Journal of Lie Theory
Volume **7** (1997) 121–146

Sur la conjecture de Corwin-Greenleaf

A la mémoire du Professeur Lawrence J. Corwin

Fujiwara Hidenori

Communicated by J. Ludwig

Abstract. Let $G=\exp(\mathfrak{g})$ be a nilpotent Lie group, $H=\exp(\mathfrak{h})$ a closed subgroup of G. Let $\chi=\chi_f$ be a unitary character of H and $\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi$ the induced representation of G. Let us suppose that the multiplicities of the irreducible representations occuring in the disintegration of τ are finite. We prove in this note the conjecture of Corwin-Greenleaf, which says that the algebra $D_\tau(G/H)$ of the differential operators which commute with τ is isomorhic to the algebra $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$ under the condition that the H-orbits in Γ_τ are of dimension ≤ 1.

Introduction

Il y a bien des années que la méthode des orbites a été lancée par Kirillov [15]. Cette méthode s'est révélée primordiale pour la théorie de représentations unitaires des groupes de Lie résolubles. On s'intéressait d'abord aux polarisations, aux représentations induites correspondantes et y entassait des résultats fascinants. Ensuite c'était des travaux de Benoist, Corwin-Greenleaf et Grélaud qui faisaient une bonne base de départ pour étudier les représentations monomiales plus générales.

Soit toujours $G=\exp(\mathfrak{g})$ un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Etant donnés un sous-groupe fermé connexe $H=\exp(\mathfrak{h})$, ayant l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, et son caractère unitaire χ, on considère la représentation induite $\tau=\mathrm{ind}_H^G\chi$ de G. Précisons notre façon de l'induction. Soit $\mathcal{K}(G,\chi)$ l'espace des fonctions (à valeurs dans les nombres complexes) sur G, continues à support compact modulo H, et vérifiant la condition de covariance

$$\psi(gh)=\chi^{-1}(h)\psi(g)\quad(g\in G,h\in H)\tag{1}$$

La norme $\|\psi\|$ sur $\mathcal{K}(G,\chi)$ définie par

$$\|\psi\|^2=\int_{G/H}|\psi(g)|^2d\dot{g},$$

ISSN 0949–5932 / \$2.50

$d\dot{g}$ désignant une mesure invariante fixée sur G/H, est G-invariante et ainsi G agit de façon isométrique par translations à gauche dans $\mathcal{K}(G,\chi)$. Nous obtenons la représentation unitaire $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$ dans le complété $\mathcal{H}_\tau$ de $\mathcal{K}(G,\chi)$. En premier lieu on connaît la désintégration centrale canon

$$\tau \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi),$$

$\widehat{G}$ indiquant le dual unitaire de G. On décrit cette formule en termes de la méthode des orbites (cf. [5], [12], [16]). Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace vectoriel dual de $\mathfrak{g}$. Pour $l \in \mathfrak{g}^*$ on définit la forme bilinéaire B_l sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ par $B_l(X,Y) = l([X,Y])$. On voit d'abord que le caractère χ s'écrit sous la forme $\chi(\exp(X)) = e^{if(X)}$, $(\forall X \in \mathfrak{h})$, $(i = \sqrt{-1})$ pour une certaine forme linéaire $f \in \mathfrak{g}^*$ telle que $f([\mathfrak{h},\mathfrak{h}]) = \{0\}$. Introduisons l'espace affine $\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp$ de $\mathfrak{g}^*$, où $\mathfrak{h}^\perp = \{l \in \mathfrak{g}^* : l(\mathfrak{h}) = \{0\}\}$.

Alors la mesure μ est l'image par l'application de Kirillov $\mathfrak{g}^* \to \widehat{G}$ d'une mesure finie équivalente à la mesure de Lebesgue sur Γ_τ, et la multiplicité $m(\pi)$ est égale au nombre des H-orbites incluses dans $\Omega(\pi)\cap\Gamma_\tau$, $\Omega(\pi)$ désignant l'orbite coadjointe de G associée à $\pi \in \widehat{G}$ (cf. [6], [15]).

On se trouve dans l'alternative suivante: soit il existe un borne uniforme pour toutes les multiplicités $m(\pi)$ ou soit $m(\pi) \equiv \infty$ pour π quelconque.

En second lieu, définissons une certaine algèbre des opérateurs différentiels. On note $C^\infty(G,\tau)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G qui vérifient la relation de covariance (1). Soit $\mathrm{Diff}(G,\tau)$ l'algèbre des opérateurs différentiels qui sont C^∞ et qui laissent $C^\infty(G,\tau)$ stable. Notre objet à étudier, c'est $D_\tau(G/H)$ qui se constitue des restrictions $D|C^\infty(G,\tau)$ de $D \in \mathrm{Diff}(G,\tau)$ commutant à la translation à gauche de G dans $C^\infty(G,\tau)$.

Décrivons d'abord $D_\tau(G/H)$ en t(cf. [7]). Pour $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on note $R(A)$ son action à droite. On définit:

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : R(A) \text{ laisse } C^\infty(G,\tau) \text{ stable }\},$$

$$\mathfrak{a}_\tau : \quad \text{le sous-espace vectoriel de } \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \text{ engendré par } Y + if(Y)(Y \in \mathfrak{h}),$$

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau : \quad \text{l'idéal gauche de } \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \text{ engendré par } \mathfrak{a}_\tau.$$

Alors il se trouve que

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : [Y,A] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau, \forall Y \in \mathfrak{h}\}$$

et que l'application $A \mapsto R(A)|C^\infty(G,\tau)$ nous donne un homomorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ sur $D_\tau(G/H)$ avec le noyau $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. En somme,

$$D_\tau(G/H) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

Corwin et Greenleaf se proposent la question suivante (voir aussi [9], [10], [11], [18] dans un contexte général): quand est-ce que $D_\tau(G/H)$ est-elle commutative? La commutativité de $D_\tau(G/H)$ est-elle équivalente à la finitude des multiplicités $m(\pi)$? Leur premier résultat dit:

Théorème 1 ([7]). *Si $m(\pi) < \infty$ μ-presque partout, $D_\tau(G/H)$ est commutative.*

En examinant de près la démonstration du Théorème 1 et bien des exemples, ils posent la conjecture: si $m(\pi) < \infty$ μ-presque partout, alors l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$, l'algèbre des fonctions polynomiales H-invariantes sur Γ_τ. C'est ce que nous appelons "la conjecture de Corwin-Greenleaf". Peu après ils y ont apporté une réponse affirmative. Supposons

(i) $m(\pi) < \infty$ μ-presque partout,

(ii) il existe une polarisation $\mathfrak{b}$ commune pour μ-presque toutes $l \in \Gamma_\tau$ telle que $\mathfrak{h}$ normalise $\mathfrak{b}$.

Sous ces conditions, dont la deuxième est assez gênante, ils établissent le:

Théorème 2 ([8]). *Sous les hypothèses* (i), (ii), *l'algèbre $D_\tau(G/H)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$.*

Très récemment Baklouti [2] vient de redémontrer le Théorème 2 comme une application de ses résultats sur un opérateur concret d'entrelacement entre τ et sa désintégration.

Nous nous sommes proposés dans [14] d'étudier les deux théorèmes et la conjecture dus à Corwin-Greenleaf par une méthode toute différente de la leur, et y avons redémontré le Théorème 1. Nos raisonnements se basent sur la formule de Plancherel pour τ, et suivent ceux de la seconde moitié de la thèse de Benoist [1].

Cette note succède [14] et établit en des cas bien particuliers la conjecture de Corwin-Greenleaf dans notre ligne de recherches. Ce travail a été entamé, lorsque l'auteur passait un mois en '95 à l'Université Paris VI. Il remercie vivement le Professeur David Wigner, l'Université Paris VI et tous ses collègues de Paris pour leur hospitalité. Il tient à noter qu'il a profité de discussions avec Michel Duflo et Charles Torossian.

Rappels

Rappelons brièvement ce qu'on a fait dans [14]. Pour une représentation unitaire ρ de G, on note $\mathcal{H}_\rho$, $\mathcal{H}_\rho^\infty$ et $\mathcal{H}_\rho^{-\infty}$ respectivement l'espace de Hilbert de ρ, l'espace des vecteurs C^∞ de ρ et l'antidual de $\mathcal{H}_\rho^\infty$. Pour $a \in \mathcal{H}_\rho^{\pm\infty}$ et $b \in \mathcal{H}_\rho^{\mp\infty}$, on note $\langle a, b\rangle$ l'image de b par a. Donc $\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle}$.

On revient maintenant à la désintégration

$$\tau = \operatorname{ind}_H^G \chi \simeq \int_{\widehat{G}}^{\oplus} m(\pi)\pi d\mu(\pi),$$

et on suppose désormais que $m(\pi) < \infty$ μ-presque par Plancherel pour τ ([13]). Soit $\mathcal{D}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur G. Pour $\phi \in \mathcal{D}(G)$ on construit un élément ϕ^χ de $\mathcal{H}_\tau^\infty$:

$$\phi^\chi(g) = \int_H \phi(gh)\chi(h)dh \ \ (\forall g \in G),$$

dh dénotant une mesure de Haar fixée sur H. Alors la formule de Plancherel due à Penney [17] se décrit pour τ:

$$\phi^{\chi}(g) = \int_{\widehat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi_g) a_{\pi}^{k}, a_{\pi}^{k} \rangle d\mu(\pi) \ \ (\forall g \in G), \tag{2}$$

où $\phi_g(x) = \phi(gx)$ pour tout $x \in G$. Ici les distributions tempérées a_{π}^{k} appartenant à

$$(\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H,\chi} = \{b \in \mathcal{H}_{\pi}^{-\infty} : \pi(h)b = \chi(h)b, \forall h \in H\}$$

sont obtenues comme suit. L'orbite coadjointe $\Omega(\pi)$ de G associée à π rencontre μ-presque partout Γ_{τ} en un nombre $m(\pi)$ de H-orbites, soient $\omega_{\pi}^{1}, \cdots, \omega_{\pi}^{m(\pi)}$. On prend $l \in \omega_{\pi}^{k}$ et une polarisation $\mathfrak{b}$ en l pour réaliser $\pi = \operatorname{ind}_{B}^{G} \chi_l$, où $B = \exp(\mathfrak{b})$ et où $\chi_l(\exp X) = e^{il(X)} (\forall X \in \mathfrak{b})$, ce qui nous permet de décrire a_{π}^{k} explicitement: il existe une mesure invariante $d\dot{h}$ sur l'espace homogène $H/H \cap B$ telle que

$$\langle a_{\pi}^{k}, \psi \rangle = \int_{H/(H\cap B)} \overline{\psi(h)\chi(h)} d\dot{h} \tag{3}$$

quelque soit $\psi \in \mathcal{H}_{\pi}^{\infty}$. Maintenant si l'on applique $R(X)(X \in \mathfrak{g})$ à (2), un simple calcul nous amène (cf. [14]) à

$$(R(X)\phi^{\chi})(g) = \int_{\widehat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi_g) a_{\pi}^{k}, \pi(X) a_{\pi}^{k} \rangle d\mu(\pi) \ \ (\forall g \in G).$$

D'où, pour $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ on a

$$(R(X)\phi^{\chi})(g) = \int_{\widehat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi_g) \alpha_{\pi}^{k} \rangle d\mu(\pi) \ \ , \tag{4}$$

pour tout $g \in G$. Pour suivre le chemin de Benoist, on espère bien que $\pi(\overline{X}) a_{\pi}^{k} (X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau))$ est un multiple de a_{π}^{k}. En effet, notons $\mathfrak{g}(l) (l \in \mathfrak{g}^*)$ le noyau de la forme bilinéaire B_l, à savoir $\mathfrak{g}(l) = \{X \in \mathfrak{g} : B_l(X, Y) = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}$. Soit Q l'ensemble des $l \in \Gamma_{\tau}$ telles que $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l)$ soit un sous-espace lagrangien pour B_l. On voit que Q est un ouvert de Zariski de Γ_{τ}.

Lemme 1 ([14]).*Pour $l \in Q$, on construit $a(l) \in (\mathcal{H}_{\pi}^{-\infty})^{H,\chi}$, où $\pi \in \widehat{G}$ est associée à l'orbite $G \cdot l$, par la formule (3). Alors pour tout $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$, $\pi(\overline{X}) a(l)$ est un multiple de $a(l)$, c'est-à-dire qu'il existe un caractère λ_l : $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau) \to \mathbb{C}$ tel que*

$$\overline{X} a(l) = \pi(\overline{X}) a(l) = \overline{\lambda_l(X)} a(l)$$

pour n'importe quel $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$.

On en a retrouvé le Théorème 1 comme corollaire. A chaque $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ on associe ainsi une fonction P_X sur Q définie par

$$P_X(l) = \lambda_l(X).$$

En utilisant un opérateur d'entrelacement, on voit facilement que la fonction P_X est H-invariante. En fait, P_X ne dépend pas du choix de la polarisation qui réalise la représentation irréductible π associée à l'orbite $G\cdot l$ (cf. [13]). De plus il résulte de la formule de Plancherel pour τ que l'homomorphisme

$$D_\tau(G/H)\simeq\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\ni[X]\mapsto P_X$$

est injectif, ici $[X]$ dénote l'image canonique de X. On est arrivé jusqu'ici dans [14].

Vers la conjecture

Pour atteindre la conjectu suivantes:

1) La fonction P_X s'étend-elle en une fonction polynomiale sur Γ_τ?

2) Si 1) est le cas, l'homomorphisme

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau\ni[X]\mapsto P_X\in\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$$

est-il surjectif?

On désigne par $S(\mathfrak{g})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ et en considère des éléments comme fonctions polynomiales sur $i\mathfrak{g}^*, i=\sqrt{-1}$. Alors $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$ s'identifie à $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$, l'ensemble des vecteurs H-invariants sous l'action adjointe. On a donc d'un côté $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$, et de l'autre côté $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau = (\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)^H$, et les questions 1), 2) reviennent à dire qu'on y cherche un isomorphisme par

$$(\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)^H\ni[X]\mapsto P_X\in(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H.$$

Donc, notre question fondamentale est:

Question 1. Etant donné $X\in\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, comment calculer la fonction $P_X(l)$ sur Q?

Comme G est nilpotent, la symétrisation

$$\beta: S(\mathfrak{g})\Longrightarrow\mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

nous sera peut-être utile. En effet, c'est le cas pour les espaces symétriques (cf. [1]). Si $X\in\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ est de degré inférieur ou égal 1 dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, alors $X=\lambda W+\alpha$ avec $W\in\mathfrak{g}$ et $\lambda,\alpha\in\mathbb{C}$, tels que $[\mathfrak{h},W]\subset\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}\cap\ker(f)$. Donc $W\in\mathfrak{h}+\mathfrak{g}(l)$ pour tout $l\in Q$, comme $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}(l)$ est lagrangien. On calcule:

$$\begin{aligned}&\langle P_X(l)a(l),\phi\rangle=\langle\overline{X}a(l),\phi\rangle=\langle\overline{\alpha}a(l),\phi\rangle\\&-\langle\overline{\lambda}a(l),W\phi\rangle=\langle\overline{\alpha}a(l),\phi\rangle-\overline{\lambda}\int_{H/(H\cap B)}\overline{(L(W)\phi)(h)\chi_f(h)}dh,\end{aligned}$$

où L représente l'ac $H' = \exp(\mathfrak{h}')$, la dernière intégrale s'identifie à

$$\int_{H'/(H'\cap B)} \overline{(L(W)\phi)(h')\chi_l(h')}dh' = \overline{il(W)} \int_{H'/(H'\cap B)} \overline{\phi(h')\chi_l(h')}dh'$$
$$= \overline{il(W)} \int_{H/(H\cap B)} \overline{\phi(h)\chi_l(h)}dh.$$

A savoir,

$$\overline{P_X(l)}a(l) = \overline{(\alpha - \lambda il(W))}a(l) = \beta^{-1}(\overline{X})(il)a(l),$$

i.e. $P_X(l) = \overline{\beta^{-1}(\overline{X})(il)}$ pour $l \in Q$. Lorsque $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ appartient au centre $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, le résultat de Kirillov dit qu'on vérifie $P_X(l) = \overline{\beta^{-1}(\overline{X})(il)}$ pour $l \in Q$ quelconque.

Exemple. Soit $\mathfrak{g} = \langle X, U, V, E, Z\rangle_{\mathbb{R}}$ avec les crochets non-nuls: $[U, V] = E$, $[X, U] = V$, $[X, V] = Z$. Donc le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathbb{R}Z + \mathbb{R}E$. Soient $f = E^*$ et $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X + \mathbb{R}E$. Si l'on prend $A = 2UZ - V^2$ et $W = A - 2EX$, on constate que $[\mathfrak{h}, A] = \{0\}$ et que $W \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Pour $l \in \Gamma_\tau$, on a $\mathfrak{g}(l) = \mathfrak{z} + \mathbb{R}(X - l(Z)U + l(V)V)$ et cela entraîne que $\tau = \mathrm{ind}_H^G\chi$ est à multiplicités finies. On voit que A et W sont deux représentants du même élément de $D_\tau(G/H) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ et que

$$Aa(l) = Wa(l) = \beta^{-1}(W)(il)a(l) = \beta^{-1}(A)(il)a(l) = (l(V)^2 - 2l(Z)l(U))a(l).$$

Par suite,

$$A^3a(l) = W^3a(l) = (l(V)^2 - 2l(Z)l(U))^3a(l) = \beta^{-1}(W^3)(il)a(l)$$

puisque $W^3 \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Un calcul direct dans $S(\mathfrak{g})$ nous donne pourtant que

$$\beta^{-1}(A^3) = (2UZ - V^2)^3 - 2Z^2E^2.$$

D'où

$$A^3a(l) \neq \beta^{-1}(A^3)(il)a(l).$$

Cet exemple nous oblige, si nous voulons nous servir pleinement la symétrisation β, qu'il faut bien choisir un élément représentatif dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/$ et même y faire intervenir une partie de $\mathfrak{h}$.

Pour le moment nous allons faire attention aux générateurs rationnels de $D_\tau(G/H)$ introduits dans [7]. Soit $\mathfrak{g}_0$ un idéal de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$, et qui contient $\mathfrak{h}$. On suppose que presque toutes les H-orbites dans Γ_τ sont non-saturées dans la direction $(\mathfrak{g}_0)^\perp$. Ecrivons $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathfrak{g}_0$, et considérons une strate $\mathcal{E}$ dans $\mathfrak{g}^*$ telle que $\mathcal{E} \cap \Gamma_\tau$ soit un ouvert de Zariski de Γ_τ. Alors il existe (cf. [7]) $A = XU + V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ avec $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ et $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0,\tau_0)$, où $\tau_0 = \mathrm{ind}_H^{G_0}\chi_f$, tel que ${}^tA$ soit $\mathcal{E}$-central, i.e. $\pi({}^tA)$ opère scalairement dans $\mathcal{H}_\pi^\infty$ pour π associeé à $l \in \mathcal{E}$. Ici, ${}^tA$ dénote l'image de A par l'anti-automorphisme principal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Si l'on introduit un drapeau de sous-algèbres:

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{p-1} \subset \mathfrak{k}_p = \mathfrak{g}, \dim((\mathfrak{k}_j/\mathfrak{k}_{j-1}) = 1,$$

(pour $1 \leq j \leq p = \dim((\mathfrak{g}/\mathfrak{h}))$, on construit un tel élément A_j à chaque étape $\mathfrak{k}_j$ où se réalise la situation décrite plus haut. Ces éléments A_j forment une famille de générateurs rationnels de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Maintenant on se donne un élément $\mathcal{E}$-central $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Pour $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ arbitraire, on a d'après la formule de Plancherel; pour tous $\phi \in \mathcal{D}(G)$ et $g \in G$,

$$(R([W,A])\phi^f)(g) = \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} \langle \pi(\phi_g)a_\pi^k, \overline{[W,A]}a_\pi^k \rangle d\mu(\pi)$$

$$= \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} (\langle \pi(\phi_g)a_\pi^k, \overline{W}\overline{A}a_\pi^k \rangle - \langle {}^tA\pi(\phi_g)a_\pi^k, \overline{W}a_\pi^k \rangle) d\mu(\pi)$$

$$= \int_{\hat{G}} \sum_{k=1}^{m(\pi)} (P_A(l) - P_A(l)) \langle \pi(\phi_g)a_\pi^k, \overline{W}a_\pi^k \rangle d\mu(\pi) = 0$$

Cela veut dire que $[W,A] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. On est ainsi amené à considérer

$$\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) : [V,A] = VA - AV \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau, \forall V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\}.$$

Alors, on voit que, X_j étant des éléments de $\mathfrak{g}$,

$$[A, X_1X_2\cdots X_m] = \sum_{j=1}^{m} X_1\cdots X_{j-1}[A,X_j]X_{j+1}\cdots X_m$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{m} X_1\cdots X_{i-1}(ad[A,X_i])(X_{i+1}\cdots X_m) \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$$

$$= \sum_{i<j} X_1\cdots X_{i-1}\hat{X}_iX_{i+1}\cdots X_{j-1}[[A,X_i],X_j]X_{j+1}\cdots X_m \mod \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau,$$

où $\hat{X}_i$ signifie l'absence de X_i, et donc inductivement que

$$[[\cdots[[A,X_1],X_2]\cdots],X_m] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau.$$

En d'autres termes,

$$\mathcal{J} = \{A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) : (adX_1)\cdots(adX_m)(A) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau, \forall X_j \in \mathfrak{g}, \forall m \in \mathbb{N}\}.$$

En spécialisant la question 1, nous laissons les:

Question 2. Pour tout $A \in \mathcal{I} = \mathcal{J} \cap \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau, \beta^{-1}(\overline{A})(il) = 0 (\forall l \in Q)$?

Question 3. A-t-on $P_X(l) = \overline{\beta^{-1}(\overline{X})(il)} (l \in Q)$ pour tout $X \in \mathcal{J}$?

Si l'on quitte la symétrisation β et si l'on se propose d'avancer vers la conjecture de Corwin-Greenleaf par récurrence sur $\dim((G) + \dim((G/H)$, le cas essentiel est celui où $\dim((\mathfrak{z}) = 2$ et $\dim((\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}) = 1$ tel que $f(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}) \neq 0$. Ici on convient de noter $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. De plus, il n'existerait aucun idéal de codimension 1 pour lequel μ-presque toutes les G-orbites sont saturées. En effet, s'il existe un tel idéal contenant $\mathfrak{h}$, le théorème 5.4, (b) dans [7] nous assure qu'il ne nous reste rien à faire. D'autre part, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} \cap \ker(f) \neq \{0\}$, on peut descendre au quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ auquel s'applique l'hypothèse de récurrence. Par contre si $\dim((\mathfrak{z}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z})) \geq 2$, soient Z_1, Z_2 deux éléments centraux linéairement indépendants modulo $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}$. Posons $\mathfrak{h}_j = \mathfrak{h} + \mathbb{R}Z_j (j = 1,2)$. Si l'on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{h}_1$, et si l'on fixe la valeur $l(Z_1)$ dans Q, la fonction $P_X(l)$, $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, doit être polynomiale, ce qui veut dire que le dénominateur de la fonction $P_X(l)$ ne contient que la variable $l(Z_1)$ sur Γ_τ. De même pour Z_2. Par conséquent, $P_X(l)$ se trouve polynomiale.

En ce qui concerne la surjectivité de l'application qui envoie $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ sur $P_X(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H \simeq (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$, on se place pour le moment dans le cas où $\mathfrak{z} \not\subset \mathfrak{h}$ et soit $0 \neq Z \in \mathfrak{z} \setminus (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z})$. Posons $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + \mathbb{R}Z$, $H' = \exp(\mathfrak{h}')$ et $\tau_\alpha = \operatorname{ind}_{H'}^G \chi_l$ avec $\alpha = l(Z)$. Etant donnée une fonction polynomiale $F(l)$ dans $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$, il existe W, $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ tels que $F(l) = P_W(l)/P_A(l)$, car l'image de l'application en question engendre rationnellement l'algèbre $\mathbb{C}(\Gamma_\tau)^H$ des fonctions rationnelles H-invariantes sur Γ_τ (cf. [7]). L'hypothèse de récurrence appliquée à τ_α nous dit qu'il existe $Y_\alpha \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ vérifiant $F(l) = P_{Y_\alpha}(l)$. En prenant une base $\{X_j\}_{j=1}^d$, $d = \dim((\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$, supplémentaire à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ et en convenant d'écrire $X^I = X_1^{i_1}X_2^{i_2}\cdots X_d^{i_d}$ pour le multi-indice $I = (i_1, i_2, \cdots i_d)$, on écrit

$$W \equiv \sum_{I,p} c_{I,p}X^I Z^p \equiv \sum_{I,p} c_{I,p}X^I(-il(Z))^p + V(Z+il(Z))(c_{I,p}\in\mathbb{C})$$

et $A \equiv \sum_{J,q} a_{J,q}X^J Z^q (a_{J,q}\in\mathbb{C})$ modulo $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. D'où

$$\sum_{I,p} c_{I,p}X^I(-il(Z))^p \equiv (\sum_{J,q} a_{J,q}X^J(-il(Z))^q)Y_\alpha + V_\alpha(Z+il(Z)),$$

$$W \equiv (\sum_{J,q} a_{J,q}X^J(-il(Z))^q)Y_\alpha + (V_\alpha+V)(Z+il(Z)),$$

i.e.

$$\begin{aligned} W \equiv &(\sum_{J,q} a_{J,q}X^J(-i\alpha)^q)Y_\alpha + (V_\alpha+V)(Z+i\alpha) \\ =&(\sum_{J,q} a_{J,q}X^J(-i\alpha)^q)Y_\alpha + \tilde{V}_\alpha(Z+i\alpha), \end{aligned}$$

où Y_α ne contient pas Z. On en déduit que Y_α est rationnelle par rapport à α. La substitution $Z = -i\alpha$ nous amène à

$$W_{Z=-i\alpha} \equiv (\sum_{J,q} a_{J,q}X^J(-i\alpha)^q)Y_\alpha.$$

On en voit que Y_α reste vrai rationnelle en α seulement si A possède un facteur polynomial uniquement de Z. Si Y_α est polynomiale en α, on fait la substitution $\alpha \to iZ$ pour obtenir un élément Y de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ tel que $W \equiv AY$. On en déduit

$P_Y = F$ et que $Y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, ce qui veut dire que F appartient à l'image de l'application P.

Lorsque $\dim((\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z})) \geq 2,$, soit $\mathfrak{z} = (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}) + \sum_j \mathbb{R}Z_j$ avec une base $\{Z_j\}$ supplémentaire à $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}$ dans $\mathfrak{z}$. On se donne $X \in (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$. D'après ce qu'on vient de voir et l'hypothèse de récurrence, il existe deux polynômes $P_1(Z_1)$, $P_2(Z_2)$ tels que $P_1(Z_1)X = P_{W_1}$, $P_2(Z_2)X = P_{W_2}$ avec certains W_1, $W_2 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Alors $P_1(Z_1)P_2(Z_2)X \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$ est associé à la fois à $P_1(Z_1)W_2$ et à $P_2(Z_2)W_1$, i.e. $P_1(Z_1)W_2 \equiv P_2(Z_2)W_1$ mod. $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$. Si l'on exprime W_1, W_2 au moyen d'une base supplémentaire à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$, W_2 est divisible par $P_2(Z_2)$ et W_1 l'est par $P_1(Z_1)$. Cela signifie qu'il existe $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ tel que $W_2 = P_2(Z_2)V$, $W_1 = P_1(Z_1)V$. D'où $X = P_V$.

Supposons maintenant qu'il existe un idéal $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ vérifiant

$$\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0, \dim((\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) = 1$$

et que μ-presque toutes les G-orbites coadjointes soient saturées dans la direction $(\mathfrak{g}_0)^\perp$. Soit $T \in \mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}T + \mathfrak{g}_0$. On sait que chaque $l \in \Gamma_\tau$ générique possède une polarisation $\mathfrak{b}$ contenue dans $\mathfrak{g}_0$. Posons $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0$, $H_0 = \exp(\mathfrak{h}_0)$, $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$, $l_0 = l_{|\mathfrak{g}_0} \in \mathfrak{g}_0^*$ et $\pi_0 = \mathrm{ind}_B^{G_0}\chi_{l_0}$. Il s'ensuit que $\tau_0 = \mathrm{ind}_{H_0}^{G_0}\chi_{f_0}$ (où $f_0 = f_{|\mathfrak{g}_0}$) est à multiplicités finies.

On peut copier la démonstration du théorème 1 dans [14] pour montrer que $P_X(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$ pour tout $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Inversement, soit $F(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$. Dans le cas présent $F(l)$ s'identifie à un polynôme H-invariant $F(l_0)$ sur $\Gamma_{\tau_0} = f_0 + \mathfrak{h}_0^\perp \subset \mathfrak{g}_0^*$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0,\tau_0)$ tel qu'on ait $P_X(l_0) = F(l_0)$ pour $l_0 \in \Gamma_{\tau_0}$ génériques. Plus précisément, pour $l_0 \in \Gamma_{\tau_0}$ telles que le sous-espace $\mathfrak{h}_0$ de $\mathfrak{g}_0$ s'avère lagrangien relativement à la forme bilinéaire B_{l_0}. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $h(t) = \exp(tT)$ et $X(t) = Ad(h(t))X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0,\tau_0)$. Notons Q_0 l'ensemble de telles $l_0 \in \Gamma_{\tau_0}$.

Vu la formule (3) qui nous donne la distribution $a_0(l_0) \in (\mathcal{H}_{\pi_0}^{-\infty})^{H_0,\chi}(l_0 \in Q_0)$, on voit que

$$\pi_0(\overline{X(t)})a_0(l_0) = \pi_0(\overline{X})a_0(h(-t)\cdot l_0) = \overline{F(h(-t)\cdot l_0)}a_0(l_0) = \overline{F(l)}a_0(l_0).$$

S'il en est ainsi, d'après la formule de Plancherel pour τ, on confirme que l'application

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto [X(t)] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0,\tau_0)/\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)\mathfrak{a}_{\tau_0}$$

est constante. D'où, en dérivant en t, on prouve que $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Ensuite en appliquant X à $a(l)$, on peut passer comme dans la démonstration du théorème 1 de [14] la première coordonnée par rapport à T dans l'intégrale (3) de $a(l)$, ce qui nous fournit $P_X(l) = F(l)$ pour $l \in Q$. On vérifie ainsi la surjectivité de l'application en question.

De tout ce qu'on vient de voir, si nous employons ce chemin de raisonnement par récurrence, le cas essentiel est celui où $\dim((\mathfrak{z}) = 2, \dim((\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}) = 1$ et où $f(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z}) \neq \{0\}$. Soit $\mathfrak{z} = \mathbb{R}Z + (\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z})$. On peut supposer par récurrence que, pour tout $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, il existe un polynôme $F(Z) = F_W(Z)$ de Z tel que $F(Z)W$ corresponde à un polynôme dans $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$. De plus, soient $\mathfrak{g}_0$ un idéal de codimension 1 et $X \in \mathfrak{g}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathfrak{g}_0, \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Dans le cas où μ-presque toutes les G-orbites coadjointes sont non-saturées dans la direction $(\mathfrak{g}_0)^\perp$, on a un élément $\mathcal{E}$-central $A = XU + V$ remarqué plus haut dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0,\tau_0)$, où $\tau_0 = \mathrm{ind}_H^{G_0}\chi$, U correspond à un polynôme dans $\mathbb{C}[\Gamma_{\tau_0}]^H$. Soit donc $P_U(l) = (I(Z)J)(il)(l \in Q)$ avec un certain polynôme $I(Z)$ de Z et un certain $J \in S(\mathfrak{g})$ dont la restriction à Γ_τ n'admet aucun polynôme de Z. Si encore $P_A(l)$ est polynomiale en $l \in Q$, c'est le cas par exemple si $A \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, alors en utilisant la récurrence sur le degré de W par rapport à X, on peut choisir comme F un exposant de I, i.e. il existe un entier non négatif m tel que $I(Z)^m W$ corresponde à un polynôme dans $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$.

Comment peut-on effacer le facteur $I(Z)^m$? Nous allons en voir un exemple, c'est-à-dire le cas où $\dim((\mathfrak{h}) = 1$.

Certains cas particuliers

Nous allons établir dans ce qui suit la conjecture, lorsque $\dim((H\cdot)l \leq 1$ pour $l \in \Gamma_\tau$ générique. Traitons d'abord un cas particulier.

Assertion. *Si* $\dim((\mathfrak{h}) = 1$, *alors la conjecture s'établit.*

Démonstration . On montre d'abord que $P_X(l)$ est un polynôme pour tout $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$. Commençons par choisir une polarisation $\mathfrak{b}(l)$ en chaque $l \in Q$. Alors $\mathrm{codim}(\mathfrak{b}(l)) \leq 1$ et $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{b}(l)$. Evidemment il suffit de supposer que la codimension de $\mathfrak{b}(l) = 1$ pour toute $l \in Q$ et que $\mathfrak{g} = \sum_{l\in Q}\mathfrak{b}(l)$. Posons $\mathfrak{g}_0 = \bigcap_{l\in Q}\mathfrak{b}(l)$ et $d = \mathrm{codim}(\mathfrak{g}_0)$. On a $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_0$. Si $d = 1$, alors $\mathfrak{g}_0$ est une polarisation commune à toutes les $l \in Q$, ce qui entraîne le résultat comme on le verra plus tard. Supposons désormais que $d \geq 2$.

Supposons d'abord $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Il s'ensuit que $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0] \subset \bigcap_{l\in Q}\ker(l) \subset \mathfrak{h} = \mathbb{R}Y$. En fait, il suffit de supposer que $\mathfrak{h}$ n'est pas central dans $\mathfrak{g}$, ce qui entraîne que $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0] = \{0\}$ car $[\mathfrak{g}_0,\mathfrak{g}_0]$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Soient $\{X_1,\cdots,X_d\}$ des éléments de $\mathfrak{g}$, linéairement indépendants modulo $\mathfrak{g}_0$. Cela entraîne que $\mathfrak{g} = (\sum_{j=1}^d \mathbb{R}X_j) + \mathfrak{g}_0$ et que $W_j = [X_j, Y]$ $(1 \leq j \leq d)$ sont linéairement indépendants. En effet, si $W \in \mathfrak{g}$ vérifie $[W,Y] = 0$, W appartient à $\mathfrak{b}(l)$ pour toute $l \in Q$ et donc à $\mathfrak{g}_0$. Soit $\mathfrak{n} = (\sum_{j=2}^d \mathbb{R}X_j) + \mathfrak{g}_0$.

On constate aussitôt que

$$X_jW_k - X_kW_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

sont H-invariants. D'autre part, la distribution de Penney s'écrit, e étant l'élément neutre de G,

$$a(l) : \psi \mapsto \overline{\psi(e)}$$

pour $\psi \in \mathcal{H}_\pi^\infty$, où $\pi = \pi_l = \mathrm{ind}_B^G\chi_l$ avec $B = B(l) = \exp(\mathfrak{b}(l))$, et il est immédiat que

$$Ua(l) = il(U)a(l), \forall U \in \mathfrak{b}(l).$$

Comme $l(W_k)X_j - l(W_j)X_k \in \mathfrak{b}(l)$ pour tout $1 \leq j,k \leq d$, il s'ensuit que

$$(X_jW_k - X_kW_j)a(l) = i(l(W_k)X_j - l(W_j)X_k)a(l)$$

$$= -(l(W_k)l(X_j) - l(W_j)l(X_k))a(l) = \beta^{-1}(X_jW_k - X_kW_j)(il)a(l).$$

Supposons maintenant que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$. Remarquons que $\mathfrak{g}_0$ est abélienne. Il résulte de $d \geq 2$ que $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0$, et prenons un idéal $\mathfrak{n}$ de codimension 1 tel que $\mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{n}$. Soient $\mathfrak{g} = \mathbb{R}e_1 + \mathfrak{n}$ et $\mathfrak{h} = \mathbb{R}Y$. Posons inductivement $e_{j+1} = [Y, e_j]$. Soit k le premier entier positif tel que $e_{k+1} = 0$. On peut choisir e_1 de telle façon que $k \geq 2$ pourvu que $\mathfrak{g}$ soit non-abélienne. Si $k = 2$ pour n'importe quel e_1, $L = \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} Y$ vérifie $L^2 = 0$. Si de plus $L = 0$ sur $\mathfrak{g}_0$ qui contient $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0$ devient un idéal abélien de $\mathfrak{g}$. Quitte à remplacer $\mathfrak{b}(l)$ par une autre qui contient $\mathfrak{p}$, on se ramène au cas précédent. Supposons donc que $L \neq 0$ sur $\mathfrak{g}_0$. Soit $\tilde{e}_3 \in \mathfrak{g}_0$ tel que $\tilde{e}_4 = [Y, \tilde{e}_3] \neq 0$. On en déduit que $X = e_1\tilde{e}_4 - e_2\tilde{e}_3$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est H-invariant. Soit maintenant $k \geq 3$. On définit $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ par

$$X = 2e_1e_k - 2e_2e_{k-1} + 2e_3e_{k-2} - 2e_4e_{k-3} + \cdots + 2e_{m-1}e_{m+3} - 2e_me_{m+2} + e_{m+1}^2$$

si $k = 2m + 1$ est impair, et

$$X = e_1e_k^{k-2} - e_2e_{k-1}e_k^{k-3} + e_3e_{k-1}^2e_k^{k-4}/2! - e_4e_{k-1}^3e_k^{k-5}/3! + e_5e_{k-1}^4e_k^{k-6}/4!$$
$$- \cdots - e_{k-2}e_{k-1}^{k-3}e_k/(k-3)! + e_{k-1}^{k-1}/(k-3)!(k-1)$$

si $k = 2m$ est pair. Ici,

$$\langle a(l), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(\exp(tY))e^{itf(Y)}}dt$$

et, R désignant l'action à droite,

$$\langle Xa(l), \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{(R(\overline{X})\psi)(\exp(tY))e^{itf(Y)}}dt.$$

D'autre part, pour presque toute $l \in \Gamma_\tau$ il existe $\alpha(l) \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 - \alpha(l)Y$ appartient à $\mathfrak{g}(l)$ et l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} (R(e_1)\psi)(\exp(tY))e^{itf(Y)}dt = \int_{\mathbb{R}} (R(e_1 - \alpha(l)Y)\psi)(\exp(tY))e^{itf(Y)}dt$$
$$+\alpha(l)\int_{\mathbb{R}} (R(Y)\psi)(\exp(tY))e^{itf(Y)}dt$$
$$= (-il(e_1 - \alpha(l)Y) - i\alpha(l)f(Y))\int_{\mathbb{R}} \psi(\exp(tY))e^{itf(Y)}dt$$
$$= -il(e_1)\int_{\mathbb{R}} \psi(\exp(tY))e^{itf(Y)}dt = \langle -il(e_1)a(l), \psi \rangle.$$

Donc on vérifie que

$$Xa(l) = \beta^{-1}(X)(il)a(l) \quad \text{i.e.} \quad P_X(l) = \overline{\beta^{-1}(\overline{X})(il)}.$$

Maintenant pour $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ quelconque, on écrit $W = \sum_{j=0}^r X_1^j V_j$ (si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$) ou $W = \sum_{j=0}^r e_1^j V_j$ (si $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$) avec certains $V_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{n})$ $(0 \leq j \leq r)$ et on va montrer que $P_W(l)$ est une fonction polynomiale. Cette assertion se montre par récurrence sur le degré r de W par rapport à X_1 (resp. e_1). Si $r=0$, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{n}$.

Puisque $V_r \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, on a que $P_{X^rV_r}(l) = P_{X^r}(l)P_{V_r}(l)$ (où $X = X_1W_d - X_dW_1$ si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$) est un polynôme d'après l'hypothèse de récurrence et comme $WW_d^r - X^rV_r$ (resp. $W\tilde{e}_4^r - X^rV_r$ ou $We_k^p - X^rV_r$ pour un certain entier non-negatif p) dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ est de degré inférieur à r par rapport à X_1 (resp. e_1), $(W_d(il))^rP_W(l)$ (resp. $(\tilde{e}_4(-il))^rP_W(l)$ ou $(e_k(-il))^pP_W(l)$) est une fonction polynomiale. En fin de compte, $P_W(l)$ est une fonction rationnelle dont le dénominateur est un facteur de $(W_d(-il))^r$ (resp. $(\tilde{e}_4(-il))^r$ ou $(e_k(-il))^p$).

Allons utiliser encore une fois la formule de Plancherel. La décomposition centrale canonique de τ est équivalente à une autre (cf. [16]):

$$\tau \simeq \int_{\Gamma_\tau/H} \pi_l d\tilde{\mu}(\dot{l}),$$

et conformément à cette décomposition, la formule de Plancherel pour τ se décrit:

$$\phi^\chi(e) = \int_{\Gamma_\tau/H} \langle \pi_l(\phi)a_\omega, a_\omega\rangle d\tilde{\mu}(\dot{l})(\forall\phi \in \mathcal{D}(G)),$$

où ω dénote H-orbite passant $l \in Q \subset \Gamma_\tau$ et où a_ω est la distribution de Penney correspondante. Il en vient que, pour tout $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$,

$$\int_{G/H} (R(X)\phi^\chi)(g)\overline{\phi^\chi(g)}d\dot{g} = R(X)(\phi^* * \phi)^\chi(e) = \int_{\Gamma_\tau/H} P_X(l)\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2 d\tilde{\mu}(\dot{l}),$$

où $\phi^*(g) = \overline{\phi(g^{-1})}(\forall g \in G)$. En y substituant $X = W^m(\forall m \in \mathbb{N})$, on voit

$$\begin{aligned}\int_{G/H} (R(W^m)\phi^\chi)(g)\overline{\phi^\chi(g)}d\dot{g} &= \int_{\Gamma_\tau/H} P_{W^m}(l)\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2 d\tilde{\mu}(\dot{l}) \\ &= \int_{\Gamma_\tau/H} (F_1(l)/F_2(l))^m \|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2 d\tilde{\mu}(\dot{l}), \qquad (5)\end{aligned}$$

où $F_1(l)$ est un polynôme en l, et où $F_2(l) = (W_d(-il))^{r'}$ (resp. $(\tilde{e}_4(-il))^{r'}$ ou $(e_k(-il))^{p'}$) avec un certain entier non-négatif $r' \leq r$ (resp. $r' \leq r$ ou $p' \leq p$). La mesure $\tilde{\mu}$ de désintégration étant une n'importe quelle quasi-image de la mesure de Lebesgue sur $\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp$, quoique ce choix de $\tilde{\mu}$ entraîne évidemment d'autres normalisations de mesures, l'intégrale du dernier membre de la formule ci-dessus doit être divergente pour m assez grand s'il y reste le dénominateur, ce qui entraîne une contradiction cherchée. C'est ainsi qu'on vérifie que la fonction $P_W(l)$ est polynomiale. On en verra le détail plus tard.

Examinons maintenant la surjectivité de l'application $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \ni X \mapsto P_X(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$. Fixons une suite d' idéaux:

$$\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}; \dim((\mathfrak{g}_j) = j(0 \leq j \leq n).$$

Soit j_0 l'indice tel que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_{j_0-1}$ mais $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{j_0}$. Prenons des éléments non nuls $X_j (j \neq j_0)$ tels que $X_j \in \mathfrak{g}_j \setminus \mathfrak{g}_{j-1}$ et posons $\mathfrak{m} = \sum_{j \neq j_0} \mathbb{R} X_j$. Alors $\mathfrak{m}$ est un sous-espace invariant pour $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ et supplémentaire à $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$. C'est-à-dire que le couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ est réductif. Ainsi chaque X dans $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$ ou dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau = (\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau)^H$ admet un élément représentatif H-invariant dans $S(\mathfrak{m})$ ou $\beta(S(\mathfrak{m}))$.

Parmi les multi-indices $I = (i_n, \cdots, i_{j_0+1}, i_{j_0-1}, \cdots, i_1)$ de longueur $n-1$, on introduit l'ordre lexicographique, i.e.

$$I < J = (j_n, \cdots, j_{j_0+1}, j_{j_0-1}, \cdots, j_1) \iff i_n = j_n, \cdots, i_{k+1} = j_{k+1}, i_k < j_k.$$

On dit qu'un monôme

$$c X_n^{i_n} \cdots X_{j_0+1}^{i_{j_0+1}} X_{j_0-1}^{i_{j_0-1}} \cdots X_1^{i_1} (c \in \mathbb{C})$$

est d'indice $I = (i_n, \cdots, i_{j_0+1}, i_{j_0-1}, \cdots, i_1)$ et convient que l'indice d'un élément

$$X = \sum_I c_I X^I = \sum_I c_I X_n^{i_n} \cdots X_{j_0+1}^{i_{j_0+1}} X_{j_0-1}^{i_{j_0-1}} \cdots X_1^{i_1} (c_I \in \mathbb{C})$$

de $S(\mathfrak{m})$ signifie celui le plus grand des monômes apparaissant dans X. On obtient la surjectivité par récurrence sur l'indice. Soit $X = \sum_I c_I X^I \in S(\mathfrak{m})^H$ d'indice I_0. Prenons $X' \in S(\mathfrak{m})$ tel qu'on ait $X(l) = \overline{X'(il)}$ pour $l \in \mathfrak{g}^*$. Alors X', et donc $\beta(\overline{X'}) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est H-invariant et il nous donne un polynôme $P_{\beta(\overline{X'})}$ sur Γ_τ qui est H-invariant, à savoir $P_{\beta(\overline{X'})} \in (S(\mathfrak{m})/S(\mathfrak{m})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$. Si l'on prend dans $S(\mathfrak{m})^H$ un élément représentatif $\tilde{P}_{\beta(\overline{X'})}$ de $P_{\beta(\overline{X'})}$, on constate que l'indice de $X - \tilde{P}_{\beta(\overline{X'})}$ est plus petit que celui de X. D'après l'hypothèse de récurrence il existe $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ tel que

$$P_W(l) = (X - \tilde{P}_{\beta(\overline{X'})})(l) = (X - P_{\beta(\overline{X'})})(l) (l \in \Gamma_\tau).$$

Enfin $X = P_{W + \beta(\overline{X'})}$.

c.q.f.d.

Nous allons généraliser un peu ce résultat. On considère d'abord le cas, où $\dim((\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z})) \leq 1$. Il est immédiat qu'on peut supposer que $\dim((\mathfrak{h}/\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}) = 1$. Soient $\mathfrak{h} = \mathbb{R}Y + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z})$ et $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \oplus_{k=1}^s \mathbb{R} Z_k$. En faisant attention à l'élément Y, on prouve comme dans le cas où $\dim((\mathfrak{h}) = 1$ que, pour tout $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$, $P_V(l) (l \in Q)$ s'étend en une fonction polynomiale sur Γ_τ.

Pour montrer la surjectivité de l'application qui associe à $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ la fonction $P_V(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$, nous prenons un drapeau d' idéaux

$$\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{k}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{k}_{m-1} \subset \mathfrak{k}_m = \mathfrak{g}; \dim((\mathfrak{k}_j/\mathfrak{k}_{j-1}) = 1 (1 \leq j \leq m).$$

Soit j_0 le premier indice j tel que $Y \in \mathfrak{k}_j$. Pour chaque j différent de j_0, on extrait un $X_j \in \mathfrak{k}_j \setminus \mathfrak{k}_{j-1}$. Etant donnée $F(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H \simeq (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$, on choisit un élément représentatif $W \in S(\mathfrak{g})$ vérifiant $[W, Y] \in S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau}$ et

$$W = \sum_I c_I X^I = \sum_I c_I X_m^{i_m} \cdots X_{j_0+1}^{i_{j_0+1}} X_{j_0-1}^{i_{j_0-1}} \cdots X_1^{i_1}.$$

Alors $[Y,W] \in S(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p} = \sum_{k=1}^{s} \mathbb{C}(Z_k - if(Z_k))$. D'où $\overline{\beta(W)} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, ce qui nous permet de raisonner comme dans le cas où $\dim((\mathfrak{h}) = 1$.

Avançons encore d'un pas. Supposons que la dimension des G-orbites génériques passant par Γ_τ est égale à deux. Soit $\mathfrak{b}(l)$ une polarisation en $l \in \Gamma_\tau$ générique, et posons comme avant $\mathfrak{g}_0 = \cap_{l\in Q}\mathfrak{b}(l)$. Alors tout comme avant, $\dim((\mathfrak{g}/\mathfrak{b}(l)) = 1$, et l'on peut supposer que $\mathfrak{g}_0$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$.

Nous avons remarqué plus haut que, si nous nous proposons de démontrer la conjecture de Corwin-Greenleaf, nos raisonnements précédents nous ramènent au cas où $\dim((\mathfrak{z}) = 2$, $\dim((\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}) = 1$ et où f ne s'annule pas sur $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$. Cette réduction est aussi faisable dans notre cadre, c'est-à-dire qu'en gardant l'hypothèse sur la dimension des orbites génériques apparaissant dans la désintégration de τ. Soient $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z} = \mathbb{R}E$, $f(E) = 1$ et $\mathfrak{z} = \mathbb{R}E + \mathbb{R}Z$. Prenons $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}$ tel que $[Y,\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}$.

Si $\dim(([\mathfrak{g},Y]) = 1$, on peut raisonner comme dans le cas où $\dim((\mathfrak{z}) = 1$. Supposons dorénavant que $\dim(([\mathfrak{g},Y]) = 2$, i.e. $\mathfrak{z} = [\mathfrak{g},Y]$ et fixons deux éléments X_1, X_2 dans $\mathfrak{g}$ vérifiant $[X_1,Y] = E$, $[X_2,Y] = Z$. On voit que $\mathfrak{i} = \mathbb{R}Y + \mathfrak{z}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et qu'on peut supposer que $\mathfrak{b}(l)$ est contenu dans l'orthogonal $\mathfrak{i}^l$ de $\mathfrak{i}$ relativement à la forme bilinéaire B_l. Cela implique que $\mathfrak{b}(l) = \mathfrak{i}^l = \{X \in \mathfrak{g} : l([X,\mathfrak{i}]) = \{0\}\}$ pour $l \in Q$ et par suite que $\mathfrak{g}_0$ concide avec le centralisateur de $\mathfrak{i}$ dans $\mathfrak{g}$.

On se trouve dans l'une des deux éventualités suivantes: (i) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$; (ii) $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{b}(l)$ pour presque toutes $l \in \Gamma_\tau$. Dans le cas (i), pour $l \in \Gamma_\tau$ générique on a $Y \in \mathfrak{h} + \mathfrak{g}(l)$ et la substitution $Z \mapsto -il(Z)$ étant faite dans chaque $U \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, le dernier se trouve dans $\mathcal{U}(\mathfrak{i}^l)$ car l'orbite $G \cdot l$ est saturée dans la direction $(\mathfrak{i}^l)^\perp$. Ceci posé, U s'écrit

$$U = \sum_{k=0}^{m} c_k (iZX_1 - X_2)^k U_k + A = \sum_{k=0}^{m} c_k (l(Z)X_1 - X_2)^k U_k + A + V(Z + il(Z))$$

avec certains $c_k \in \mathbb{C}, U_k \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ et $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$.

D'autre part, la distribution de Penney $a(l)$ pour $\pi = \pi_l = \mathrm{ind}_{B(l)}^G \chi_l$, où $B(l) = \exp(\mathfrak{b}(l))$, s'obtient par la formule: $\langle a(l), \psi\rangle = \overline{\psi(e)}$ quel que soit $\psi \in \mathcal{H}_\pi^\infty$. Tout cela nous permet de calculer

$$\langle \overline{U} a(l), \psi\rangle = \beta^{-1}(\overline{U})(il)\langle a(l),\psi\rangle, \quad \text{i.e. } \overline{U}a(l) = \beta^{-1}(\overline{U})(il)a(l),$$

ce qui signifie que $P_U(l) = \overline{\beta^{-1}(\overline{U})(il)}$ est une fonction polynomiale sur Q.

Soit toujours $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. On a $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) \subset \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ et si l'on pose $V = X_2 - iZX_1 \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on constate que $\overline{V}a(l) = \overline{V}(il)a(l)$ pour $l \in Q$. Cela implique $V \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ et par suite que $V \in S(\mathfrak{g})$ nous donne une fonction polynomiale H-invariante sur Γ_τ, appartenant à l'image de l'application $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau) \ni X \mapsto P_X(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H \simeq (S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$. Pour montrer la surjectivité en question il nous suffit maintenant d'utiliser l'induction sur le degré par rapport à X_2 des éléments de $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$.

Nous nous plaçons dans le cas (ii). Soit d'abord $\dim((\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0) = 2$. D'une part chaque classe de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ admet un élément représentatif $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ et d'autre part, étant donnée $l \in Q$, il existe $X \in \mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathfrak{b}(l)$

avec la polarisation $\mathfrak{b}(l) = \mathfrak{i}^l$ en l, ce qui nous donne la formule $\langle a(l), \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{\psi(\exp(tX))e^{itf(X)}}dt$ pour tout $\psi \in \mathcal{H}^\infty_{\pi_l}$. On en déduit

$$\langle \overline{W}a(l), \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{(R(W)\psi)(\exp(tX))e^{itf(X)}}dt$$

$$= \overline{W}(il)\langle a(l), \psi\rangle = \beta^{-1}(\overline{W})(il)\langle a(l), \psi\rangle,$$

d'où $P_W(l) = \overline{\beta^{-1}(\overline{W})(il)}$ s'étend en une fonction polynomiale sur Γ_τ. De même pour la surjectivité de l'application

$$(\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H = \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau} \ni [X] \mapsto P_X(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H.$$

Toute $F(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$ admet un élément (représentatif) $V \in S(\mathfrak{g}_0)$ tel que $F(l) = \overline{V(il)}$ et que $[\mathfrak{h}, V] \subset S(\mathfrak{g}_0)\overline{\mathfrak{a}_\tau}$. Comme $\mathfrak{g}_0$ est abélienne, $\beta(\overline{V}) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ et puis

$$\langle \beta(V)a(l), \psi\rangle = V(il)\langle a(l), \psi\rangle (l \in Q)$$

quel que soit $\psi \in \mathcal{H}^\infty_\pi$, c'est-à-dire que $P_{\overline{V}}(l) = \overline{V(il)} = F(l)$ sur Γ_τ. Finalement soit $\dim((\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0)) = 1$. Prenons un élément $X \in \mathfrak{g}$ vérifiant

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X + \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_0.$$

Alors, chaque classe de $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ (resp. $(S(\mathfrak{g})/S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau})^H$) admet un élément représentatif W de la forme

$$W = \sum_{j=0}^m X^j U_j, U_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) \simeq S(\mathfrak{g}_0)$$

tels que $U_j \notin \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ (resp. $S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau}$). Si $m \geq 1$ et si $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0 \neq \{0\}$, on calcule pour $V \in \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0$: $[V, W] = mX^{m-1}U_m[V, X] + A$ avec un certain A dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ (resp. $S(\mathfrak{g})$) dont le degré par rapport à X est tout au plus $m-2$ (dans le cas où $m = 1$, on convient que $A = 0$). Pour que $[V, W]$ appartienne à $\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$ (resp. $S(\mathfrak{g})\overline{\mathfrak{a}_\tau}$), il faut que $[V, X]$ tombe dans $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0\cap\ \ker(f)$. Cela exige que $\mathfrak{p}$ soit un idéal de $\mathfrak{g}$. On peut donc passer au quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ si $\mathfrak{p} \neq \{0\}$, et se ramener au cas où $\dim((\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap\mathfrak{z})) \leq 1$ si $\mathfrak{p} = \{0\}$.

Nous finissons par examiner plus en détail l'intégrale (5) dans notre cas. On garde les notations. Un simple calcul nous montre (cf. [13])

$$(\pi_l(\phi)a_\omega)(g) = \int_{B(l)/(B(l)\cap H)} \phi^\chi(gb)\chi_l(b)d\dot{b} (\phi \in \mathcal{D}(G), g \in G)$$

et donc

$$\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}} = \int_{G/B(l)} \Big| \int_{B(l)/(B(l)\cap H)} \phi^\chi(gb)\chi_l(b)d\dot{b}\Big|^2 d\dot{g}.$$

De ce qui avait précédé, on peut supposer dans la formule (5) que W_d (resp. $\tilde{e}_4$ ou e_k) appartient à $\mathfrak{h}+\mathfrak{z}$ mais non pas à $\mathfrak{h}$ et ensuite que, quitte à remplacer

$Z \in \mathfrak{z} \setminus (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z})$, $F_2(l) = l(Z)^r (l \in Q)$ avec un certain entier r non négatif. A savoir:

$$\int_{G/H} (R(W^m)\phi^\chi)(g)\overline{\phi^\chi(g)} d\dot{g} = \int_{\Gamma_\tau/H} \Big(\frac{F(l)}{l(Z)^r}\Big)^m \|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2 d\tilde{\mu}(\dot{l}) (m \in \mathbb{N}) \quad (6)$$

avec un polynôme $F(l)$. Pour déterminer la mesure $\tilde{\mu}$, calculons les deux membres de la formule de Plancherel:

$$\int_{G/H} |\phi^\chi(g)|^2 d\dot{g} = \int_{\Gamma_\tau/H} \|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2 d\tilde{\mu}(\dot{l}) \quad (7)$$

pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(G)$. Soient $\mathfrak{q}$ un sous-espace supplémentaire à $\mathfrak{g}_0 \cap (\mathfrak{h} + \mathfrak{z})$ dans $\mathfrak{g}_0$ et $\{X, X'\}$ une base supplémentaire à $\mathfrak{g}_0$ dans $\mathfrak{g}$. On va introduire dans G un système de coordonnées.

Nous nous plaçons d'abord dans le cas (i), i.e. $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$. Ici, nous choisissons par exemple $X' = X_1$ et $X = X_2$. Alors tout élément $g \in G$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $g = \exp(x_1X_1)\exp(x_2X_2)\exp(V)\exp(wZ)h$ avec $x_1, x_2, w \in \mathbb{R}$, $V \in \mathfrak{q}$ et $h \in H$. Au moyen de cette expression nous identifions G à $\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{q} \times \mathbb{R} \times H$ et nous considérons $\phi \in \mathcal{D}(G)$ de la forme

$$\phi(g) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\zeta(V)\kappa(h)\phi_3(w)(g \in G)$$

avec $\phi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R})(1 \leq j \leq 3)$, $\zeta \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ et $\kappa \in \mathcal{D}(H)$. D'où

$$\int_{G/H} |\phi^\chi(g)|^2 d\dot{g} = \Big(\prod_{j=1}^{3} \|\phi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\Big)\|\zeta\|^2_{L^2(\mathfrak{q})}\Big|\int_H \kappa(h)\chi(h)dh\Big|^2$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 \Big(\prod_{j=1}^{3} \|\phi_j\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\Big)\|\zeta\|^2_{L^2(\mathfrak{q})}.$$

D'autre part,

$$\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}} = \int_{G/B(l)} \Big|\int_{B(l)/(B(l)\cap H)} \phi^\chi(gb)\chi_l(b)d\dot{b}\Big|^2 d\dot{g}.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big|\int_{\mathbb{R}\times(G_0/(G_0\cap H))} \phi^\chi(\exp(x_1X_1)\exp(x_2(l(Z)X_1 - X_2))g_0)$$
$$e^{ix_2(l(Z)l(X_1)-l(X_2))}\chi_l(g_0)dx_2 d\dot{g}_0\Big|^2 dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big|\int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp((x_1 + x_2l(Z))X_1)\exp(-x_2X_2)b(x_2,\alpha)g_0)$$
$$e^{ix_2(l(Z)\xi_1-\xi_2)}\chi_l(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2 dx_1$$

avec $\xi_j = l(X_j)(j = 1, 2)$, et où $b = b(x_2, \alpha)(\alpha = l(Z))$ désigne un certain élément de G_0. Enfin la dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)} dx_2 \int_{G_0/(G_0 \cap H)} \phi^\chi(\exp((x_1 + x_2 l(Z))X_1) \exp(-x_2 X_2) g_0)$$

$$e^{ix_2(l(Z)\xi_1 - \xi_2)} \chi_l(g_0) d\dot{g}_0 \Big|^2 dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)} dx_2 \int_{\mathfrak{q}} \phi^\chi(\exp((x_1 + x_2 l(Z))X_1) \exp(-x_2 X_2) \exp(V))$$

$$e^{ix_2(l(Z)\xi_1 - \xi_2)} e^{il(V)} dV \Big|^2 dx_1$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 |\hat{\zeta}(l_{|\mathfrak{q}})|^2 \Big| (\hat{\phi}_3)(l(Z)) \Big|^2 \int_{\mathbb{R}} dx_1$$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} \phi_1(x_1 + x_2 l(Z)) \phi_2(-x_2) \overline{\chi_l(b)} e^{ix_2(l(Z)\xi_1 - \xi_2)} dx_2 \Big|^2$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 |\hat{\zeta}(l_{|\mathfrak{q}})|^2 \Big| (\hat{\phi}_3)(l(Z)) \Big|^2 \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_2(\Phi)(x_1, l(Z)\xi_1 - \xi_2)|^2 dx_1,$$

où le symbole chapeau désigne la transformée de Fourier, et où $\mathcal{F}_2\Phi$ dénote la transformée de Fourier partielle relativement à la deuxième variable de la fonction

$$\Phi(x_1, x_2) = \phi_1(x_1 + x_2 l(Z)) \phi_2(-x_2) \overline{\chi_l(b)}.$$

En fin de compte, en posant $\alpha = l(Z)$, on constate que le produit $d\alpha d(l_{|\mathfrak{q}}) d\xi_2$ des mesures de Lebesgue se qualifie pour la mesure $\tilde{\mu}$ dans Γ_τ / H réalisé comme, par exemple, $\{l \in \Gamma_\tau : \xi_1 = \text{ constante}\}$. En effet,

$$\int_{\Gamma_\tau / H} \|\pi_l(\phi) a_\omega\|^2 d\alpha d(l_{|\mathfrak{q}}) d\xi_2$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 \|\zeta\|^2 \int_{\mathbb{R}} |(\hat{\phi}_3)(\alpha)|^2 d\alpha \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}_2(\Phi)(x_1, \alpha\xi_1 - \xi_2)|^2 d\xi_2$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 \|\zeta\|^2 \int_{\mathbb{R}} |(\hat{\phi}_3)(\alpha)|^2 d\alpha \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} |\Phi(x_1, x_2)|^2 dx_2$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 \|\zeta\|^2 \Big(\prod_{j=1}^{3} \|\phi_j\|^2 \Big),$$

i.e. cette mesure nous fournit la formule de Plancherel (7).

Allons examiner le cas (ii). Soit donc $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$. Si $\dim(\mathfrak{h}/(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0)) = 2$, on choisit $X' = X_1$, $X = X_2$ dans $\mathfrak{h}$. Tout $g \in G$ s'écrit d'une seule manière $g = \exp(V) \exp(wZ) h$ avec $V \in \mathfrak{q}$, $w \in \mathbb{R}$ et $h \in H$. On identifie ainsi G à $\mathfrak{q} \times \mathbb{R} \times H$. Considérons $\phi \in \mathcal{D}(G)$ telle que $\phi(g) = \zeta(V)\theta(w)\kappa(h)$ avec $\zeta \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$,

$\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\kappa \in \mathcal{D}(H)$. Evidemment, $\int_{G/H} |\phi^\chi(g)|^2 d\dot{g} = \|\zeta\|^2\|\theta\|^2|\kappa^\chi(e)|^2$. En ce qui concerne le membre droit de la formule (7),

$$\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}} = \int_{G/B(l)} \Big| \int_{B(l)/(B(l)\cap H)} \phi^\chi(gb)\chi_l(b)d\dot{b}\Big|^2 d\dot{g}.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \Big| \int_{B(l)/(B(l)\cap H)} \phi^\chi(\exp(xX_1)b)\chi_l(b)d\dot{b}\Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \Big| \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(xX_1)g_0)\chi_l(b)d\dot{g}_0\Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \Big| \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(g_0)\chi_{h(x)\cdot l}(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2,$$

ici $h(x) = \exp(xX_1) \in H$. On désintègre la mesure de Lebesgue dl sur Γ_τ suivant l'action de H. Soit $\Gamma_\tau^\alpha = \{l \in \Gamma_\tau : l(Z) = \alpha\}$. On sait (cf. [4]) qu'il existe une mesure positive ν_α sur Γ_τ^α/H telle qu'on ait $dl = \int_{\Gamma_\tau^\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}}(h(x)\cdot l)dx$ sur Γ_τ^α. Alors, $\tilde{\mu} = \int_{\mathbb{R}} \nu_\alpha d\alpha$ nous convient. En effet, compte tenu de la formule écrite ci-dessus,

$$\int_{\Gamma_\tau/H} \|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2 d\tilde{\mu}(\dot{l})$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \int_{\Gamma_\tau^\alpha/H} d\nu_\alpha \int_{\mathbb{R}} dx \Big| \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(g_0)\chi_{h(x)\cdot l}(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \int_{\Gamma_\tau^\alpha} dl \Big| \int_{\mathfrak{q}\times\mathbb{R}} \phi^\chi(\exp(V)\exp(wZ))e^{il(V)}e^{i\alpha w}dV\Big|^2$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{\theta}(\alpha)|^2 d\alpha \int_{\mathfrak{q}^*} dl \Big| \int_{\mathfrak{q}} \zeta(V)e^{il(V)}dV\Big|^2 = |\kappa^\chi(e)|^2\|\theta\|^2\|\zeta\|^2.$$

Soit enfin $\dim(\mathfrak{h}/(\mathfrak{h}\cap \mathfrak{g}_0)) = 1$ et choisissons $X \in \mathfrak{h}\cap \ker(f)$ en modifiant X par un multiple de E si besoin est. Prenons $X = X_2, X' = X_1$ si $[X, \mathfrak{i}] \subset \mathbb{R}Z$, et $X = X_1 + \lambda X_2 (\lambda \in \mathbb{R}), X' = X_2$ sinon. Posons $h(t) = \exp(tX) \in H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Tout $g \in G$ s'écrit d'une façon unique $g = \exp(x'X')\exp(V)\exp(wZ)h$ avec $x', w \in \mathbb{R}$, $V \in \mathfrak{q}$ et $h \in H$. En considérant $\phi \in \mathcal{D}(G)$ jouissant de la propriété $\phi(g) = \gamma(x')\zeta(V)\theta(w)\kappa(h)$ avec $\gamma, \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\zeta \in \mathcal{D}(\mathfrak{q})$ et $\kappa \in \mathcal{D}(H)$, nous répétons le même argument. Tout d'abord,

$$\int_{G/H} |\phi^\chi(g)|^2 d\dot{g} = |\kappa^\chi(e)|^2\|\gamma\|^2\|\zeta\|^2\|\theta\|^2.$$

Supposons en premier lieu $X = X_2, X' = X_1$. Calculons le membre droit de la formule de Plancherel (7).

$$\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}} = \int_{G/B(l)} \Big| \int_{B(l)/(B(l)\cap H)} \phi^\chi(gb)\chi_l(b)d\dot{b}\Big|^2 d\dot{g}.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big| \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp((x_1X_1)\exp(x_2(l(Z)X_1 - X_2))g_0)$$

$$e^{ix_2 l(Z) l(X_1)} \chi_l(g_0) dx_2 d\dot{g}_0 \Big|^2 dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \Big| \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(x_1 + x_2 l(Z))X_1) \exp(-x_2 X_2) b(x_2,\alpha) g_0)$$

$$e^{ix_2 l(Z)\xi_1} \chi_l(g_0) d\dot{g}_0 \Big|^2,$$

ici comme avant $\xi_1 = l(X_1)$ et $b = b(x_2,\alpha)$ dénote un certain élément de G_0. La dernière intégrale devient

$$\int_{\mathbb{R}} dx_1 \Big| \int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(x_1 + x_2 l(Z))X_1) \exp(-x_2 X_2) g_0)$$

$$e^{ix_2 l(Z)\xi_1} \chi_l(g_0) d\dot{g}_0 \Big|^2,$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \Big| \int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(x_1 + x_2 l(Z))X_1) g_0)$$

$$e^{ix_2 l(Z)\xi_1} \chi_{h(-x_2)\cdot l}(g_0) d\dot{g}_0 \Big|^2.$$

On note f_0 la restriction de f à $\mathfrak{g}_0$, Λ l'hyperplane $\{l \in \mathfrak{g}^* : l(Y) = 0\}$ de $\mathfrak{g}^*$ et Ξ le sous-espace affine $f_0 + (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0)^\perp$ de $\mathfrak{g}_0^*$. Soit $\Xi_\alpha = \{l \in \Xi : l(Z) = \alpha\}$ et l'on désintègre la mesure de Lebesgue dl sur Ξ_α suivant l'action de H: $dl = \int_{\Xi_\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}} (h(x)\cdot \dot{l}) dx$. Il est facile de vérifier que l'espace borélien Γ_τ/H s'identifie à $\Gamma_\tau \cap \Lambda$ et puis à $\mathbb{R} \times (\Xi/H)$ par l'application

$$\Gamma_\tau \cap \Lambda \ni l \mapsto (l(X_1), H\cdot (l_{|\mathfrak{g}_0})) \in \mathbb{R} \times (\Xi/H).$$

Sous ces observations, la mesure $\tilde{\mu}$ s'obtient comme $d\xi_1 \times \int_{\mathbb{R}} |\alpha| \nu_\alpha d\alpha$. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} |\alpha| d\alpha \int_{\Xi_\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}} \|\pi_l(\phi) a_\omega\|^2 d\xi_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\alpha \int_{\Xi_\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2$$

$$\Big| \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp((x_1 + \alpha x_2)X_1) g_0) \chi_{h(-x_2)\cdot l}(g_0) d\dot{g}_0 \Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 d\alpha \int_{\Xi_\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}} dx_2$$

$$\Big| \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(x_1 X_1) g_0) \chi_{h(x_2)\cdot l}(g_0) d\dot{g}_0 \Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 d\alpha \int_{\Xi_\alpha} \Big| \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(x_1 X_1) g_0) \chi_l(g_0) d\dot{g}_0 \Big|^2 dl$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 d\alpha \int_{\mathfrak{q}^*} \Big| \int_{\mathfrak{q}\times\mathbb{R}} \phi^\chi(\exp(\ x_1X_1)\exp(\ V)\exp(\ wZ))e^{il(V)}e^{i\alpha w}dVdw\Big|^2 dl$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x_1)|^2 dx_1 \int_{\mathbb{R}} |\hat{\theta}(\alpha)|^2 d\alpha \int_{\mathfrak{q}^*} |\hat{\zeta}(l)|^2 dl = |\kappa^\chi(e)|^2 \|\gamma\|^2 \|\zeta\|^2 \|\theta\|^2.$$

En second lieu, supposons $X = X_1 + \lambda X_2 (\lambda \in \mathbb{R}), X' = X_2$, et reprenons le même chemin que dans le cas précédent.

$$\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}} = \int_{G/B(l)} \Big| \int_{B(l)/(B(l)\cap H)} \phi^\chi(gb)\chi_l(b)d\dot{b}\Big|^2 d\dot{g}.$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \Big| \int_{\mathbb{R}\times(G_0/(G_0\cap H))} \phi^\chi(\exp((x_1X_1)\exp(\ x_2(\alpha X_1 - X_2))g_0)$$

$$e^{ix_2(\alpha l(X_1) - l(X_2))}\chi_l(g_0)dx_2 d\dot{g}_0\Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx_1 \Big| \int_{\mathbb{R}\times(G_0/(G_0\cap H))} \Phi(x_1, x_2, g_0)e^{-ix_2\xi_2(1+\lambda\alpha)}\chi_l(g_0)dx_2 d\dot{g}_0\Big|^2$$

où

$$\Phi(x_1, x_2, g_0) = \phi^\chi(\exp((-x_2(1+\lambda\alpha) - \lambda x_1)X_2)\exp((x_1 + x_2\alpha)X)bg_0).$$

Ici comme avant $\xi_2 = l(X_2), \alpha = l(Z)$ et $b = b(x_1, x_2, \alpha)$ dénote un certain élément de G_0. Le dernier membre nous donne

$$\int_{\mathbb{R}} dx_1 \Big| \int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp((-x_2(1+\lambda\alpha) - \lambda x_1)X_2)g_0)$$

$$e^{-ix_2\xi_2(1+\lambda\alpha)}\chi_{h(x_1+\alpha x_2)\cdot l}(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2$$

$$= \frac{1}{|1+\lambda\alpha|} \int_{\mathbb{R}} dx_1 \Big| \int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp((x_2 - \lambda x_1)X_2)g_0)$$

$$e^{ix_2\xi_2}\chi_{h(x_1 - \alpha x_2/(1+\lambda\alpha))\cdot l}(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2$$

Cette fois, $\tilde{\mu} = d\xi_2 \times \int_{\mathbb{R}} \nu_\alpha d\alpha$ nous convient. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\xi_2 d\alpha \int_{\Xi_\alpha/H} \|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2 d\nu_\alpha(\dot{l})$$

$$= \frac{1}{|1+\lambda\alpha|} \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 d\alpha \int_{\Xi_\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}} d\xi_2$$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)} dx_2 \int_{G_0/(G_0\cap H)} \Psi(x_1, x_2, \alpha, \xi_2, g_0)d\dot{g}_0\Big|^2,$$

où

$$\Psi(x_1, x_2, \alpha, \xi_2, g_0) = \phi^\chi(\exp((x_2 - \lambda x_1)X_2)g_0)e^{ix_2\xi_2}\chi_{h(x_1 - \alpha x_2/(1+\lambda\alpha))\cdot l}(g_0).$$

La dernière intégrale est égale à

$$\frac{1}{|1+\lambda\alpha|}\int_{\mathbb{R}^2} dx_1 d\alpha \int_{\Xi_\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}} dx_2$$

$$\Big|\int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp((x_2-\lambda x_1)X_2)g_0)\chi_{h(x_1-\alpha x_2/(1+\lambda\alpha))\cdot l}(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dx_1 d\alpha \int_{\Xi_\alpha/H} d\nu_\alpha(\dot{l}) \int_{\mathbb{R}} dx_2$$

$$\Big|\int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(\ x_2X_2)g_0)\chi_{h(x_1)\cdot l}(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dx_2 d\alpha \int_{\Xi_\alpha} dl \Big|\int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(\exp(\ x_2X_2)g_0)\chi_l(g_0)d\dot{g}_0\Big|^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} dx_2 d\alpha \int_{\mathfrak{q}^*} dl \Big|\int_{\mathfrak{q}} \phi^\chi(\exp(\ x_2X_2)\exp(\ V))e^{il(V)}e^{i\alpha w}dVdw\Big|^2$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2 \int_{\mathbb{R}} |\gamma(x_2)|^2 dx_2 \int_{\mathfrak{q}^*} |\hat{\zeta}(l)|^2 dl \int_{\mathbb{R}} |\hat{\theta}(\alpha)|^2 d\alpha$$

$$= |\kappa^\chi(e)|^2\|\gamma\|^2\|\zeta\|^2\|\theta\|^2.$$

Si $F(l)$ n'est pas divisible par α^r dans la formule (6), on en tire une contradiction comme mentionné antérieurement. En fait, dans tous les cas examinés plus haut, la normalisation des mesures qu'on vient d'employer entraîne, par abus de langage, que la mesure de Plancherel $\tilde{\mu}$ est rationnelle en $\alpha = l(Z)$. Supposons dans la formule (6) que $r > 0$ et que le polynôme $F(l)$ n'est pas divisible par $l(Z)$. En choisissant proprement des fonctions test, surtout ϕ_3 ou θ, dont la transformée de Fourier ne s'annule pas au point $\alpha = 0$, on en déduit que le membre droit de la formule (6) peut se trouver divergent tandis que son membre gauche est convergent.

En fait, pour constater la divergence du membre droit de la formule (6), nous allons valuer $\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}}$ lorsque $\alpha = l(Z)$ tend vers 0. En examinant l'expression de cette quantité qu'on vient de dvelopper, on trouve que le cas essentiel est celui où $\dim(\mathfrak{h}/\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_0) = 1$ et où $[\mathfrak{h},\mathfrak{i}] \subset \mathbb{R}Z$. En gardant les notations, on a

$$\liminf_{\alpha\to 0}\|\pi_l(\phi)a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}} \geq \int_C \liminf_{\alpha\to 0}\Big|\int_{\mathbb{R}} \overline{\chi_l(b)}dx_2$$

$$\int_{G_0/(G_0\cap H)} \phi^\chi(exp((x_1+\alpha x_2)X_1)g_0)e^{i\alpha x_2\xi_1}\chi_{h(-x_2)\cdot l}(g_0)d\dot{g}_0|^2 dx_1$$

pour toute partie compacte C de $\mathbb{R}$. Pour $\alpha \neq 0$, on peut identifier le quotient Ξ_α/H aussi à la section $\tilde{\Xi}_\alpha = \{l \in \Xi_\alpha : l(Y) = 1\}$. Dans la dernière intégrale, si l'on choisit $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ convenablement, il ne s'agit que de la variable x_2 telle que αx_2 reste dans un compact. On tient compte dans ce qui suit, selon le choix de C et de γ, du fait que ce compact non vide devient aussi petit qu'on veut dans la partie positive $\mathbb{R}_+$ (négative $\mathbb{R}_-$ si on le veut). Puis, si $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_0] \not\subset (\mathfrak{h} \cap \ker(f)) + \mathbb{R}Z$, la H-orbite $H \cdot (l_{|\mathfrak{g}_0}) \subset (\mathfrak{g}_0)^*$ n'est pas bornée pour $l \in \tilde{\Xi}_\alpha$ générique. Comme la formule de Plancherel s'établit aussi pour les fonctions de Schwartz vérifiant la condition de covariance sous l'action de H à droite, on peut choisir une fonction de Schwartz $\zeta \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$ telle que la transformée de Fourier

$$\hat{\zeta}(h(-x_2) \cdot l) = \int_{\mathfrak{q}} \zeta(V) e^{i(h(-x_2)\cdot l)(V)} dV$$

s'annule pour tout x_2 en dehors d'un compact qui ne dépend pas de α. Ceci étant, en projetant Ξ_α sur Ξ_0 le long de $\mathfrak{q}^\perp$, on a

$$\liminf_{\alpha \to 0} \|\pi_l(\phi) a_\omega\|^2_{\mathcal{H}_{\pi_l}} \geq$$

$$|\kappa^X(e)|^2 |\hat{\theta}(0)|^2 \int_C |\gamma(x_1)|^2 dx_1 \left| \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{\mathfrak{q}} \zeta(V) e^{i(h(-x_2)\cdot l_0)(V)} dv \right|^2,$$

où $l_0 \in \Gamma_0$ désigne la projection de $l \in \Gamma_\alpha$. Nous pouvons nous arranger pour que le membre droit de cette dernière inégalité soit positif pour notre fonction $\zeta \in \mathcal{S}(\mathfrak{q})$, ce qui nous amène à la divergence cherchée.

Supposons enfin $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_0] \subset (\mathfrak{h} \cap \ker(f)) + \mathbb{R}Z$. Soit $\mathfrak{d} = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0 \cap \ker(f)$. Alors $\mathfrak{j} = \mathfrak{d} + \mathbb{R}Z$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. En effet, il existe un $X_l \in \mathfrak{g}_0$ tel que $X(l) = \alpha X_1 - X_2 + X_l \in \mathfrak{g}(l)$ avec $\alpha = l(Z)$. D'où $[X(l), \mathfrak{j}] \equiv \alpha[X_1, \mathfrak{j}]$ modulo $\mathfrak{d}$. Par conséquent, $[X_1, \mathfrak{j}]$ appartient à $\ker(l)$ pour $l \in \Gamma_\tau$ génériques et donc à $\mathfrak{d}$. Si $\mathfrak{j} \neq \mathbb{R}Z$, il existe $\tilde{Y} \in \mathfrak{h}$ tel que $[\mathfrak{h}, \tilde{Y}] = \mathbb{R}Z$, car $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{z} = \mathbb{R}Z$. On se trouve ainsi dans le cas où presque toutes les G-orbites passant par Γ_τ sont saturées dans la direction $\mathfrak{k}^\perp$, où $\mathfrak{k}$ dénote le centralisateur de $\tilde{Y}$ dans $\mathfrak{g}$. On peut descendre au sous-groupe distingué $K = \exp(\mathfrak{k})$ pour montrer la conjecture.

Soit donc $\mathfrak{j} = \mathbb{R}Z$, ce qui revient de dire que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X_2 + \mathbb{R}E$. En particulier, $\mathfrak{d} = \{0\}$. S'il en est ainsi, il découle que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{i}$. Sinon, on écrirait que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{i}$ avec un certain sous-espace $\mathfrak{m}$ vérifiant $[X_2, \mathfrak{m}] = \{0\}$. D'où $\alpha[X_1, \mathfrak{m}] = [X(l), \mathfrak{m}] \subset \ker(l)$ pour $l \in \Gamma_\tau$ générique, i.e. $[X_1, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{d} = \{0\}$. Le centre $\mathfrak{z}$ étant contenu dans $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{m}$ s'avère trivial.

Il ne nous reste donc plus qu'à étudier un exemple:

$$\mathfrak{g} = \langle X_1, X_2, Y, E, Z \rangle_{\mathbb{R}}, \quad \mathfrak{h} = \langle X_2, E \rangle_{\mathbb{R}}$$

avec $f(X_2) = 0, f(E) = 1$. Les relations de crochet s'écrivent: $[X_1, Y] = E, [X_2, Y] = Z$ et $[X_1, X_2] \in \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{i} = \langle Y, Z, E \rangle_{\mathbb{R}}$. Supposons que $[X_1, X_2] \neq 0$, sinon tout est clair. Soit $X = ZX_1 + [X_1, X_2]Y$, si $[X_1, X_1] \in \mathfrak{z}$, ou $X = 2ZX_1 + \delta Y^2$ si $[X_1, X_2] = \delta Y \notin \mathfrak{z}$, quitte à remplacer $Y \in \mathfrak{i} \setminus \mathfrak{z}$. On a déja vu dans le cas où $\dim(\mathfrak{h})$=1 que $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^H$ et que $P_X(l)$ était une fonction polynomiale de l génériques. Considérons un élément représentatif

$$W = P_m(Z) X_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_k(Y, Z) X_1^k$$

dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$, où P_m est un polynôme à une variable et où $P_k (0 \leq k \leq m-1)$ sont à deux variables. Alors $[X_2, W] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})(E_1 + if(E))$ et donc $[X_2, \overline{\beta^{-1}(W)}] \in S(\mathfrak{g})(E - if(E))$. On écrit dans $S(\mathfrak{g})$ avec certains polynômes $Q_k (0 \leq k \leq m-1)$ à deux variables:

$$\overline{\beta^{-1}(W)} = P_m(Z) X_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(Y,Z) X_1^k$$

modulo $S(\mathfrak{g})(E - if(E))$. En calculant la condition $[X_2, \overline{\beta^{-1}(W)}] \in S(\mathfrak{g})(E - if(E))$, on vérifie aussitôt que $P_m(Z)$ est divisible par Z^m. On en déduit qu'il existe un polynôme $\tilde{P}_m$ à une variable tel que $W - \tilde{P}_m(Z) X^m \in \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)$ est de degré tout au plus $m-1$ par rapport à X_1. Il résulte de la récurrence sur ce dgré que $P_W(l)$ sétend en un élément de $\mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$.

On arrive ainsi au:

Théorème 1. Supposons que $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$ est à multiplicités finies. Si $\dim(G \cdot l) \leq 2$ pour $l \in \Gamma_\tau$ génériques, alors la conjecture de Corwin-Greenleaf s'établit.

Allons montrer le fait qu'on a utilisé dans la démonstration du théorème 1. Par ailleurs A.Baklouti et J.Ludwig (cf. [3]) viennent de démontrer ce fait indépendamment de l'auteur. Leur méthode se repose sur une théorie de l'opérateur d'entrelacement qu'ils ont exploitée (cf. [2]). A savoir:

Théorème 2. La conjecture de Corwin-Greenleaf s'établit, s'il existe une polarisation $\mathfrak{b}$ commune pour μ-presque toutes $l \in Q$.

Démonstration. Prenons un idéal $\mathfrak{n}$ de codimension 1 contenant $\mathfrak{b}$. Soient $N = \exp(\mathfrak{n})$, $B = \exp(\mathfrak{b})$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{n}$, $H_0 = \exp(\mathfrak{h}_0)$ et $\tau_0 = \mathrm{ind}_{H_0}^N \chi$. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}$, tout se ramène à $\mathfrak{n}$ auquel s'applique l'hypothèse de récurrence. Supposons que $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{n}$. Pour tout $X \in D_\tau(G/H) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g},\tau)/\mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{a}_\tau$, on choisit son représentant dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$ et on identifie $\Gamma_\tau = f + \mathfrak{h}^\perp$ avec $\Gamma_{\tau_0} = (f_{|\mathfrak{n}}) + (\mathfrak{h}_0)^{\perp,\mathfrak{n}^*} \subset \mathfrak{n}^*$. Alors on voit comme dans la démonstration du théorème 1 de [14] que $P_X(l)$ nous donne un polynôme sur Γ_τ.

Inversement on se donne un polynôme $F(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$. D'après la H_0-invariance de $F(l)$, l'hypothèse de récurrence dit qu'il existe $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{n},\tau_0)$ tel que $P_X(l) = F(l)$ pour $l \in \Gamma_{\tau_0}$ génériques, i.e. $\overline{X} a_0(l) = \overline{F(l)} a_0(l)$, où $a_0(l)$ dénote la distribution de Penney pour $(H_0, \pi_0(l))$ avec $\pi_0(l) = \mathrm{ind}_B^N \chi_l$. Ceci étant, on rappelle un argument utilisé antérieurement. La définition (3) de $a_0(l)$ nous fournit,

$$\langle \overline{X} a_0(l), \psi \rangle = \int_{H_0/(H_0 \cap B)} \overline{(L({}^t X)\psi)(h)\chi(h)} dh$$

pour tout $\psi \in \mathcal{H}_{\pi_0(l)}^\infty$. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathbb{R}Y$ avec un certain $Y \notin \mathfrak{n}$. Posons $h_s = \exp(sY) (\forall s \in \mathbb{R})$ et $\psi_s(n) = \psi(h_s^{-1} n h_s) (\forall n \in N)$. F étant H-invariante,

$$\langle \overline{F(h_s \cdot l)} a_0(h_s \cdot l), \psi_s \rangle = \overline{F(l)} \langle a_0(h_s \cdot l), \psi_s \rangle$$

$$= \overline{F(l)} \int_{H_0/(H_0 \cap h_s B h_s^{-1})} \overline{\psi_s(h)\chi(h)} dh = \overline{F(l)} \int_{H_0/(H_0 \cap B)} \overline{\psi(h)\chi(h)} dh$$

$$= \overline{F(l)} \langle a_0(l), \psi \rangle = \langle \overline{X} a_0(l), \psi \rangle.$$

D'autre part,

$$\langle \overline{F(h_s \cdot l)} a_0(h_s \cdot l), \psi_s \rangle = \langle \overline{X} a_0(h_s \cdot l), \psi_s \rangle$$

$$= \int_{H_0/(H_0 \cap h_s B h_s^{-1})} \overline{(L({}^tX)\psi_s)(h)\chi(h)} dh$$

$$= \int_{H_0/(H_0 \cap B)} \overline{(L({}^t(h_{-s} \cdot X))\psi)(h)\chi(h)} dh = \langle \overline{(h_{-s} \cdot X)} a_0(l), \psi \rangle.$$

D'où

$$\overline{(h_{-s} \cdot X)} a_0(l) = \overline{X} a_0(l) (\forall s \in \mathbb{R})$$

presque partout pour $l \in Q$. Ce qui veut dire par différentiation que $[Y, X] \in \mathcal{U}(\mathfrak{n})\mathfrak{a}_\tau$. Autrement dit $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$. ■

Corollaire 1. *Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, on vérifie la conjecture.*

Démonstration. En effet, il est bien connu que, si τ est à multiplicités finies, le stabilisateur de $f_{|\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$ dans $\mathfrak{g}$ est une polarisation commune pour presque toutes $l \in \Gamma_\tau$.

Corollaire 2. *Si* $\dim(\mathfrak{h}) = \frac{1}{2}(\dim(\mathfrak{g}) + \dim(\mathfrak{g}(l)) - 1$ *pour $l \in \Gamma_\tau$ génériques, la conjecture s'établit.*

Démonstration. La condition signifie que $\dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{b}(l)) - 1$ pour $l \in \Gamma_\tau$ génériques. Donc si le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{g}$ n'est pas contenu dans $\mathfrak{h}$, alors $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{z}$ est une polarisation commune pour $l \in \Gamma_\tau$ génériques. Si $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$ et si $\dim(\mathfrak{z}) \geq 2$, on peut passer au quotient $\mathfrak{g}/(\mathfrak{z} \cap \ker(f))$ auquel s'applique l'hypothèse de récurrence.

Soient $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{h}$ et $\dim(\mathfrak{z}) = 1$. Si $f(\mathfrak{z}) = \{0\}$, on descend au quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}$. Soit enfin $f(\mathfrak{z}) \neq \{0\}$. On prend un $Y \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{z}$ tel que $[Y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{z}$ et on introduit le centralisateur $\mathfrak{g}_0$ de Y dans $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, il ne reste rien à faire; il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathfrak{g}_0$.

Finalement on considère le cas où $\mathfrak{h} \not\subset \mathfrak{g}_0$. On modifie $\mathfrak{h}$ à $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathbb{R}Y$, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$, pour arriver au résultat cherché. Soient $Z \in \mathfrak{z}$, $X \in \mathfrak{h}$ tels que $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X + \mathfrak{h}_0$, $f(Z) = 1$ et tel que $[X, Y] = Z$. On fixe $l_0 \in Q$ et soit $f' \in \mathfrak{g}^*$ telle que $f'_{|\mathfrak{h}_0} = f_{|\mathfrak{h}_0}$ et que $f'(Y) = l_0(Y)$. Quitte à remplacer Y par $Y - l_0(Y)Z$, on peut supposer que $l_0(Y) = 0$.

On voit alors que $\tau' = \mathrm{ind}_{H'}^G \chi_{f'}$, où $H' = \exp(\mathfrak{h}')$, est à multiplicités finies. Etant donné un élément de $D_\tau(G/H)$, on choisit son représentatif $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$. Alors $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau')$ et la fonction $P'_W(l)$ construite à partir du couple $(f', \mathfrak{h}')$ est un polynôme H'-invariant sur $\Gamma_{\tau'}$. Combiné avec le fait que $P_W(l)$ est H-invariant, cela entraîne que $P_W(l) = P'_W(\exp(-l(Y)X) \cdot l)$ pour $l \in Q$ et par suite que $P_W(l)$ est polynomiale sur Γ_τ. On se donne maintenant $F(l) \in \mathbb{C}[\Gamma_\tau]^H$. Pour $l \in Q$, on choisit une polarisation $\mathfrak{b}(l)$ contenue dans $\mathfrak{g}_0$. Soient $H_0 = \exp(\mathfrak{h}_0)$, $G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0)$, $B(l) = \exp(\mathfrak{b}(l))$ et $\pi_0(l) = \mathrm{ind}_{B(l)}^{G_0}\chi_l (l \in Q)$. Notons Φ le sous-espace de $\mathfrak{g}_0^*$ défini par $\Phi = f_{|\mathfrak{g}_0} + (\mathfrak{h}_0)^{\perp,\mathfrak{g}_0^*}$. La surjectivité de l'application concernant le couple $(f', \mathfrak{h}')$ et la H-invariance de la fonction $F(l)$ montrent qu'il existe $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0, \tau')$ tel qu'on ait $F(l) = P'_W(\exp(-l(Y)X) \cdot l)(l \in Q)$. Mais alors la définition (3) de la distribution de Penney $a_0(l)$ concernant le couple $(H_0, \pi_0(l))$ nous donne $\overline{W}a_0(l) = \overline{F(l)}a_0(l)$ pour $l \in \Phi$ génériques, et par conséquent on peut suivre le même chemin que dans la démonstration du corollaire 1 pour montrer que $W \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}, \tau)$ et ensuite que $P_W(l) = F(l)$. ∎

Corollaire 3. *Si* $\dim(G) \leq 6$, *alors la conjecture s'établit.*

Démonstration. Supposons par exemple $\dim(G) = 6$. Soit $d = \dim(\mathfrak{h})$. Si $d = 6$, il n'y a rien à faire. Si $d = 1$, le résultat s'ensuit du théorème 1, de même pour $d = 2$ car on se ramène au cas où $\dim(\mathfrak{h} \cap \mathfrak{z}) = 1$, $\mathfrak{z}$ désignant le centre de $\mathfrak{g}$, comme on l'a remarqué au cours de la réduction. Si $d = 5$, il suffit d'appliquer à $\mathfrak{h}$ le corollaire 1. Si $d = 4$, le théorème 1 s'applique, quitte à supposer que $\tau = \mathrm{ind}_H^G \chi$ n'est pas irréductible.

Il ne nous reste qu'à examiner le cas où $d = 3$. Mais si $\dim(\mathfrak{b}(l)) = 4$ au point $l \in \Gamma_\tau$ génériques, le résultat découle du corollaire 2. Si enfin $\dim(\mathfrak{b}(l)) = 6$ ou 5 μ-presque partout, alors $\dim(G \cdot l) \leq 2$ et l'assertion s'obtient encore une fois du théorème 1. ∎

Réferences

[1] Benoist, Y., *Espaces symétriques exponentiels*, Thèse de 3e cycle, Univ. de Paris VII, (1983).

[2] Baklouti, A., *Opérateurs d'entrelacement des représentations unitaires et cortex des groupes de Lie nilpotents*, Thèse, Univ. de Metz, (1995).

[3] Baklouti, A., Ludwig J., *Invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces*, Preprint.

[4] Bourbaki, N., "Intégration," Hermann, Paris, 1–4: 1965[2], 5: 1967, 6: 1959, 7–8: 1963.

[5] Corwin, L. J., Greenleaf, F. P. and Grélaud, G., *Direct integral decompositions and multiplicities for induced representations of nilpotent Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), 549–583.

[6] Corwin, L. J. and Greenleaf, F. P., "Representations of nilpotent Lie groups and their applications, Part I," Cambridge Univ. Press, 1989.

[7] —, *Commutativity of invariant differential operators on nilpotent homogeneous spaces with finite multiplicity*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 681–748.

[8] —, *Spectral decomposition of invariant differential operators on certain nilpotent homogeneous spaces*, J. Func. Anal. **108** (1992), 374–426.

[9] Duflo, M., *Opérateurs différentiels invariants sur un espace symétrique*, C. R. Acad. Sc. Paris Série A **289** (1979), 135–137.

[10] —, "Opérateurs différentiels invariants et homologie des algèbres de Lie," l'Appendice du cours en Tunis, 1983.

[11] Duflo, M., *Open problems in representation theory of Lie groups*, edited by T. Oshima, 1-5, (1986).

[12] Grélaud, G., *Sur les représentations des groupes de Lie résolubles*, Thèse, Univ. de Poitiers (1984).

[13] Fujiwara, H., *Représentations monomiales des groupes de Lie nilpotents*, Pacific J. Math. **127** (1987), 329–351.

[14] —, *Analyse harmonique pour certaines représentations induites d'un groupe de Lie nilpotent*, préprint.

[15] Kirillov, A. A. *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Uspehi Mat. Nauk **17** (1962), 57–110.

[16] Lipsman, R., *Orbital parameters for induced and restricted representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **313** (1989), 433–473.

[17] Penney, R., *Abstract Plancherel theorems and a Frobenius reciprocity theorem*, J. Func. Anal. **18** (1975), 177–190.

[18] Torossian, C., *Opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques I, Méthodes des orbites*, J. Func. Anal. **117** (1993), 118–173.

Faculté de Technologie à Kyusyu
Université de Kinki
Iizuka 820
Japan
fujiwara@fuk.kindai.ac.jp

Received July 1, 1996
and in final form October 30, 1996