Journal of Lie Theory
Volume **14** (2004) 537–541

Erzeugung nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen mit vorgegebener Lie-Algebra von Punktsymmetrien

Rutwig Campoamor-Stursberg*

Communicated by H. Schlosser

Zusammenfassung. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung mit der exakten Symmetriealgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ angegeben.

1. Einleitung

Die Methode der Lie-Symmetrien gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen hat in den letzten Jahren einen Aufschwung erlebt, nicht nur wegen wichtiger Anwendungen in der mathematischen Physik [2, 3, 5], sondern auch wegen ihrer Bedeutung in der Theorie der verallgemeinerten Symmetrien (dynamische, Lie-Bäcklund, usw.) von Differentialgleichungen [11]. Für gewöhnliche Differentialgleichungen niedriger Ordnung gibt es Klassifikationen der Gleichungen aufgrund ihrer assozierten Lie-Algebra von Punktsymmetrien (kurz: Symmetriealgebra) [8, 9, 10], die für bestimmte Gleichungstypen auch Ergebnisse in beliebiger Dimension erlauben (siehe z.B. lineare Gleichungen). Vom Gesichtspunkt der Darstellungstheorie von Lie-Algebren aus gesehen sind die Invarianzfragen auch von großer Bedeutung (wie das z.B. bei der Bestimmung der Casimiroperatoren und verallgemeinerten Casimirinvarianten der Fall ist [1, 2, 3, 4]), da z.B. in [9] gezeigt wurde, daß es keine gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ($n \geq 3$) mit einer Symmetriealgebra der Dimension $n+3$ gibt, die eine nicht-triviale Levizerlegung besitzt und deren Radikal abelsch ist [9].

In dieser Arbeit geben wir die Konstruktion nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen der Ordnung n an, die genau die einfache dreidimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (die nichtkompakte Realform der komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$) als Symmetriealgebra besitzen.

* Der Autor wurde während der Ausführung dieser Arbeit von einem Forschungsstipendium der Ramon Areces Stiftung finanziell unterstützt.

ISSN 0949–5932 / $2.50

2. Konstruktion von Differentialgleichungen mit vorgegebener Lie-Algebra von Punktsymmetrien

Wie bekannt, gibt es für die einfache Lie-Algebra

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{ X_1, X_2, X_3 \mid [X_2, X_3] = 2X_1,\ [X_1, X_i] = -(-1)^i X_i, i = 2,3 \right\} \quad (1)$$

nur eine Realisierung durch Vektorfelder in einer Variablen [7] :

$$X_1 = x\partial_x,\ X_2 = \partial_x,\ X_3 = x^2\partial_x \quad (2)$$

Da $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ von den Vektoren X_2 und X_3 erzeugt wird, genügt es, die Invarianz von Differentialgleichungen für diese beiden Elemente und ihre Erweiterungen $X_2^{(k)}$ und $X_3^{(k)}$ k-ter Ordnung nachzuprüfen, da sich die Invarianz für die gesamte Algebra sofort aus den Kommutatoren ergibt.

Theorem 2.1. *Für jedes $k \geq 4$ gibt es genau ein $(k-2)$-Tupel $(a_q)_{1\leq q\leq k-2} \in \mathbb{Z}^{k-2}$ derart, daß die Differentialgleichung*

$$y^{(k)} - \sum_{q=1}^{k-3} \frac{a_q (y'')^q \left(y^{(k-q)}\right) (y')^{k-2-q}}{(y')^{k-2}} - a_{k-2} \frac{(y'')^{k-1}}{(y')^{k-2}} = 0 \quad (3)$$

$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-invariant ist, wobei y:=y(x) eine Funktion der Variablen x ist.

Beweis. Es genügt ganze Zahlen $(a_q) \in \mathbb{Z}^{k-2}$ zu finden, für die die Erzeugenden X_2 und X_3 Symmetrien der Gleichung (3) sind, da diese Vektoren die Lie-Algebra erzeugen. Offenbar ist X_2 eine Symmetrie der Gleichung. Durch Induktion nach k läßt sich leicht zeigen, daß die Symmetriebedingung für die Erzeugende X_3 auf folgendes System linearer Gleichungen führt:

$$\begin{aligned} 2a_1 - f(k) &= 0 && (4)\\ 2qa_q + f(k+1-q)\, a_{q-1} &= 0,\ 2 \leq q \leq k-3 && (5)\\ 2(k-1)\, a_{k-2} + f(3)\, a_{k-3} &= 0 && (6) \end{aligned}$$

wobei die Funktion $f(k+1-q)$ durch

$$f(k+1-q) := k^2 + k - 2kq - q + q^2,\ 1 \leq q \leq k-2$$

definiert ist. Offenbar hat das System für jedes k eine eindeutige Lösung, die mittels einer Rekursionsformel beschrieben werden kann. Um eine geschlossene Darstellung dieser Lösung für alle Werte von k zu erhalten, ist eine elementare algebraische Manipulation erforderlich. Es ist nicht schwierig zu zeigen, daß das $(k-2)$-Lösungstupel des Systems (4)-(6) durch

$$\begin{aligned} a_q &= \frac{(-1)^q\, 2^{1-q}\, \Gamma(k)^2\, k}{2\Gamma(q+1)\,\Gamma(k-q)\,\Gamma(k+1-q)},\ 1 \leq q \leq k-3 && (7)\\ a_{k-2} &= \frac{(-1)^{k-2}\, 2^{4-k}\, \Gamma(k)^2\, k}{8(k-1)\,\Gamma(k-2)} && (8) \end{aligned}$$

gegeben ist, wobei $\Gamma(z)$ die Gammafunktion darstellt. ■

Es stellt sich die Frage, ob die Gleichungen (3) mehr als drei Punktsymmetrien erlauben, oder ob $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ schon die gesamte Symmetriealgebra ist.

Theorem 2.2. *Für jedes $k \geq 4$ erlaubt die Gleichung (3) exakt fünf Lie-Punktsymmetrien.*

Beweis. Wegen Satz 1 läßt $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ (in der Realisierung (1)) Gleichung (3) invariant. Daraus ergibt sich, daß Vektorfelder der Form

$$Y' = f(x)\,\partial_x$$

mit $f(x) \neq a + bx + cx^2$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ keine Symmetrien der Gleichung darstellen können. Die einzige Möglichkeit also, weitere Symmetrien zu erhalten, ist, die Invarianz für Vektorfelder der Gestalt

$$Y' = g(x,y)\,\partial_y$$

zu untersuchen. Routinemäßige Rechnung ergibt, daß die einzigen zulässigen Funktionen $g(x,y)$ entweder $g(x,y) = 1$ oder $g(x,y) = y$ sein können. Definieren wir $X_4 = \partial_y$ und $X_5 = y\partial_y$, erhalten wir die fünfdimensionale Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{r}_2$, wobei $\mathfrak{r}_2$ die affine Lie-Algebra in Dimension zwei darstellt (ebenfalls durch Vektorfelder von $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$ realisiert). ∎

Eine wichtige Bemerkung ist an dieser Stelle angebracht. Wäre $y^2\partial_y$ auch eine Symmetrie der Differentialgleichung (3), so hätten wir die halbeinfache Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ als Symmetriealgebra, da die affine Algebra $\mathfrak{r}_2$ die Borel-Unteralgebra von $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ist. Diese Tatsache erlaubt uns, Gleichungen zu erhalten, deren Symmetriealgebra genau $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ist. In [9] (siehe auch [10]) wurde gezeigt, daß die Gleichung dritter Ordnung

$$3\,(y'')^2 - 2y'y''' = 0 \tag{9}$$

genau sechs Punktsymmetrien erlaubt, die der Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ entsprechen. Mit Hilfe von (9) läßt sich dann folgender Satz aufstellen:

Theorem 2.3. *Für jedes $k \geq 4$ ist die Symmetriealgebra der Differentialgleichung*

$$y^{(k)} - \sum_{q=1}^{k-3} \frac{a_q\,(y'')^q\,\left(y^{(k-q)}\right)(y')^{k-2-q}}{(y')^{k-2}} - \frac{a_{k-2}\,(y'')^{k-1}}{(y')^{k-2}} + \left(y + \frac{2y'y''' - 3\,(y'')^2}{(y')^4}\right)(y')^k \tag{10}$$
$$= 0$$

zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ isomorph.

Der Beweis der Aussage ergibt sich wieder durch Anwendung von Induktion nach k. Speziell muß jede Symmetrie dieser Differentialgleichung eine Symmetrie von (3) sein, woraus sich unmittelbar ergibt, daß Gleichung (10) höchstens fünf Punktsymmetrien erlaubt. Weiter folgt, daß die Symmetriebedingung für die Vektorfelder X_4 und X_5 im Beweis von Satz 2 nicht erfüllt ist (folgt aus der Anwesenheit des Summanden $y(y')^k$ in (10)), so daß (10) maximal drei Symmetrien erlaubt, die die Lie-Algebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ erzeugen.

Schließlich stellt sich die Frage, ob Gleichung (10) die allgemeinste gewöhnliche Differentialgleichung ist, die $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ als Symmetriealgebra besitzt. Mit großem Aufwand läßt sich zeigen, daß das nicht der Fall ist, aber die Gleichung (10) ist für die Frage entscheidend, da jede (gewöhnliche) Differentialgleichung mit einer zu $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ isomorphen Lie-Punkt-Symmetriealgebra folgende Form haben muß

$$y^{(k)} = \sum_{q=1}^{k-3} \frac{a_q \left(y''\right)^q \left(y^{(k-q)}\right) \left(y'\right)^{k-2-q}}{\left(y'\right)^{k-2}} + a_{k-2} \frac{\left(y''\right)^{k-1}}{\left(y'\right)^{k-2}} + \Phi(y, y', .., y^{k-1}) \tag{11}$$

wobei der erste Summand auf der rechten Seite von (11) nicht verschwinden darf. In diesem Sinne ist (10) die einfachste Klasse $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-invarianter Differentialgleichungen.

Literatur

[1] Campoamor-Stursberg, R., *On the invariants of some solvable rigid Lie algebras*, J. Math. Phys. **43** (2003), 771–784.

[2] —, *Non-semisimple Lie algebras with Levi factor* $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ *and their invariants*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 1357–1370.

[3] —, *The structure of the invariants of perfect Lie algebras*, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 6709–6724.

[4] —, *An extension based determinantal method to compute Casimir operators of Lie algebras*, Phys. Lett. A **312** (2003), 211–219.

[5] Cerquetelli, T., N. Ciccoli, and M. C. Nucci, *Four dimensional Lie symmetry algebras and fourth order ordinary differential equations*, J. Nonlin. math. Phys. **9** (2002), 24–35.

[6] Czichowski, G., *Geometric aspects of* SL(2)*-invariant second order ordinary differential equations*, J. of Lie Theory (formerly Seminar Sophus Lie) **3** (1993), 231–236.

[7] González-López, A., N. Kamran, and P. J. Olver, *Lie algebras of vector fields in the real plane*, Proc. London Math. Soc. **64** (1992), 339–368.

[8] Mahomed, F. M., and P. G. L. Leach, *Lie algebras associated with scalar second order ordinary differential equations*, J. Math. Phys. **30** (1989), 2770–2773.

[9] —, *Symmetry Lie algebras of nth order ordinary differential equations*, J. Math. Anal. Appl. **151** (1990), 80–107.

[10] Schmucker, A., and G. Czichowski, *Symmetry algebras and normal forms of third order ordinary differential equations*, J. Lie Theory **8** (1998), 129–137.

[11] Stephani, H., "Differentialgleichungen. Symmetrien und Lösungsmethoden," Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1994.

Rutwig Campoamor-Stursberg
Laboratoire de Mathématiques et Applications F.S.T
Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
F-68093 Mulhouse Cedex (France)

R.Campoamor@uha.fr

Received June 10, 2003
and in final form September 30, 2003