sous-algèbre de Borel de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ est engendrée par un élément de $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ et un élément nilpotent ; or $\mathfrak{h}'$ est contenu dans une sous-algèbre de Borel de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$; donc il existe un élément t de $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ et un élément nilpotent non nul x de $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ pour lesquels $t+x$ engendre $\mathfrak{h}'$. Si $\mathfrak{h}$ contient $t+x$, $\mathfrak{h}$ est engendré par $\mathfrak{h}_2$ et $t+x$; donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type CRI. On suppose que $t+x$ n'appartient pas à $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{c}$ est la somme de $\mathfrak{h}_2$ et de $\overline{\mathfrak{h}_2}$, il existe un élément non nul u de $\overline{\mathfrak{h}_2}$ pour lequel $\mathfrak{h}$ contient $t+x+u$. Par suite, $\mathfrak{h}$ contient $t+u+\overline{u}+x$. La sous-algèbre $\mathfrak{h}$ est donc de type CRI d'après l'assertion (iv) de la proposition 4.3. On rappelle que dans ce cas n est égal à 1.

6.3 On démontre le théorème dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de dimension paire. D'après le lemme 6.2, on peut supposer $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ de rang au moins 2. D'après la proposition 6.1, le normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$ contient un tore non central $\mathfrak{t}_0$. Le sous-espace $\mathfrak{r}$ de $\mathfrak{g}$ engendré par $\mathfrak{t}_0$ et $\mathfrak{h}$ est alors une sous-algèbre résoluble qui contient $\mathfrak{t}_0$. Soient $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ et $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ les centralisateurs de $\mathfrak{t}_0$ dans $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_0$. D'après l'assertion (ii) du lemme 5.1, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ est une sous-algèbre réductive de dimension paire, inférieure à celle de $\mathfrak{g}$. On note M cette dimension et $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ l'intersection de $\mathfrak{h}$ avec $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$. Alors d'après l'assertion (iii) du lemme 5.1, la dimension de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ est $M/2$ et son intersection avec $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ est nulle ; donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ étant de dimension paire, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ est une sous-algèbre de type $CR0$ de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$, relativement à $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$. En particulier, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{s}_0$ de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ et un sous-espace $\mathfrak{m}$ du complexifié $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{s}_0$ qui est contenu dans $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et dont la dimension est la moitié de la dimension de $\mathfrak{s}$. Alors $\mathfrak{s}$ est égal à la somme $\mathfrak{m}+\overline{\mathfrak{m}}$; donc d'après l'assertion (iii) du lemme 5.2, $\mathfrak{s}_0$ normalise $\mathfrak{h}$. Il résulte alors de l'assertion (i) de la proposition 3.4 que $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$.

6.4 Soit $\mathfrak{t}_0$ un tore maximal du normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$. Alors la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ engendrée par $\mathfrak{t}_0$ et $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre résoluble de $\mathfrak{g}$; donc elle est contenue dans une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Quitte à remplacer $\mathfrak{h}$ par un conjugué sous l'action adjointe de G_0, on peut supposer que $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{t}_0$.

Lemme 6.3. *On suppose que N est impair et que $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{t}_0$.*

i) *Le sous-espace $\mathfrak{t}_0$ contient un hyperplan de $\mathfrak{a}_0$.*

ii) *Il existe une partie P de R_+ pour laquelle $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et des sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans P.*

i) Puisque $\mathfrak{a}_0$ est l'intersection de $\mathfrak{b}$ et de $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{a}_0$ contient $\mathfrak{t}_0$. D'après la proposition 6.1, $\mathfrak{t}_0$ contient strictement le centre de $\mathfrak{g}_0$. D'après l'hypothèse de récurrence et l'assertion (iii) du lemme 5.1, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ est une sous-algèbre de type CRM de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ relativement à $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$. En particulier, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}'_0$ de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}_0}(\mathfrak{t}_0)$ et un sous-espace $\mathfrak{m}$ de dimension $[l/2]$ du complexifié $\mathfrak{t}'$ de $\mathfrak{t}'_0$ qui est contenu dans $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. Alors d'après l'assertion (iii) du lemme 5.2, la somme $\mathfrak{m}+\overline{\mathfrak{m}}$ est un hyperplan de $\mathfrak{t}'$ qui normalise $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{t}_0$ est un tore maximal du normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}_0$, sa dimension est au moins égale à la dimension de $\mathfrak{m}+\overline{\mathfrak{m}}$ qui est égale à $2[l/2]$; donc $\mathfrak{t}_0$ contient un hyperplan de $\mathfrak{a}_0$.

ii) Soit $\mathfrak{t}$ le complexifié de $\mathfrak{t}_0$. Alors $\mathfrak{t}$ normalise $\mathfrak{h}$; donc d'après l'assertion (iv) du lemme 5.2, en prenant pour sous-espace $\mathfrak{m}$ l'espace $\mathfrak{t}$, il existe une partie P de R pour laquelle $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et des $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans P. Puisque $\mathfrak{h}$ est contenu dans $\mathfrak{b}$, R_+ contient P.

6.5 Dans cette section, on termine la démonstration du théorème 6. D'après 6.3, on peut supposer N impair. D'après 6.2, on peut supposer $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ de rang au moins 2. Soit $\mathfrak{t}_0$ un tore maximal du normalisateur de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. D'après 6.4, on peut supposer que $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{t}_0$ et $\mathfrak{h}$. On considére les deux cas suivants :

1) $\mathfrak{t}_0$ est contenu dans le noyau d'un élément α de R_+,

2) $\mathfrak{t}_0$ n'est pas contenu dans le noyau d'un élément de R_+.

On rappelle que $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ est l'intersection de $\mathfrak{h}$ et du centralisateur $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ de $\mathfrak{t}_0$ dans $\mathfrak{g}$.

1) Soit $\mathfrak{g}_1$ l'algèbre dérivée de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$. Alors $\mathfrak{g}_1$ contient $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$. D'après l'assertion (i) du lemme 6.3, $\mathfrak{t}_0$ est de dimension $l-1$; or $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{t}_0)$ est une sous-algèbre réductive de rang l ; donc $\mathfrak{g}_1$ est de rang 1 et de dimension 3. D'après l'assertion (ii) du lemme 6.3, il existe une partie P de R_+ pour laquelle $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et des sous-espaces $\mathfrak{g}_\beta$ où β est dans P. D'après l'assertion (iii) du lemme 5.1, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ est de dimension $(l-1)/2+1$; or $\mathfrak{h}$ est de dimension $(l-1)/2+n$; donc P est de cardinal $n-1$. Puisque P ne contient pas α, P est égal à $R_+\backslash\{\alpha\}$; donc le sous-espace $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ des éléments nilpotents de $\mathfrak{h}$ est de dimension n ou $n-1$. Si $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension $n-1$, il est la somme des $\mathfrak{g}_\beta$

où β est dans P ; donc il est normalisé par $\mathfrak{a}_0$. Par suite, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type CRI d'après l'assertion (iv) de la proposition 4.3. Si $\mathfrak{h}_{\mathrm{u}}$ est de dimension n, il est égal à $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$ car $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{h}$; donc dans ce cas, $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$ d'après l'assertion (ii) de la proposition 3.4.

2) L'espace $\mathfrak{g}$ est somme directe de $\mathfrak{a}$ et des sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans R ; or pour tout α dans R, α n'est pas nul sur $\mathfrak{t}_0$; donc $\mathfrak{a}$ est le centralisateur de $\mathfrak{t}_0$ dans $\mathfrak{g}$. D'après l'assertion (ii) du lemme 6.3, il existe une partie P de R_+ pour laquelle $\mathfrak{h}$ est somme directe de $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ et des sous-espaces $\mathfrak{g}_\alpha$ où α est dans P. D'après l'assertion (iii) du lemme 5.1, $\mathcal{Z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{t}_0)$ est de dimension $(l-1)/2$; or $\mathfrak{h}$ est de dimension $(l-1)/2+n$; donc P est de cardinal n. Par suite, $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$; donc $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type $CR0$ de $\mathfrak{g}$ d'après l'assertion (ii) du lemme 3.4.

7. Structures CR.

On note N la dimension de $\mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}$ le complexifié de $\mathfrak{g}_0$. L'application $(g,\xi)\mapsto g.\xi$ est alors un isomorphisme de $G_0\times\mathfrak{g}_0$ sur le fibré tangent TG_0 à G_0. On note ici $g.\xi$ l'image de ξ par la différentielle en l'élément neutre de l'application $h\mapsto gh$ de G_0 dans G_0. Dans ce qui suit, on identifie $G_0\times\mathfrak{g}_0$ et TG_0 au moyen de cet isomorphisme. Le complexifié $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}TG_0$ de TG_0 s'identifie alors à $G_0\times\mathfrak{g}$. On rappelle qu'une structure CR sur G_0 de rang n est la donnée d'un sous fibré T de rang n du fibré $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}TG_0$ qui satisfait les deux conditions suivantes :

1) pour tout g dans G_0, l'intersection de la fibre de T en g et de l'espace tangent à G_0 en g est nulle,

2) T est formellement intégrable.

On rappelle que T est formellement intégrable si pour tout ouvert U de G_0, l'espace des sections de T au dessus de U est stable pour la structure d'algèbre de Lie sur les champs de vecteurs sur G_0. D'après la condition (1) et le lemme 3.1, le rang d'une structure CR sur G_0 est au plus égal à $[N/2]$.

7.1 On utilise sur $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}TG_0$ l'action de G_0 donnée par $g.(h,\xi)=(gh,\xi)$ où ξ est dans $\mathfrak{g}$, où g et h sont dans G_0. La structure CR T sur G_0 est dite *invariante* si et seulement si T est stable par l'action de G_0 dans $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}TG_0$. Pour tout sous-espace $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, on note $\tau(\mathfrak{h})$ l'image de $G_0\times\mathfrak{h}$ par l'isomorphisme canonique de $G_0\times\mathfrak{g}$ dans $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}TG_0$. Alors $\tau(\mathfrak{h})$ est un sous-fibré du complexifié du fibré tangent à G_0.

Lemme 7.1. *Soit $\mathfrak{G}_0$ l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. Alors la restriction à $\mathfrak{G}_0$ de l'application $\mathfrak{h}\mapsto\tau(\mathfrak{h})$ est une bijection de $\mathfrak{G}_0$ sur l'ensemble des structures CR, G_0-invariantes, sur G_0.*

Par définition, le fibré $\tau(\mathfrak{h})$ est G_0-invariant. En outre, il est déterminé par sa fibre en l'élément neutre e ; donc l'application τ est injective. Soit $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. On note L l'espace des sections C^∞ de $\tau(\mathfrak{h})$. On désigne par L_* le sous-espace de L qui est l'image de $\mathfrak{h}$ par l'application qui à ξ associe le champ de vecteurs $g\mapsto g.\xi$ sur G_0. Alors L_* est une sous-algèbre de Lie de la complexifiée de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G_0. En outre, L a une structure naturelle de module sur l'anneau des fonctions C^∞ sur G_0 ; or pour tout g dans G_0, la fibre en g de $\tau(\mathfrak{h})$ est l'espace des valeurs en g de L_* ; donc L est le sous-module engendré par L_*. Par suite, $\tau(\mathfrak{h})$ satisfait la condition (2) ci-dessus ; donc $\tau(\mathfrak{h})$ est une structure CR, G_0-invariante, sur G_0 si $\mathfrak{G}_0$ contient $\mathfrak{h}$.

Soit T une structure CR, G_0-invariante, sur G_0. On note $\mathfrak{h}$ la fibre en e de T. Alors l'intersection de $\mathfrak{h}$ et de $\mathfrak{g}_0$ est nulle d'après la condition (1). Puisque T est G_0-invariant, T est égal à $\tau(\mathfrak{h})$. Si ξ et η sont des éléments de $\mathfrak{h}$, les champs de vecteurs $g \mapsto g.\xi$ et $g \mapsto g.\eta$ sont des sections C^∞ de T au dessus de G_0 ; or pour tout g dans G_0, la valeur en g du crochet de ces deux champs de vecteurs est $g.[\xi,\eta]$; donc $\mathfrak{h}$ contient $[\xi,\eta]$. Vu l'arbitraire de ξ et de η, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Par suite, $\mathfrak{G}_0$ contient $\mathfrak{h}$.

Théorème 7.2. *Soit T une structure CR, G_0-invariante, sur G_0 et de rang maximum. Alors T est de rang $[N/2]$ et la fibre de T en e est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ de type CRM, relativement à $\mathfrak{g}_0$, au sens de 6. En outre, pour toute sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ de type CRM, relativement à $\mathfrak{g}_0$, $\tau(\mathfrak{h})$ est l'unique structure G_0-invariante, de rang $[N/2]$, sur G_0 dont la fibre en e est $\mathfrak{h}$.*

D'après le lemme 3.1, la dimension d'un élément de $\mathfrak{G}_0$ est au plus égale à $[N/2]$; or d'après la proposition 3.2, il existe des éléments de $\mathfrak{G}_0$ de dimension $[N/2]$; donc d'après le lemme, le rang maximum d'une structure CR sur G_0 est $[N/2]$. D'après le théorème 6, l'ensemble des éléments de $\mathfrak{G}_0$ de dimension $[N/2]$ est l'ensemble des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ de type CRM relativement à $\mathfrak{g}_0$; or pour tout $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{G}_0$, la fibre de $\tau(\mathfrak{h})$ en e est $\mathfrak{h}$; donc le théorème résulte du lemme.

7.2 Dans [3], on définit la notion d'action transverse d'un groupe de Lie à une structure CR. De manière analogue, on pose la définition suivante :

Définition 7.3. Soit G un groupe de Lie qui opère de manière C^∞ sur une varitété C^∞ X. Soit T une structure CR, G-invariante, sur X. On désigne par TX le fibré tangent à X et par L l'espace des sections C^∞ de T au dessus de X. On dira que T est invariant par la G-action transverse d'un groupe de Lie s'il existe une sous-algèbre $\mathfrak{p}$, de dimension finie, de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur X qui est G-invariante et qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$[\mathfrak{p}, L] \subset L \ , \ T_x \oplus \overline{T_x} \oplus \mathbb{C}\mathfrak{p}(x) = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T_xX \ ,$$

où x est dans X.

Dans le cas où $\mathfrak{p}$ est une algèbre commutative, on dira que la structure CR T est G-rigide.

On rappelle que l'application $\xi \mapsto \overline{\xi}$ est la conjugaison du complexifié $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} TX$, du fibré tangent TX à X, dont l'ensemble des points fixes est TX.

Théorème 7.4. *On suppose G_0 de dimension impaire. Soit T une structure CR, G_0-invariante, de rang maximum, sur G_0. Alors T est G_0-rigide si et seulement si la fibre en e de T est une sous-algèbre de type $CR0$ de $\mathfrak{g}$ relativement à $\mathfrak{g}_0$, au sens de 3.2.*

Par hypothèse, il existe un entier M pour lequel $2M+1$ est la dimension de G_0. On note L l'espace des sections C^∞ de T au dessus de G_0. Soient $\mathfrak{h}$ la fibre en e de T et L_* le sous-espace des champs de vecteurs $g \mapsto g.\xi$ où ξ est dans $\mathfrak{h}$. D'après le théorème 7.2, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type CRM de $\mathfrak{g}$. En particulier, elle est de dimension M. Si $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$, il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ qui normalise $\mathfrak{h}$ d'après l'assertion (i) de la proposition 3.4. Soit u un élément non nul de $\mathfrak{t}_0$. On désigne par $\mathfrak{p}$ le sous-espace des champs de vecteurs C^∞ sur G_0 qui est engendré par le champ de vecteurs $g \mapsto g.u$. Alors $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre de dimension 1 de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs C^∞ sur G_0 qui satisfait la relation :

$$g.\mathfrak{g} = g.\mathfrak{h} \oplus g.\overline{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{p}(g) \ ,$$

pour tout g dans G_0. En outre, u normalisant $\mathfrak{h}$, L_* contient $[\mathfrak{p}, L_*]$ et L contient $[\mathfrak{p}, L]$.

Réciproquement, on suppose que T est G_0-rigide et que $\mathfrak{h}$ est égal $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ où $\mathcal{D}(R_+)$ contient $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$. Pour cela on utilise les notations de 4. Alors il existe existe une sous-algèbre $\mathfrak{p}$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur G_0 qui est G_0 invariante, de dimension finie, et qui satisfait l'égalité :

$$g.\mathfrak{g} = g.\mathfrak{h} \oplus g.\overline{\mathfrak{h}} \oplus \mathfrak{p}(g) \ ,$$

pour tout g dans G_0. Alors $\mathfrak{p}(g)$ est de dimension 1. Soit u un élément non nul de $\mathfrak{p}(e)$. Soit φ dans $\mathfrak{p}$. Puisque $\mathfrak{p}$ est G_0-invariant, pour tout g dans G_0, $\varphi(g)$ est colinéaire à u ; donc il existe une fonction C^∞ λ sur G_0 pour laquelle $\varphi(g)$ est égal à $\lambda(g)g.u$ pour tout g dans G_0. Vu l'arbitraire de φ, il existe un sous-espace E, de dimension finie, de l'espace des fonctions C^∞ sur G_0 pour lequel $\mathfrak{p}$ est l'image de E par l'application :

$$\lambda \mapsto (\ g \mapsto \lambda(g)g.u\ ) \ .$$

Puisque $\mathfrak{p}$ est G_0-invariant, E est G_0-invariant. En outre, L contenant $[\mathfrak{p}, L]$, pour tout λ dans E et pour tout ξ dans $\mathfrak{h}$, on a :

$$\lambda(g)[u, \xi] - \langle \lambda'(g), g.\xi \rangle u \in \mathfrak{h} \ ,$$

pour tout g dans G_0. On rappelle que $\lambda'(g)$ désigne la différentielle de λ en g. Puisque $\mathfrak{p}$ est une sous-algèbre commutative, pour tout λ et pour tout μ dans E, on a :

$$\mu(g)\langle \lambda'(g), g.u \rangle = \lambda(g)\langle \mu'(g), g.u \rangle \ ,$$

pour tout g dans G_0. Soient G_0^0 la composante neutre de G_0 et E' l'ensemble des restrictions à G_0^0 des éléments de E. Alors E' est un sous-espace de dimension finie, G_0^0-invariant, de la représentation régulière gauche de G_0^0 dans l'espace des fonctions C^∞ sur G_0^0. En outre, E' satisfait les conditions (1) et (2) du corollaire 5.8 d'après ce qui précède ; or u n'appartient pas à la somme $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}}$; donc d'après ce corollaire, t est nul. Cela revient à dire que $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$ relativement à $\mathfrak{g}_0$.

7.3 On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ égale à $2M+1$ et on utilise les notations de 4. Soient $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ dans $\mathcal{D}(R_+)$ et $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre $\Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$. On choisit une base $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_M$ de $\mathfrak{h}$ dont les éléments sont soit des vecteurs poids de l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ soit des éléments de la réunion de $\mathfrak{m}$ et de $\{t + x\}$. On suppose cette base ordonnée de façon que $\mathfrak{m}$ contienne $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{l'}$ et que $\varepsilon_{l'+1}$ soit égal à $t+x$. Selon ces notations, le rang l de $\mathfrak{g}$ est égal à $2l'+1$. Soit u l'élément de $\mathfrak{g}_0$ égal à $i[x,\overline{x}]$. On rappelle que $x\mapsto\overline{x}$ est la conjugaison de $\mathfrak{g}$ dont l'ensemble des points fixes est $\mathfrak{g}_0$. Puisque u normalise $\mathfrak{b}_{\mathrm{u}}$, il est dans $\mathfrak{b}$ donc dans $\mathfrak{a}_0$. En outre, $\mathfrak{m}$ ne contient pas u car $\mathfrak{m}$ centralise x.

Lemme 7.5. *Soit ν une forme $(M+1)$-linéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ qui est nulle en tout $(M+1)$-uplet d'éléments de $\mathfrak{g}$ dont un au moins est dans $\mathfrak{h}$. Alors on a l'égalité :*

$$\sum_{j=1}^{M}\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_{j-1}},[t+x,\overline{\varepsilon_j}],\overline{\varepsilon}_{j+1},\ldots,\overline{\varepsilon_M})=-\sum_{\beta\in R_+}\langle\beta,t\rangle\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_M})\ .$$

Pour $j=1,\ldots,l'$, $[t+x,\overline{\varepsilon_j}]$ est nul car $\overline{\mathfrak{m}}$ centralise x. Puisque $\overline{\varepsilon_{l'+1}}$ est égal à $t+\overline{x}$, on a :

$$[t+x,\overline{\varepsilon_{l'+1}}]=-\langle\alpha,t\rangle(x+\overline{x})+[x,\overline{x}]=-iu-\langle\alpha,t\rangle x-\langle\alpha,t\rangle\overline{\varepsilon_{l'+1}}+\langle\alpha,t\rangle t\ .$$

Par suite la somme du lemme est égale à :

$$\sum_{j=l'+2}^{M}\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_{j-1}},[t+x,\overline{\varepsilon_j}],\overline{\varepsilon}_{j+1},\ldots,\overline{\varepsilon_M})-\langle\alpha,t\rangle\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_M})$$
$$+\langle\alpha,t\rangle\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_{l'}},t,\overline{\varepsilon}_{l'+2},\ldots,\overline{\varepsilon_M})\ .$$

Puisque t est dans $\mathfrak{a}$, il est la somme d'un élément de $\mathfrak{m}$, d'un élément de $\overline{\mathfrak{m}}$ et d'un multiple de u ; donc d'après la propriété de ν, le dernier terme de la somme précédente est nul. Pour j indice strictement supérieur à $l'+1$, on note β_j la racine positive pour laquelle $\mathfrak{g}_{-\beta_j}$ contient $\overline{\varepsilon_j}$. Alors on a :

$$[t+x,\overline{\varepsilon_j}]=-\langle\beta_j,t\rangle\overline{\varepsilon_j}+[x,\overline{\varepsilon_j}]\ ;$$

or $[x,\overline{\varepsilon_j}]$ est colinéaire à un des éléments $\overline{\varepsilon_{l'+2}},\ldots,\overline{\varepsilon_M}$; donc la somme du lemme est égale à :

$$[-\langle\alpha,t\rangle-\sum_{j=l'+2}^{M}\langle\beta_j,t\rangle]\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_M})\ ,$$

d'où le lemme.

7.4 On suppose la dimension de $\mathfrak{g}$ égale à $2M+1$. On fixe une structure CR, G_0-invariante, T sur G_0. On note L l'espace des sections C^∞ de T au dessus de G_0. Pour toute forme différentielle ω sur G_0, de degré d, et pour φ dans L, on note $\iota_\varphi(\omega)$ le produit intérieur de φ par ω. Pour cela, on considère l'extension complexe de ω au complexifié de la d-ième puissance extérieure du fibré tangent à G_0.

Théorème 7.6. *Soit K l'espace des formes différentielles C^∞ sur G_0, de degré $M+1$, à valeurs complexes, qui sont annulées par les produits intérieurs ι_φ où φ est dans L. Alors les conditions suivantes :*

1) *la fibre en* e *de* T *est une sous-algèbre de type* $CR0$ *ou de type* $CRII$ *relativement à* $\mathfrak{g}_0$*, au sens de* 3.2 *et* 4.3*,*

2) K *contient une forme fermée* G_0*-invariante et non nulle,*

sont équivalentes.

Soit $\mathfrak{h}$ la fibre de T en e. D'après le théorème 7.2, $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de type CRM relativement à $\mathfrak{g}_0$. Quitte à remplacer $\mathfrak{h}$ par un conjugué sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$, on peut supposer :

$$\mathfrak{h} = \Phi(\mathfrak{m}) \text{ ou } \mathfrak{h} = \Theta(\alpha, \mathfrak{m}, x, t) \ .$$

Dans le premier cas, $\mathfrak{m}$ est un sous-espace de $\mathfrak{a}$ de dimension $[l/2]$ et d'intersection nulle avec $\mathfrak{g}_0$. Dans le deuxième cas, $(\alpha, \mathfrak{m}, x, t)$ est un élément de $\mathcal{D}(R_+)$. Pour cela, on utilise les notations de 3 et de 4. Soit ν une forme $(M+1)$-linéaire alternée sur $\mathfrak{g}$ qui définit par passage au quotient une forme $(M+1)$-linéaire alternée non nulle sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. On désigne par ω la $M+1$-forme différentielle G_0-invariante sur G_0 dont la valeur en e est ν. Alors la différentielle $\mathrm{d}\omega$ de ω est G_0-invariante et sa valeur en e est la forme $M+2$-linéaire alternée ν' :

$$(\xi_1, \dots, \xi_{M+2}) \mapsto$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq M+2} (-1)^{i+j} \nu([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{M+2}) \ .$$

Il s'agit de montrer que ν' est nul si et seulement si $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$ ou de type $CRII$.

Soit $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M$ une base de $\mathfrak{h}$ dont les éléments sont soit des vecteurs poids de l'action adjointe de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$ soit des éléments de $\mathfrak{m}$ ou de la réunion de $\mathfrak{m}$ et de $\{t+x\}$ selon que $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$ ou de type CRI. Soit u un élément de $\mathfrak{a}_0$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{m}+\overline{\mathfrak{m}}$. Alors $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_M, \overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_M}, u$ est une base de $\mathfrak{g}$. Soient $\xi_1, \dots, \xi_{M+2}$ des éléments qui appartiennent à cette base. Puisque $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre, ν' est nul en $(\xi_1, \dots, \xi_{M+2})$ si au moins deux de ces éléments sont dans $\mathfrak{h}$. Puisque $\overline{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de dimension M, ν' est nul en $(\xi_1, \dots, \xi_{M+2})$ si la réunion de $\{u\}$ et de $\overline{\mathfrak{h}}$ contient $\xi_1, \dots, \xi_{M+2}$. On note $\mathfrak{h}'$ le sous-espace de $\mathfrak{h}$ égal à $\mathfrak{h}$ si $\mathfrak{h}$ est de type $CR0$ et égal au sous-espace engendré par $\mathfrak{m}$ et les sous-espaces $\mathfrak{g}_\beta$ où β est dans $R_+ \backslash \{\alpha\}$ dans le cas contraire. Alors u normalise $\mathfrak{h}'$; donc ν' est nul en $(\xi_1, \dots, \xi_{M+2})$ si ξ_1 est dans $\mathfrak{h}'$ et si ξ_2 est égal à u. Si ξ_1 est dans $\mathfrak{h}$ et si $\xi_2, \dots, \xi_{M+2}$ sont dans $\overline{\mathfrak{h}}$, deux des $M+1$ éléments $\xi_2, \dots, \xi_{M+2}$ sont égaux. Supposant ξ_2 égal à ξ_3, on a alors :

$$\nu([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{M+2}) = 0 \ ,$$

pour i strictement supérieur à 1 car ξ_1 est dans $\mathfrak{h}$,

$$\nu([\xi_1, \xi_j], \xi_2, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{M+2}) = 0 \ ,$$

pour j strictement supérieur à 3 et :

$$\nu([\xi_1, \xi_2], \xi_3, \dots, \xi_{M+2}) - \nu([\xi_1, \xi_3], \xi_2, \xi_4, \dots, \xi_{M+2}) = 0 \, ;$$

donc ν' est nul en $(\xi_1, \dots, \xi_{M+2})$ dans ce cas.

Il reste alors à voir que dans le cas où $\mathfrak{h}$ est de type CRI, $\mathfrak{h}$ est de type $CRII$ si et seulement si ν' est nul en $(\xi_1,\dots,\xi_{M+2})$ dans le cas suivant :

$$\xi_1 = t + x \ , \ \xi_2 = u \ , \ \xi_3 = \overline{\varepsilon_1},\dots,\xi_{M+2} = \overline{\varepsilon_M} \ .$$

On peut supposer la base $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_M$ ordonnée de façon que $\mathfrak{m}$ contienne $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{l'}$ et que $\varepsilon_{l'+1}$ soit égal à $t+x$. Puisque $\mathfrak{m}$ centralise x, on a alors :

$$-\nu'(\xi_1,\dots,\xi_{M+2}) = \nu([t+x,u],\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_M})$$
$$+ \sum_{j=l'+1}^{M} \nu(u,\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_{j-1}},[t+x,\overline{\varepsilon_j}],\overline{\varepsilon}_{j+1},\dots,\overline{\varepsilon_M}) \ .$$

On rappelle que ν est nul en tout $(M+1)$-uplet d'éléments de $\mathfrak{g}$ dont au moins un est dans $\mathfrak{h}$. D'après le lemme 7.5, il vient :

$$-\nu'(\xi_1,\dots,\xi_{M+2}) = \nu([t+x,u],\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_M}) - \sum_{\beta\in R_+} \langle\beta,t\rangle\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_M}) \ .$$

Puisque t est dans $\mathfrak{a}_0$, il existe un réel a et un élément v de $\mathfrak{m}$ pour lesquels t est égal $au+v+\overline{v}$. Si a est nul, $[t+x,u]$ est nul et ν' est nul en $(\xi_1,\dots,\xi_{M+2})$ si et seulement si :

$$\sum_{\beta\in R_+\backslash\{\alpha\}} \langle\beta,t\rangle = 0 \ ,$$

car α est nul en t dans ce cas. Si a est non nul, on a :

$$[t+x,u] = a^{-1}[t+x,t] = -a^{-1}\langle\alpha,t\rangle[(t+x)-t] \, ;$$

or t étant égal à $au+v+\overline{v}$, on a :

$$\nu(t,\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_M}) = a\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_M}) \, ;$$

donc la valeur de ν' en $(\xi_1,\dots,\xi_{M+2})$ est égale à :

$$\sum_{\beta\in R_+\backslash\{\alpha\}} \langle\beta,t\rangle\nu(u,\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_M}) \ .$$

Par suite, ν' est nul en $(\xi_1,\dots,\xi_{M+2})$ si et seulement si $\mathfrak{h}$ est de type $CRII$.

Bibliographie

[1] Alekseevsky, D. V., and A. F. Spiro, *Invariant CR Strucures on compact homogeneous manifolds*, hep-DG/9904054.

[2] Baouendi, M. S., and L. P. Rothschild, *Embedability of abstract CR structures and integrability of related systems*, Annales de l'Institut Fourier **37** (1987), 131–141.

[3] Baouendi, M. S., L. P. Rothschild, and F. Treves, *CR structures with group action and extendability of CR functions*, Inventiones Mathematicae **82** (1985), 359–396.

[4] Bourbaki, N., „Éléments de Mathématiques. Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6", Hermann (1972), Paris.

[5] —, „Éléments de Mathématiques. Groupes et Algèbres de Lie. Chapitres 7 et 8“, Diffusion C.C.L.S (1975), Paris.

[6] Chevalley, C., „Théorie des Groupes de Lie. Tome II. Groupes Algébriques“, Actualités Scientifiques et Industrielles **1152**, Hermann & C$^{\text{ie}}$, Éditeurs (1951), Paris.

[7] Debiard, A., et B. Gaveau, *Equations de Cauchy-Riemann sur $SU(2)$ et leurs enveloppes d'holomorphie*, Canadian Journal of Mathematics **28** (1986), 1009–1024.

[8] Folland, G. B., and J. J. Kohn, "The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex," Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press (1972), Princeton.

[9] Gigante, G., and G. Tomassini, *CR-structures on real Lie algebras*, Advances in Mathematics **94** (1992), 67–81.

[10] Helgason, S., "Differential Geometry and Symmetric Spaces," Academic Press (1962), New-York, Berlin.

[11] Humphreys, J. E., "Linear algebraic groups," Graduate Texts in Mathematics **21**, Springer-Verlag (1975), New-York, Heidelberg, Berlin.

[12] Jacobowitz, H., and F. Treves, *Non Realizable CR Structures*, Inventiones Mathematicae **66** (1982), 231–249.

[13] Jacobowitz, H., *The canonical bundle and realizable CR hypersurfaces*, Pacific Journal of Mathematics **127** (1987), 91–101.

[14] Samelson, H., *A class of complex-analytic manifolds*, Portugaliae Mathematica **12** (1953),129–132.

[15] Trèves, F., "Approximation and representation of functions and distributions annihilated by a system of complex vector fields," Ecole polytechnique, Centre de Mathematiques (1981).

Jean-Yves Charbonnel
Université Paris 7 - CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu,
Théorie des groupes,
Case 7012, 2 Place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05, France.
jyc@math.jussieu.fr

Hella Ounaïes Khalgui
Université de Tunis
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
1060 Tunis. Tunisie
o.khalgui@fst.rnu.tn

Received October 29, 2002
and in final form June 2, 2003