Journal of Lie Theory
Volume **14** (2004) 501–508

Une courte démonstration de la formule de Campbell-Hausdorff

Loring W. Tu

Communicated by J. Faraut

Abstract. We give a simple proof of an algorithm for computing the terms of the Campbell-Hausdorff formula.
2000 AMS Subject Classification: Primary: 22E15; Secondary: 22E60

Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = T_1G$ son algèbre de Lie, vue comme l'espace tangent à G en l'élément neutre 1. Alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage U de 1 dans G tels que la restriction de l'application exponentielle $\exp : V \to U$ est un difféomorphisme. Son inverse $U \to V$ s'appelle le logarithme et s'écrit log. Si deux éléments A et B de $\mathfrak{g}$ sont suffisamment proches de l'origine, alors la formule de Campbell-Hausdorff donne l'expression de $\log(\exp A \exp B)$ en tant que série entière dans l'algèbre de Lie engendrée par A et B :

$$\exp A \exp B = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}\left([A,[A,B]] + [B,[B,A]]\right) + \cdots\right). \tag{1}$$

Dans cette note nous donnons une démonstration simple d'un algorithme pour calculer les termes de la série (1). Cet algorithme est équivalent à celui de Hausdorff ([8], Eq. (25), p. 29), qui considère le problème d'un point de vue symbolique.

1. Des séries entières formelles

Nous écrivons $\exp X$ pour l'application exponentielle d'un groupe de Lie et e^y pour la série entière formelle

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \cdots .$$

La série de Todd et son inverse sont les séries entières formelles

$$\operatorname{td}(y) = \frac{y}{1-e^{-y}} = 1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12} - \frac{y^4}{720} + \frac{y^6}{30240} - \frac{y^8}{1209600} + \frac{y^{10}}{47900160} + \cdots ,$$

$$\operatorname{td}^{-1}(y) = \frac{1-e^{-y}}{y} = 1 - \frac{1}{2!}y + \frac{1}{3!}y^2 - \cdots .$$

ISSN 0949–5932 / \$2.50

Puisqu'une série entière converge dans son disque de convergence, il existe un voisinage $V' \subset V$ de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que pour tout $X \in V'$ la série $\mathrm{td}(\mathrm{ad}\, X)$ converge vers un élément de $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$.

2. Transporter un champ de vecteurs de l'algèbre de Lie au groupe

L'application $\exp : V \to U$ étant un difféomorphisme, elle transporte un champ de vecteurs $\mathcal{C}$ sur V vers un champ de vecteurs $\mathcal{C}^*$ sur U défini par :

$$(\mathcal{C}^*)_g = \exp_{*,X}(\mathcal{C}_X) \tag{2}$$

pour $X \in V \subset \mathfrak{g}$ et $g = \exp X \in U$.

Puisque $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel, en chaque point $X \in \mathfrak{g}$ on a une identification canonique de l'espace tangent : $T_X\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}$. Par conséquent, un champ de vecteurs $\mathcal{C}$ sur le voisinage V' de 0 n'est autre qu'une application $V' \to \mathfrak{g}$. Ainsi, si on fixe un élément B dans $\mathfrak{g}$, alors pour $X \in V'$ l'application $X \mapsto (\mathrm{td}\,\mathrm{ad}\, X)B$ est un champ de vecteurs sur V'. On désigne par $\bar{B}$ le champ de vecteurs $((\mathrm{td}\,\mathrm{ad}\, X)B)^*$ sur $U' := \exp(V')$. Pour $g \in U'$ et $X = \log g$, ce champ de vecteurs a pour expression

$$\bar{B}_g = \exp_{*,X}((\mathrm{td}\,\mathrm{ad}\, X)B).$$

3. Énoncé du résultat

Soit $B \in \mathfrak{g}$. Comme $\bar{B}$ est un champ de vecteurs sur U', il opère sur les fonctions sur U'. Donc, pour $f \in C^\infty(U')$, l'expression

$$(e^{\bar{B}} f)(g) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\bar{B}^k f)(g)$$

a un sens si la série converge.

Proposition 3.1. (Formule de Campbell-Hausdorff) *Soient A, B suffisamment proches de 0 dans $\mathfrak{g}$. Alors la série*

$$(e^{\bar{B}} \log)(\exp A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\bar{B}^k \log)(\exp A)$$

converge et

$$\log(\exp A \exp B) = (e^{\bar{B}} \log)(\exp A) = (e^{((\mathrm{td}\,\mathrm{ad}\, X)B)^*} \log)(\exp A). \tag{3}$$

4. Trois règles pour calculer avec $\mathcal{C}^*$

Pour appliquer la proposition 3.1 on n'a besoin que de trois règles simples, démontrées plus loin dans cette note. La définition de $\mathcal{C}^*$ est particulièrement adaptée à la fonction log.

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{C}$ un champ de vecteurs sur $V' \subset \mathfrak{g}$, autrement dit, une application $V' \to \mathfrak{g}$.*

i) Le champ de vecteur $\mathcal{C}^*$ vérifie $\mathcal{C}^* \log = \mathcal{C} \circ \log$ sur U'.

ii) Si $B : U' \to \mathfrak{g}$ est une fonction constante, alors $\mathcal{C}^* B = 0$.

iii) (Formule du produit) Si $Y, Z : U' \to \mathfrak{g}$ sont lisses, alors

$$\mathcal{C}^*[Y, Z] = [\mathcal{C}^* Y, Z] + [Y, \mathcal{C}^* Z].$$

5. Exemple de calcul

Avant de démontrer les propositions 3.1 et 4.1, calculons les termes de degré inférieur ou égal à 4 dans la formule de Campbell-Hausdorff.

Soient X un élément proche de 0 dans $\mathfrak{g}$ et $w_X = (\operatorname{td} \operatorname{ad} X)B$ dans $\mathfrak{g}$. Alors

$$\begin{aligned} w_X = (\operatorname{td} \operatorname{ad} X)B &= (1 + \frac{1}{2} \operatorname{ad} X + \frac{1}{12} (\operatorname{ad} X)^2 - \frac{1}{720} (\operatorname{ad} X)^4 + \cdots)B \\ &= B + \frac{1}{2}[X, B] + \frac{1}{12}[X, [X, B]] - \frac{1}{720}[X, [X, [X, [X, B]]]] + \cdots . \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, nous écrirons dans la suite $L = \log$. Avec cette notation, $[L, B]$ est une fonction lisse $U' \to \mathfrak{g}$ dont la valeur en $g \in U'$ est $[L, B](g) = [\log g, B]$. En appliquant les trois règles de la proposition 4.1, on a, modulo les termes de degré strictement supérieur à 4 en L et B,

$$\begin{aligned} w^* L = w \circ L &\approx B + \frac{1}{2}[L, B] + \frac{1}{12}[L, [L, B]], \\ (w^*)^2 L = w^*(w^* L) &\approx w^* B + \frac{1}{2} w^*[L, B] + \frac{1}{12} w^*[L, [L, B]] \\ &\approx \frac{1}{2}[w \circ L, B] + \frac{1}{12}[w \circ L, [L, B]] + \frac{1}{12}[L, [w \circ L, B]] \\ &\approx \frac{1}{4}[[L, B], B] + \frac{1}{24}[[L, [L, B]], B] + \frac{1}{12}[B, [L, B]] + \frac{1}{24}[L, [[L, B], B]] \\ &\approx \frac{1}{6}[B, [B, L]] + \frac{1}{12}[B, [L, [B, L]]], \\ (w^*)^3 L &= \frac{1}{6}[B, [B, w \circ L]] + \frac{1}{12}[B, [w \circ L, [B, L]]] + \frac{1}{12}[B, [L, [B, w \circ L]]] + \cdots \\ &= \frac{1}{12}[B, [B, [L, B]]] + \frac{1}{12}[B, [B, [B, L]]] + \cdots = 0 + \cdots . \end{aligned}$$

Par suite, d'après le proposition 3.1,

$$\begin{aligned}
&\log(\exp A \exp B) = (e^{w^*} L)(\exp A)\\
&= \left(1 + w^* + \frac{1}{2!}(w^*)^2 + \frac{1}{3!}(w^*)^3 + \cdots\right) L\Big|_{\exp A}\\
&= L + \left(B + \frac{1}{2}[L,B] + \frac{1}{12}[L,[L,B]]\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{6}[B,[B,L]] + \frac{1}{12}[B,[L,[B,L]]]\right) + \frac{1}{3!}\cdot 0 + \cdots \Big|_{\exp A}\\
&= A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]] + \frac{1}{24}[B,[A,[B,A]]] + \cdots .
\end{aligned}$$

La comparaison de ce calcul avec le calcul dans ([7], pp. 6.20–6.22) montre que l'algorithme proposé dans la proposition 3.1 apparaît plus rapide que la formule de Dynkin, car ce calcul comporte moins de termes et aussi moins d'annulations.

6. Les outils

La démonstration de la proposition 3.1 repose sur deux résultats standard : le théorème de Taylor et la dérivée de l'application exponentielle.

Si $B \in \mathfrak{g}$, alors le champ de vecteurs invariant à gauche $\tilde{B}$ sur G est :

$$\tilde{B}_g = (\ell_g)_* B, \qquad \text{pour } g \in G.$$

Théorème de Taylor ([13], Prop. 5.15, p. 125). Soient f une fonction analytique au voisinage d'un point $g \in U \subset G$, et B un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ suffisamment proche de 0. Alors

$$f(g \exp B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\tilde{B}^k f)(g) = (e^{\tilde{B}} f)(g). \tag{4}$$

Dérivée de l'application exponentielle (voir par exemple [7], §6.4, ou [9], p. 67). Soient $X \in V \subset \mathfrak{g}$, puis $C \in T_X\mathfrak{g}$ identifié à $\mathfrak{g}$. Si $g = \exp X$, alors

$$\exp_{*,X}(C) = (\ell_g)_*((\mathrm{td}^{-1} \operatorname{ad} X)(C)). \tag{5}$$

7. Comparaison des champs de vecteurs

De (5), on déduit une relation entre les deux champs de vecteurs $\tilde{B}$ et $\bar{B}$ définis par un élément B de $\mathfrak{g}$.

Proposition 7.1. *Pour tout $B \in \mathfrak{g}$, les champs de vecteurs $\tilde{B}$ et $\bar{B}$ sur U' sont égaux.*

Démonstration. Pour $g \in U'$, on écrit $g = \exp X$. Alors

$$\begin{aligned}
\bar{B}_g &= \exp_{*,X}((\mathrm{td} \operatorname{ad} X)B) && \text{(par définition de } \bar{B})\\
&= (\ell_g)_*(\mathrm{td}^{-1} \operatorname{ad} X)(\mathrm{td} \operatorname{ad} X)B && \text{(d'après l'équation (5))}\\
&= (\ell_g)_* B = \tilde{B}_g && \text{(par définition de } \tilde{B})
\end{aligned}$$

■

8. Démonstration de la formule et des règles de calcul

Démonstration de la prop. 3.1. Dans le théorème de Taylor (équation (4)), on prend pour f la fonction log et pour g le point $\exp A$. Alors

$$\begin{aligned} f(g \exp B) = \log(\exp A \exp B) &= (e^{\tilde{B}} \log)(\exp A) = (e^{\bar{B}} \log)(\exp A) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\bar{B}^k \log)(\exp A), \end{aligned}$$

puisque $\tilde{B} = \bar{B}$. La convergence de la série est garantie par le théorème de Taylor. ∎

Démonstration de la prop. 4.1.

i) Soit $g = \exp X$ dans U'. Alors $X = \log g$ et

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}^* \log)(g) = (\mathcal{C}^*)_g \log &= (\exp_{*,X} \mathcal{C}_X)(\log) = \mathcal{C}_X(\log \circ \exp) \\ &= \mathcal{C}_X(\mathrm{id}) = \mathcal{C}_X = (\mathcal{C} \circ \log)(g). \end{aligned}$$

ii) est clair.

iii) On choisit une base $E_1, \ldots, E_n$ pour $\mathfrak{g}$, puis on écrit

$$[E_i, E_j] = \sum c_{ij}^k E_k.$$

Si $Y = \sum y_i E_i$ et $Z = \sum z_j E_j$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^*[Y, Z] &= \mathcal{C}^* \sum c_{ij}^k y_i z_j E_k \\ &= \sum c_{ij}^k (\mathcal{C}^* y_i) z_j E_k + \sum c_{ij}^k y_i (\mathcal{C}^* z_j) E_k \\ &= [\mathcal{C}^* Y, Z] + [Y, \mathcal{C}^* Z], \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{C}^*$ est un champ de vecteurs sur U'. ∎

9. Finitude de l'algorithme

Conservons les notations ci-dessus, à savoir A et B sont deux éléments proches de 0 dans $\mathfrak{g}$, $w_X = (\mathrm{td}\,\mathrm{ad}\, X)B$ pour $X \in V'$, et $L = \log$. D'après la proposition 3.1,

$$\log(\exp A \exp B) = \left(1 + w^* + \frac{1}{2!}(w^*)^2 + \frac{1}{3!}(w^*)^3 + \cdots\right) L \bigg|_{\exp A}. \tag{6}$$

Comme l'expression à droite est une somme infinie, pour qu'elle donne un algorithme effectif, il faut montrer qu'on peut calculer les termes de degré n en un nombre fini d'étapes.

Soit Y un monôme de Lie en L et en B. On désigne par $\deg Y$ et $\deg_B Y$ le degré total de Y et le degré de Y en B respectivement. Par exemple,

$$\deg[L, [B, [L, [B, L]]]] = 5 \qquad \text{et} \qquad \deg_B[L, [B, [L, [B, L]]]] = 2.$$

Si Y est un polynôme de Lie homogène, c'est-à-dire dont tous les termes sont de même degré, alors le degré de Y est bien défini.

Lemme 9.1. *Soient W un monôme de Lie en X et B, et Y un monôme de Lie en L et B. Supposons $W^*Y \neq 0$. Alors W^*Y est un polynôme de Lie homogène en L et B, et homogène en B. De plus,*

i) $\deg W^*Y = \deg W + \deg Y - 1$,

ii) $\deg_B W^*Y = \deg_B W + \deg_B Y$.

Démonstration. i) Effectuons une récurrence sur le degré de Y. Lorsque $\deg Y = 1$, on a $Y = B$ ou $Y = L$. Si $Y = B$, alors $W^*Y = 0$. Si $Y = L$, alors

$$\deg W^*L = \deg W \circ L = \deg W = \deg W + \deg L - 1,$$

ce qui démontre i) pour $\deg Y = 1$.

Maintenant supposons que i) est valable pour W^*Y et W^*Z. Alors

$$W^*[Y,Z] = [W^*Y, Z] + [Y, W^*Z].$$

D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \deg[W^*Y, Z] &= \deg W^*Y + \deg Z \\ &= \deg W + \deg Y - 1 + \deg Z \\ &= \deg W + \deg[Y,Z] - 1, \end{aligned}$$

et de même pour $[Y, W^*Z]$. Donc,

$$\deg W^*[Y,Z] = \deg W + \deg[Y,Z] - 1.$$

ii) La démonstration est analogue à celle de i), en effectuant une récurrence sur $\deg(Y)$ (et non sur $\deg_B Y$). ■

Lemme 9.2. *Soit $w = (\operatorname{td} \operatorname{ad} X)B \in \mathfrak{g}$. Alors le degré en B de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est égal à k.*

Démonstration. Le lemme est évident pour $k = 1$. D'après le lemme 9.1 et par récurrence sur k, nous avons

$$\begin{aligned} \deg_B (w^*)^k L &= \deg_B(w^*((w^*)^{k-1}L)) \\ &= \deg_B w + \deg_B((w^*)^{k-1}L) \\ &= 1 + (k-1) = k. \end{aligned}$$ ■

Lemme 9.3. *Pour $k \geq 2$, le degré total (en L et B) de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est au moins $k+1$.*

Démonstration. D'après le lemme 2, le degré en B de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est k. Si le degré total est k, alors il n'y a pas de L dans ce terme. Pour $k \geq 2$, un monôme de Lie en B sans facteurs de L est 0. Donc, le degré total de chaque terme dans $(w^*)^k L$ est au moins $k+1$. ∎

Il résulte du lemme 9.3 que les termes de degré n de la série de Campbell-Hausdorff (6) sont les termes de degré n de la somme finie

$$\left(1 + w^* + \frac{1}{2!}(w^*)^2 + \cdots \frac{1}{(n-1)!}(w^*)^{n-1}\right) L\bigg|_{\exp A}. \tag{7}$$

D'après le lemme 9.1(i), pour calculer les termes de degré n de $(w^*)^k L$, on peut supprimer tous les termes de degré $> n+1$ de w^*. Donc chaque terme $(w^*)^k L$ dans la somme (7) a un nombre fini de termes de degré n. Ceci montre que (7) calcule les termes de degré n de la série de Hausdorff en un nombre fini d'étapes.

Remerciements. Je remercie l'Institut Henri Poincaré et l'Institut de Mathématiques de Jussieu pour leur hospitalité pendant la période 2001–03, ainsi que Raoul Bott et Paul Gérardin pour maintes discussions fructueuses. Paul Gérardin a lu attentivement plusieurs versions de ce texte et j'ai profité de ses commentaires astucieux. Je tiens aussi à remercier le rapporteur pour des suggestions qui ont amélioré cet article.

Références

[1] Baker, H. F., *Alternants and continuous groups*, Proc. London Math. Soc., Second Series **3** (1905), 24–47.

[2] Bourbaki, N., "Groupes et algèbres de Lie", chapitre 2, Hermann, Paris, 1972.

[3] Campbell, J. E., *On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups*, Proc. London Math. Soc. (1) **28** (1897), 381–390.

[4] Campbell, J. E., *On a law of combination of operators (second paper)*, Proc. London Math. Soc. **29** (1898), 14–32.

[5] Dynkin, E. B., *Normed Lie algebras and analytic groups*, Amer. Math. Soc. Transl. **1953** (1953), 470–534.

[6] Eichler, M., *A new proof of the Baker-Campbell-Hausdorff formula*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 23–25.

[7] Godement, R., "Introduction à la théorie des groupes de Lie", tome 2, Publications Math. de l'Université Paris 7, Paris, 1982.

[8] Hausdorff, F., *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie*, Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse **58** (1906), 19–48.

[9] Hausner, M. et J. T. Schwartz, "Lie Groups; Lie Algebras," Gordon and Breach, New York, 1968.

[10] Hofmann, K. H., *Die Formel von Campbell, Hausdorff, und Dynkin und die Definition Liescher Gruppen*, "Theory of Sets and Topology," edited by G. Asser et al, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972, pp. 251–264.

[11] Kobayashi, T. et T. Oshima, "Lie Groups and Lie Algebras" (en japonais), vol. 1, Iwanami Shoten, Tokyo, 2001.

[12] Mneimné, R. et F. Testard, "Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques," Hermann, Paris, 1986.

[13] Sagle, A. A. et R. E. Walde, "Introduction to Lie Groups and Lie Algebras," Academic Press, New York, 1973.

[14] Serre, J. P., "Lie Algebras and Lie Groups," Lecture Notes in Math. 1500, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.

[15] Varadarajan, V. S., "Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations," Graduate Text in Math. 102, Springer-Verlag, New York, 1984.

Loring W. Tu
Department of Mathematics
Tufts University
Medford, MA 02155-7049
USA
loring.tu@tufts.edu

Received May 13, 2003
and in final form November 22, 2003