Journal of Lie Theory
Volume **8** (1998) 173–182

Extensions abéliennes des bigèbres de Lie

Miloud Benayed

Communicated by K.-H. Neeb

Abstract. In this paper we generalize the results about central extensions of Lie bialgebras obtained in [3] to the case of abelian extensions, i.e. to extensions with abelian, but not necessarily central, kernel. An explicit classification of such extensions is given, and the question of the realizability of the classifying space as a (second) cohomology group is adressed. The realizability question is answered in the affirmative in the case of one dimensional kernel, generalizing a result for central extensions given in [4]. For higher dimensional kernel the classifying space does not in general admit a group structure, it may even be empty. However, if this classifying space is not empty, then it can be described by what one may call a non abelian cohomology of Lie bialgebras.

Introduction

Le corps de base des espaces vectoriels considérés ici sera partout $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$. Nous ne considérons que les espaces vectoriels de dimension finie; ce qui permet, en particulier, d'identifier chaque espace vectoriel V avec son bidual $(V^*)^*$.

Soient M et L deux algèbres de Lie. Une algèbre de Lie $\widehat{L}$ est dite une extension de L par M s'il existe une suite exacte $0 \to M \overset{i}{\to} \widehat{L} \overset{\pi}{\to} L \to 0$, où i et π sont des morphismes d'algèbres de Lie. L'algèbre de Lie M identifiée avec $i(M) = \ker \pi$ est dite noyau de l'extension $\widehat{L}$ de L. Deux extensions $\widehat{L}_1$ et $\widehat{L}_2$ de L par M sont dites équivalentes s'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\rho : \widehat{L}_1 \to \widehat{L}_2$ induisant l'identité sur M et L dans les suites exactes définissant $\widehat{L}_1$ et $\widehat{L}_2$. L'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de L par M est noté $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$.

Les bigèbres de Lie ([1], [2], [5], [6]) sont des objets modernes, munis des structures d'algèbre de Lie et de cogèbre de Lie compatibles. Plus précisement, une bigèbre de Lie est une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ dont l'espace vectoriel dual $\mathfrak{g}^*$ est également une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}^*, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}^*})$, et ces deux crochets vérifient la compatibilité de Drinfeld suivante:

$$\begin{aligned}\langle [\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*}, [x,y]_{\mathfrak{g}} \rangle = &- \langle [\mathrm{coad}_x\, \xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, y\rangle - \langle [\xi, \mathrm{coad}_x\, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, y\rangle \\ &+ \langle [\mathrm{coad}_y\, \xi, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, x\rangle + \langle [\xi, \mathrm{coad}_y\, \eta]_{\mathfrak{g}^*}, x\rangle\end{aligned}$$

ISSN 0949–5932 / \$2.50

où $\mathrm{coad}_x\,\xi$ désigne l'action coadjointe de $x \in \mathfrak{g}$ sur $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

Le double $\mathfrak{D} = \mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$ d'une bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'espace vectoriel $\mathfrak{D} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ muni du crochet de Lie suivant: $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$,

$$[(x,\xi),(y,\eta)]_{\mathfrak{D}} = ([x,y]_{\mathfrak{g}} + \mathrm{coad}_\xi\, y - \mathrm{coad}_\eta\, x, [\xi,\eta]_{\mathfrak{g}^*} + \mathrm{coad}_x\, \eta - \mathrm{coad}_y\, \xi)$$

Bien entendu, $\mathrm{coad}_\eta\, x$ désigne l'action coadjointe de $\eta \in \mathfrak{g}^*$ sur $x \in \mathfrak{g} \cong (\mathfrak{g}^*)^*$ et $\mathrm{coad}_x\, \eta$ est l'action coadjointe de $x \in \mathfrak{g}$ sur $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Il est à noter que l'identité de Jacobi pour ce crochet de Lie est équivalente à la compatibilité de Drinfeld des crochets $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}}$ et $[\ ,\ ]_{\mathfrak{g}^*}$.

Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux bigèbres de Lie. Une application linéaire $u : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ est dite un morphisme de bigèbres de Lie si $u : (\mathfrak{g}_1, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}_1}) \to (\mathfrak{g}_2, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}_2})$ est un morphisme d'algèbres de Lie, et sa transposée $u^* : (\mathfrak{g}_2^*, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}_2^*}) \to (\mathfrak{g}_1^*, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}_1^*})$ est aussi un morphisme d'algèbres de Lie. Un isomorphisme de bigèbres de Lie est un morphisme bijectif.

Soient A et $\mathfrak{g}$ deux bigèbres de Lie. Une bigèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ est dite une extension (de noyau A) de $\mathfrak{g}$ par A s'il existe une suite exacte $0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$, où i et π sont des morphismes de bigèbres de Lie. On définit une notion d'équivalence entre les extensions de bigèbres de Lie d'une manière analogue aux algèbres de Lie, et on note $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de bigèbres de Lie extensions de $\mathfrak{g}$ par A.

La notion d'extension de bigèbres de Lie peut être formulée de la manière équivalente suivante. Une bigèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ est une extension de $\mathfrak{g}$ par A s'il existe une suite exacte $0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ faisant de l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ une extension de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par l'algèbre de Lie A, telle que la suite duale $0 \to \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\pi^*} \widehat{\mathfrak{g}}^* \xrightarrow{i^*} A^* \to 0$ rend l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ une extension de l'algèbre de Lie A^* par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$.

Désormais, nous supposons que A est une bigèbre de Lie abélienne pour sa structure d'algèbre de Lie; A^* étant munie d'une structure quelconque d'algèbre de Lie. Dans ce cas, une extension de $\mathfrak{g}$ par A est dite abélienne en référence à la structure abélienne d'algèbre de Lie de son noyau A; cette terminologie ne sous-entend en aucun cas la structure abélienne de $\widehat{\mathfrak{g}}$. Le but de ce travail est de décrire explicitement l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ et d'étudier s'il peut être décrit, d'une manière analogue au cas des extensions abéliennes des algèbres de Lie, par le second groupe d'une cohomologie de la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans A.

L'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ duale d'une bigèbre de Lie extension abélienne $\widehat{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ par A est une extension (de noyau $\mathfrak{g}^*$) non abélienne de l'algèbre de Lie A^* par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$. Si la dimension de A est supérieure à un, une cohomologie non abélienne de A^* à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$ apparaît dans la description de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$. Dans le premier paragraphe, nous faisons un survol de cette cohomologie non abélienne des algèbres de Lie en liaison avec leurs extensions non abéliennes. Dans le second paragraphe, nous décrivons explicitement l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ et mettons en évidence l'apparition de la cohomologie non abélienne de A^* à valeurs dans $\mathfrak{g}^*$ décrite dans le paragraphe précédent. L'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ n'est un groupe en général si A est pluridimensionnel; il se peut même qu'il soit vide. Dans le cas où il est non vide, cet ensemble est plutôt décrit par ce que l'on pourrait appeller une cohomologie non abélienne des bigèbres de Lie. Le dernier paragraphe sera consacré au cas particulier des extensions de noyau unidimensionnel $A = \mathbb{R}$. Pour ces extensions, ces phénomènes de cohomologie non abélienne disparaissent et $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ est un groupe abélien dans ce cas. Nous introduisons une cohomologie des bigèbres de Lie à valeurs dans une catégorie de modules, généralisant la cohomologie triviale introduite dans ([4]). Nous prouvons que si $\mathbb{R}$ est un module sur $\mathfrak{g}$, alors les extensions abéliennes de $\mathfrak{g}$ par $\mathbb{R}$ sont décrites par le second groupe de cette cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le module $\mathbb{R}$. Ce résulat généralise celui de ([3]) établi pour les extensions centrales par $\mathbb{R}$.

1. Cohomologie non abélienne des algèbres de Lie

Dans ce paragraphe, nous adaptons les techniques de ([7]) sur la cohomologie non abélienne des anneaux de Lie au cas particulier des algèbres de Lie. Nous omettons ainsi les preuves des résultats énoncés et nous ne donnons que les constructions nécessaires pour les obtenir. Soient M et L deux algèbres de Lie quelconques. On note $\mathrm{Der}(M)$ l'algèbre de Lie des dérivations de M, $\mathrm{Din}(M)$ l'idéal de $\mathrm{Der}(M)$ formé des dérivations intérieures de M, et $\mathrm{Dex}(M) = \mathrm{Der}(M)/\mathrm{Din}(M)$ l'algèbre de Lie des dérivations extérieures de M.

La donnée d'une extension $0 \to M \xrightarrow{i} \widehat{L} \xrightarrow{\pi} L \to 0$ de L par M induit un morphisme d'algèbres de Lie $\sigma : \widehat{L} \to \mathrm{Der}(M)$ défini par: $\sigma(x)(m) = [x, m]$; il est à noter que M est un idéal dans $\widehat{L}$. Par passage aux quotients $\widehat{L}/M \cong L$ et $\mathrm{Dex}(M)$, σ donne un morphisme d'algèbres de Lie $\psi : L \to \mathrm{Dex}(M)$. Réciproquement, on cherche à décrire explicitement l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$ des classes d'équivalence d'extensions de L par M pour un morphisme d'algèbres de Lie $\psi : L \to \mathrm{Dex}(M)$ fixé. Si M est abélienne, ψ munit M d'une structure de L-module et $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$ est l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de L par M pour la structure fixée de L-module ψ sur M.

Soit $0 \to M \xrightarrow{i} \widehat{L} \xrightarrow{\pi} L \to 0$ une extension de L par M. Une section de π est une application linéaire $s : L \to \widehat{L}$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_L$. Par le choix d'une section s de π, on obtient un relèvement $F = \sigma \circ s : L \to \mathrm{Der}(M)$ de $\psi : L \to \mathrm{Dex}(M)$ à $\mathrm{Der}(M)$. Il est clair que $F \in \mathrm{Hom}(L, \mathrm{Der}(M))$ est une application linéaire de L dans $\mathrm{Der}(M)$. Dans l'identification $(x, m) \equiv s(x) + i(m)$ des espaces vectoriels $L \times M$ et $\widehat{L}$ à l'aide de la section s, le crochet sur $L \times M$ est donné par: $\forall x, y \in L; \forall m, m' \in M$

$$[(x, m), (y, m')] = ([x, y], F(x)(m') - F(y)(m) + \gamma(x, y) + [m, m']) \tag{1.1}$$

où $\gamma : L \times L \to M$, $\gamma(x, y) = [s(x), s(y)] - s([x, y])$, est le défaut de morphisme d'algèbres de Lie de $s : L \to \widehat{L}$. L'application $\gamma \in \wedge^2 L^* \otimes M$ est une (2-cochaîne) application bilinéaire antisymétrique de $L \times L$ dans M. L'identité de Jacobi de ce crochet entraîne les deux conditions suivantes: $\forall x, y, z \in L$,

(1.2) $[F(x), F(y)] = F([x, y]) + \mathrm{ad}_M(\gamma(x, y))$

(1.3) $\sum_{p.c} F(x)(\gamma(y,z)) - \gamma([x,y],z) = 0$; où $\sum_{p.c}$ désigne la somme sur les permutations circulaires de x, y et z.

Ainsi, à toute extension $\widehat{L}$ de L par M, on associe un couple $(F,\gamma) \in \mathrm{Hom}(L, \mathrm{Der}(M)) \times (\wedge^2 L^* \otimes M)$ vérifiant les conditions (1.2) et (1.3). Réciproquement, la donnée d'un tel couple (F,γ) détermine une extension $\widehat{L} = L \times M$ de L par M dont le crochet de Lie est défini par la formule (1.1).

Un changement de la section choisie s en une autre section $s' = s + i \circ \varphi$, où $\varphi \in \mathrm{Hom}(L, M)$, est une application linéaire de L dans M, transforme le couple (F,γ) ci-dessus en (F',γ') donné par: $\forall x, y \in L$,

(1.4) $F'(x) = F(x) + \mathrm{ad}_M(\varphi(x))$

(1.5) $\gamma'(x,y) = \gamma(x,y) + F(x)(\varphi(y)) - F(y)(\varphi(x)) + [\varphi(x), \varphi(y)] - \varphi([x,y])$.

On vérifie que l'application: $(L \times M, s) \to (L \times M, s')$; $(x,m) \mapsto (x, m+\varphi(x))$, entre les trivialisations de $\widehat{L}$ définies par s et s' respectivement est une équivalence d'extensions d'algèbres de Lie. Un isomorphisme ρ définissant une équivalence de deux extensions $\widehat{L}_1$ et $\widehat{L}_2$ de L par M trivialisées par $(L \times M, F, \gamma)$ et $(L \times M, F', \gamma')$ respectivement, est toujours de la forme précédente. On en déduit que $\widehat{L}_1$ et $\widehat{L}_2$ sont équivalentes si et seulement si il existe un élément φ de $\mathrm{Hom}(L, M)$ reliant les couples (F,γ) et (F',γ') par les formules (1.4) et (1.5). D'une manière équivalente, on définit une relation d'équivalence sur l'espace $\mathrm{Hom}(L, \mathrm{Der}(M)) \times (\wedge^2 L^* \otimes M)$ comme suit.

$$(F,\gamma) \sim (F',\gamma') \Longleftrightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Hom}(L,M) \text{ tel que l'on ait (1.4) et (1.5).}$$

On note $((F,\gamma))$ la classe d'équivalence d'un élément (F,γ), et $\mathcal{A}(L,M)$ désigne l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. Nous avons donc établi le résultat suivant.

Théorème 1.6. *Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble* $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L,M)$ *et l'ensemble* $\mathcal{A}(L,M)$ *donnée par:* $[\widehat{L}] \mapsto ((F,\gamma))$*; où* $((F,\gamma))$ *est l'élément de* $\mathcal{A}(L,M)$ *définissant le crochet de Lie (1.1) sur la classe* $[\widehat{L}]$ *de* $\widehat{L}$ *dans* $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L,M)$.

Remarque 1.7. Si $L = \mathbb{R}$, alors il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{A}(\mathbb{R}, M) = \mathrm{Dex}(M)$, et est donc un groupe abélien.

Si M et une algèbre de Lie abélienne, $\psi : L \to \mathrm{Dex}(M) = \mathrm{End}(M)$ est une structure de L-module sur M, et $\mathcal{A}(L,M)$ a une structure de groupe abélien. Plus précisement, on a.

Corollaire 1.8. *Si* M *est une algèbre de Lie abélienne, alors* $\mathcal{A}(L,M)$ *est le second groupe de cohomologie* $\mathrm{H}^2_{\mathrm{alg}}(L,M)$ *de* L *à valeurs dans* M *muni de sa structure de* L*-module donnée par* ψ.

Plaçons nous pour le reste de ce paragraphe dans le cas où M est une algèbre de Lie non abélienne. Dans ce cas, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L,M)$ est décrit par une cohomologie non abélienne $\mathcal{A}(L,M)$. La restriction de ψ au centre $\mathcal{Z}(M)$ de M, $\psi : L \to \mathrm{Dex}(\mathcal{Z}(M)) = \mathrm{End}(\mathcal{Z}(M))$, fait de $\mathcal{Z}(M)$ un L-module. On note $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{alg}}(L, \mathcal{Z}(M))$ le k-ième groupe de cohomologie usuel de l'algèbre de Lie

L à valeurs dans le L-module $\mathcal{Z}(M)$ défini par ψ. En général, il n'y a aucune garantie que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$ soit non vide . Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$ soit non vide.

Lemme 1.9. *Soit s une section de π. Pour tout relèvement $F = \sigma \circ s : L \to \mathrm{Der}(M)$ de $\psi : L \to \mathrm{Dex}(M)$, et tout $\gamma \in (\wedge^2 L^* \otimes M)$ défini par s; $\gamma(x, y) = [s(x), s(y)] - s([x, y])$, la 3-cochaîne $k : L \times L \times L \to \mathcal{Z}(M)$ définie par $k(x, y, z) = \sum_{p.c} \gamma([x, y], z) - F(x)(\gamma(x, y))$ est un 3-cocycle pour la cohomologie de L à valeurs dans L-module $\mathcal{Z}(M)$. Un changement de la section s ne modifie pas la classe de cohomolgie $[k]$ de k dans $\mathrm{H}^3_{\mathrm{alg}}(L, \mathcal{Z}(M))$.*

Comme conséquence de cette proposition et du théorème 1.6, nous avons le résulat suivant.

Théorème 1.10. $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$ *est non vide si et seulement si la classe de cohomologie $[k]$ de k est nulle dans $\mathrm{H}^3_{\mathrm{alg}}(L, \mathcal{Z}(M))$.*

Le résultat suivant donne la structure de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$ dans le cas où il est non vide.

Proposition 1.11. Si $\mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(L, M)$ est non vide, alors c'est un espace homogène principal pour le groupe $\mathrm{H}^2_{\mathrm{alg}}(L, \mathcal{Z}(M))$ pour l'action suivante: $[[\theta]] \cdot ((F, \gamma)) = ((F, \theta + \gamma))$.

2. Description explicite de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{g}$ désigne une bigèbre de Lie quelconque et A une bigèbre de Lie abélienne pour sa structure d'algèbre de Lie. Le but de ce paragraphe est de décrire explicitement l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$.

Soit $0 \to A \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \to 0$ une extension de $\mathfrak{g}$ par A. Ainsi, A hérite une structure de $\mathfrak{g}$-module comme suit. Si $s : \mathfrak{g} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ est une section de π, alors l'action de $\mathfrak{g}$ sur A est donnée par: $[s(x), i(a)] = i(x \cdot a)$; $x \in \mathfrak{g}$ et $a \in A$. Puisque A est une algèbre de Lie abélienne, cette action est indépendante de la section choisie. Comme $0 \to \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\pi^*} \widehat{\mathfrak{g}}^* \xrightarrow{i^*} A^* \to 0$ est une extension non abélienne (en général) de l'algèbre de Lie A^* par l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$, alors elle induit un morphisme d'algèbres de Lie $\psi : A^* \to \mathrm{Dex}(\mathfrak{g}^*)$ (cf paragraphe 1). Réciproquement, étant donné une structure de $\mathfrak{g}$-module sur A et un tel morphisme ψ, on cherche à étudier l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ des classes d'équivalences d'extensions de $\mathfrak{g}$ par A induisant cette structure donnée de $\mathfrak{g}$-module sur A et ce morphisme $\psi : A^* \to \mathrm{Dex}(\mathfrak{g}^*)$ fixé.

Fixons maintenant une section s de π. A l'aide de cette section, on identifie les espaces vectoriels $\widehat{\mathfrak{g}}$ et $\mathfrak{g} \times A$. Le défaut de morphisme d'algèbres de Lie de s détermine un 2-cocycle $\gamma \in \mathcal{Z}^2_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}, M)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le $\mathfrak{g}$-module A: $\gamma(x, y) = [s(x), s(y)] - s([x, y])$, tel que le crochet de Lie sur $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times A$ soit donné par: $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $\forall a, b \in A$,

$$[(x, a), (y, b)] = ([x, y], x \cdot b - y \cdot a + \gamma(x, y)) \tag{2.1}$$

Comme i et π sont des morphismes de bigèbres de Lie, le crochet sur l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ identifiée avec $\mathfrak{g}^* \times A^*$ est nécessairement de la forme suivante: $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{g}^*$, $\forall \alpha, \beta \in A^*$,

$$[(\xi,\alpha),(\eta,\beta)] = ([\xi,\eta] + F(\alpha)(\eta) - F(\beta)(\xi) + \Omega(\alpha,\beta), [\alpha,\beta]) \tag{2.2}$$

où $F \in \mathrm{Hom}(A^*, \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*))$ est une application linéaire de A^* dans $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*)$, et $\Omega \in (\wedge^2 A \otimes \mathfrak{g}^*)$ est une (2-cochaîne) application bilinéaire antisymétrique de $A^* \times A^*$ dans $\mathfrak{g}^*$. En fait, F est un relèvement de $\psi : A^* \to \mathrm{Dex}(\mathfrak{g}^*)$ à $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*)$. L'identité de Jacobi de ce crochet de Lie entraîne que F vérifie les deux propriétés suivantes: $\forall \alpha, \beta, \theta \in A^*$,

(2.3) $[F(\alpha), F(\beta)] = F([\alpha,\beta]) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^*}(\Omega(\alpha,\beta))$.

(2.4) $\sum_{p.c} F(\alpha)(\Omega(\beta,\theta)) - \Omega([\alpha,\beta],\theta) = 0$; où $\sum_{p.c}$ désigne la somme sur les permutations circulaires de α, β, θ dans A^*.

Le lecteur pourra commencer à comparer ces deux premières propriétés du couple (F, Ω) associé à l'extension non abélienne $0 \to \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\pi^*} \widehat{\mathfrak{g}}^* \xrightarrow{i^*} A^* \to 0$, et les formules (1.2) et (1.3).

La compatibilité de Drinfeld des crochets de $\widehat{\mathfrak{g}}$ et $\widehat{\mathfrak{g}}^*$ implique les deux conditions suivantes: $\forall \alpha, \beta \in A^*$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$, $\forall a \in A$,

$$\begin{aligned} F(\alpha)^*([x,y]) =& [F(\alpha)^*(x), y] + [x, F(\alpha)^*(y)] + \mathrm{coad}(\alpha \circ \widetilde{\gamma}(y))x \\ & - \mathrm{coad}(\alpha \circ \widetilde{\gamma}(x))y + F(\alpha \circ (x\cdot))^*(y) - F(\alpha \circ (y\cdot))^*(x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} \langle [\alpha,\beta], x \cdot a \rangle =& \langle [\alpha \circ (x\cdot), \beta], a \rangle + \langle [\alpha, \beta \circ (x\cdot)], a \rangle \\ & + \langle F(\alpha)(\beta \circ (\cdot a)), x \rangle - \langle F(\beta)(\alpha \circ (\cdot a)), x \rangle \end{aligned} \tag{2.5'}$$

Ici, $(x\cdot) : A \to A$ et $(\cdot a) : \mathfrak{g} \to A$ sont les applications linéaires induites par l'action $\cdot : \mathfrak{g} \times A \to A$ de $\mathfrak{g}$ sur A.

$$\begin{aligned} & \langle \Omega(\alpha,\beta), [x,y] \rangle + \langle \gamma(x,y), [\alpha,\beta] \rangle \\ =& \langle F(\alpha)(\beta \circ \widetilde{\gamma}(x)) - F(\beta)(\alpha \circ \widetilde{\gamma}(x)) + \Omega(\alpha, \beta \circ (x\cdot)) - \Omega(\beta, \alpha \circ (x\cdot), y \rangle \\ & - \langle F(\alpha)(\beta \circ \widetilde{\gamma}(y)) - F(\beta)(\alpha \circ \widetilde{\gamma}(y)) + \Omega(\alpha, \beta \circ (y\cdot)) - \Omega(\beta, \alpha \circ (y\cdot), x \rangle \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $\widetilde{\gamma} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, A)$ est définie par: $\langle \widetilde{\gamma}(x), y \rangle = \gamma(x,y)$.

Ainsi, à toute extension $\widehat{\mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ par A, on associe un 2-cocycle γ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le $\mathfrak{g}$-module A, une application linéaire $F \in \mathrm{Hom}(A^*, \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*))$, et une application bilinéaire antisymétrique $\Omega \in (\wedge^2 A \otimes \mathfrak{g}^*)$ satisfaisant les propriétés (2.3), (2.4), (2.5), (2.5)' et (2.6). Réciproquement, de telles données déterminent une extension $\mathfrak{g} \times A$ de $\mathfrak{g}$ par A définie par les formules (2.1) et (2.2).

Un changement de la section choisie s en une autre section $s' = s + i \circ \varphi$, avec $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, A)$, transforme le triplet (γ, F, Ω) en (γ', F', Ω') suivant.

(2.7) $\gamma' = \gamma + \delta\varphi$; $\delta\varphi$ étant le cobord de la 1-cochaîne φ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le $\mathfrak{g}$-module A.

(2.8) $F'(\alpha) = F(\alpha) + \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^*}(\varphi^*\alpha))$; $\alpha \in A^*$.
(2.9) $\Omega'(\alpha,\beta) = \Omega(\alpha,\beta) + F(\alpha)(\varphi^*\beta) - F(\beta)(\varphi^*\alpha) + [\varphi^*\alpha, \varphi^*\beta]_{\mathfrak{g}^*}$; $\alpha, \beta \in A^*$.
On laisse le soin au lecteur de faire une analogie entre les propriétés (2.8) et (2.9) écrites pour $\varphi^* \in \mathrm{Hom}(A^*, \mathfrak{g}^*)$ et les formules (1.4) et (1.5).

On vérifie que l'application $(\mathfrak{g} \times A, s) \to (\mathfrak{g} \times A, s'), (x,a) \mapsto (x, a + \varphi(x))$ entre les trivialisations de $\widehat{\mathfrak{g}}$ définies par s et s' respectivement est une équivalence d'extensions. Un isomorphisme ρ définissant une équivalence de deux extensions $\widehat{\mathfrak{g}}_1$ et $\widehat{\mathfrak{g}}_2$ de $\mathfrak{g}$ par A trivialisées par $(\mathfrak{g}\times A, \gamma, F, \Omega)$ et $(\mathfrak{g}\times A, \gamma', F', \Omega')$ respectivement, est toujours de la forme précédente. On en déduit que $\widehat{\mathfrak{g}}_1$ et $\widehat{\mathfrak{g}}_2$ sont équivalentes si et seulement si il existe $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, A)$ telle que les conditions (2.7), (2.8) et (2.9) soient vérifiées. En d'autres termes, on a une relation d'équivalence sur l'espace $\mathcal{Z}^2_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}, A) \times \mathrm{Hom}(A^*, \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*)) \times (\wedge^2 A \otimes \mathfrak{g}^*)$ comme suit.

$$(\gamma, F, \Omega) \sim (\gamma', F', \Omega') \Longleftrightarrow \exists \varphi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, A) \text{ tel que l'on ait (2.7), (2.8) et (2.9).}$$

On note $((\gamma, F, \Omega))$ la classe d'équivalence d'un élément (γ, F, Ω), et $\mathcal{B}(\mathfrak{g}, A)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. Nous avons donc établi le résultat suivant.

Théorème 2.10. *Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble* $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ *et l'ensemble* $\mathcal{B}(\mathfrak{g}, A)$ *donnée par:* $[\widehat{\mathfrak{g}}] \mapsto ((\gamma, F, \Omega))$; *où* $((\gamma, F, \Omega))$ *est l'élément de* $\mathcal{B}(\mathfrak{g}, A)$ *définissant la structure de bigèbre de Lie sur la classe* $[\widehat{\mathfrak{g}}]$ *de* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *dans* $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ *par les formules* (2.1) *et* (2.2).

Supposons pour le reste de ce paragraphe que A est pluridimensionnel, i.e $\dim A > 1$. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{B}(\mathfrak{g}, A) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ n'est pas un groupe en général. Ceci est dû à l'apparition des classes $((F, \Omega)) \in \mathcal{A}(A^*, \mathfrak{g}^*) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{alg}}(A^*, \mathfrak{g}^*)$ de la 2-cohomologie non abélienne de l'algèbre de Lie A^* à valeurs dans l'algèbre de Lie (non abélienne en général) $\mathfrak{g}^*$. Ainsi, la question de réaliser l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ comme le second groupe d'une cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans A devient superflue puisque cet ensemble n'est même pas un groupe en général. D'ailleurs, il se peut que $\mathcal{B}(\mathfrak{g}, A)$ soit vide; c'est le cas par exemple si $\mathcal{A}(A^*, \mathfrak{g}^*)$ est vide. Dans le cas où $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ est non vide, il est plutôt décrit (dans le théorème ci-dessus) par ce que l'on pourrait appeller une cohomologie non abélienne des bigèbres de Lie.

Dans ([8]), les auteurs ont introduit la notion de module sur une bigèbre de Lie comme suit. A est dit un module sur $\mathfrak{g}$ si A est un $\mathfrak{g}$-module (au sens usuel) et A^* est aussi un $\mathfrak{g}^*$-module, tel que $A \oplus A^*$ soit naturellement un $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$-module. Ces auteurs ont appellé cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans un tel module A la cohomologie du complexe noyau de la projection naturelle $\wedge\mathfrak{D} \otimes (A \oplus A^*) \to (\wedge\mathfrak{g} \otimes A^*) \oplus (\wedge\mathfrak{g}^* \otimes A)$. Pour cette catégorie de modules A, les auteurs montrent que l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, A)$ est le second groupe de cette cohomologie; leur description fait appel aux foncteurs dérivés et est complètement différente de la nôtre. D'ailleurs, une telle structure de module A sur $\mathfrak{g}$ n'est pas attachée naturellement à la donnée d'une extension $0 \to A \to \widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g} \to 0$ de $\mathfrak{g}$ par A; cette dernière munit tout simplement A d'une structure de $\mathfrak{g}$-module et induit un morphisme $\psi : A^* \to \mathrm{Dex}(\mathfrak{g}^*)$ (cf début de ce paragraphe).

Dans le paragraphe suivant, nous introduisons une catégorie de modules sur une bigèbre de Lie, contenant celle de ([8]) mais qui lui est différente en général, et nous définissons une (autre) cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans cette catégorie de modules. Cette construction est bien adaptée aux extensions de noyau unidimensionnel $A = \mathbb{R}$. Plus précisement, nous prouvons que si $\mathbb{R}$ est un module sur $\mathfrak{g}$ alors $\mathcal{B}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ est le second groupe de cette cohomologie. Par contre, la cohomologie définie dans ([8]) ne classifie pas ces extensions.

3. Extensions de noyau unidimensionnel

Dans ce paragraphe, nous particularisons l'étude faite dans le paragraphe précédent au cas $A = \mathbb{R}$; à savoir la description explicite de l'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$. Le cas $A = \mathbb{C}$ pour les bigèbres de Lie complexes est analogue. L'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ admet une structure naturelle de groupe abélien. Modulo une condition supplémentaire sur la structure initiale de $\mathfrak{g}$-module sur $\mathbb{R}$, nous prouvons que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ est le second groupe d'une cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans le cas particulier où $\mathbb{R}$ est un $\mathfrak{g}$-module trivial, cette condition est trivialement vérifiée, et nous retrouvons les résultats de ([3]) et de ([4]) pour les extensions centrales des bigèbres de Lie par $\mathbb{R}$.

Nous gardons les notations du paragraphe précédent pour $A = \mathbb{R}$ que nous identifions avec son dual $\mathbb{R}^*$, et nous adaptons les étapes faites pour établir le théorème 2.10 à ce cas particulier. Tout d'abord, un morphisme $F \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*)$ est complètement déterminé par la donnée de $F(1) = f \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*)$. Ensuite, comme $\mathbb{R}$ est à une dimension alors toute 2-cochaîne $\Omega \in \wedge^2\mathbb{R} \otimes \mathfrak{g}^*$ est nulle. Il est aisé de voir que les conditions (2.3), (2.4), (2.6), et (2.9) sont vides, i.e: elles sont trivialement vérifiées. La condition (2.5) s'écrit: $\forall x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} f^*([x,y]) - [f^*(x), y] - [x, f^*(y)] \\ = \mathrm{coad}(\tilde{\gamma}(y))x - \mathrm{coad}(\tilde{\gamma}(x))y + (x \cdot 1) \times f^*(y) - (y \cdot 1) \times f^*(x). \end{aligned}$$

Ici, $x \cdot 1$ désigne le nombre réel obtenu en faisant agir $x \in \mathfrak{g}$ sur $1 \in \mathbb{R}$. Cette propriété exprime que le défaut de dérivation de la transposée de f, $f^* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, est contrôlé par le 2-cocycle $\gamma \in \mathcal{Z}^2_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$, pour la structure fixée de $\mathfrak{g}$-module sur $\mathbb{R}$. Cette condition est équivalente à la compatibilité de Drinfeld des crochets de Lie sur l'extension donnée $\widehat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ définis par γ et f (cf paragraphe précédent). Pour cette raison, nous disons que γ et f sont Drinfeld-compatibles si cette propriété est satisfaite. Dans le cas des extensions centrales où l'action de $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$ est triviale, nous retrouvons la terminologie utilisée dans ([3]). Finalement, si φ est un élément de $\mathfrak{g}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ alors $\varphi^*(1) = \varphi$; il s'ensuit que la propriété (2.8) devient $f' = f + \mathrm{ad}_\varphi$ avec $f' = F'(1)$. Nous obtenons ainsi le résultat suivant.

Théorème 3.1. *L'ensemble $\mathcal{B}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ est le quotient de l'ensemble $\{(\gamma, f) \in \mathcal{Z}^2_{\mathrm{alg}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \times \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*) \mid \gamma$ et f soient Drinfeld-compatibles $\}$ par $\{(\delta\varphi, \mathrm{ad}\,\varphi) \mid \varphi \in \mathfrak{g}^*\}$.*

Remarque 3.2. L'ensemble $\mathcal{B}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ est un groupe abélien pour l'addition naturelle donnée par: $((\gamma, f)) + ((\gamma', f')) = ((\gamma+\gamma', f+f'))$.

Dans tout ce qui suit, la notion de $\mathfrak{g}$-module est utilisée au sens usuel, i.e: module sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, alors que nous réservons la terminologie de module sur $\mathfrak{g}$ pour désigner un module sur la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$; cette notion sera précisée plus-bas. Nous allons prouver que si $\mathbb{R}$ est un module sur $\mathfrak{g}$ alors $\mathcal{B}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ est le second groupe d'une cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le module $\mathbb{R}$ (sur $\mathfrak{g}$). Nous commençons par définir cette cohomologie dans un cadre plus général; pour cela il nous faut définir la notion de module sur une bigèbre de Lie: une définition adaptée à nos besoins.

Définition 3.3. Un espace vectoriel V est dit un module sur $\mathfrak{g}$ s'il est muni de structures de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}^*$-modules telles que V soit naturellement un $\mathfrak{D} = \mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{g}^*$-module.

Remarque 3.4. La catégorie de modules sur $\mathfrak{g}$ au sens de ([8]) est contenue dans notre catégorie de modules, mais qui est différente en général.

Il est à noter que si V est un $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ module, alors V n'est pas nécessairement un $\mathfrak{D}$-module. On vérifie que V est naturellement un $\mathfrak{D}$-module si ces actions de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}^*$ sur V commutent avec les actions coadjointes de $\mathfrak{g}^*$ sur $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$ respectivement.

Soit V un module sur $\mathfrak{g}$; c'est en particulier un $\mathfrak{g}^*$ et un $\mathfrak{D}$-module. On note $\wedge\mathfrak{g} \otimes V$ le complexe différentiel des cochaînes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$ à valeurs dans le $\mathfrak{g}^*$-module V, et on adapte la même notation pour $\wedge\mathfrak{D} \otimes V$; où l'on identifie $\mathfrak{D}^*$ avec $\mathfrak{D}$. Considérons la projection naturelle $\wedge\mathfrak{D} \otimes V \to \wedge\mathfrak{g}\otimes V$. On vérifie facilement que cette projection est un morphisme de complexes différentiels, c'est à dire qu'elle échange les différentielles de ces complexes, notées $\widetilde{\delta}$ et Δ respectivement. Donc, le noyau $\mathrm{N}(\mathfrak{g}, V) = \ker(\wedge\mathfrak{D}\otimes V \to \wedge\mathfrak{g}\otimes V)$ de cette projection est un sous complexe différentiel de $\wedge\mathfrak{g} \otimes V$. Pour tout entier naturel k, notons $\mathrm{N}_k = \ker(\pi_k : \wedge^k\mathfrak{D}\otimes V \to \wedge^k\mathfrak{g}\otimes V)$, $\mathcal{Z}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, V) = \ker(\widetilde{\delta}_k : \mathrm{N}_k \to \mathrm{N}_{k+1})$ l'ensemble des k-cocycles, et $\mathrm{B}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, V) = \widetilde{\delta}_{k-1}(\mathrm{N}_{k-1})$ l'ensemble des k-cobords, pour ce complexe différentiel $\mathrm{N}(\mathfrak{g}, V)$.

Définition 3.5. Nous appellons cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le module V la cohomologie du complexe noyau $\mathrm{N}(\mathfrak{g}, V)$ de la projection naturelle $\wedge\mathfrak{D} \otimes V \to \wedge\mathfrak{g} \otimes V$. On note $\mathrm{H}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, V) = \mathcal{Z}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, V)/\,\mathrm{B}^{\mathrm{k}}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g}, V)$ le k-ième espace de cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans le module V.

Dans la suite, nous traitons le cas d'un module à une dimension $V = \mathbb{R}$. Fixons une structure de $\mathfrak{g}$-module sur $\mathbb{R}$, et considérons $\mathbb{R}$ comme un $\mathfrak{g}^*$-module trivial. Il est facile de vérifier que $\mathbb{R}$ est un module sur la bigèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (i.e: soit naturellement un $\mathfrak{D}$-module) si et seulement si $\mathrm{coad}_{\mathfrak{g}^*}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ agit trivialement sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.6. *Si* $\mathbb{R}$ *est un module sur* $\mathfrak{g}$, *alors* $\mathrm{Ext}_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g},\mathbb{R}) \cong \mathcal{B}(\mathfrak{g},\mathbb{R}) = \mathrm{H}^2_{\mathrm{big}}(\mathfrak{g},\mathbb{R})$.

Pour prouver ce résultat, on établit le lemme suivant.

Lemme 3.7. (i) $\mathcal{Z}^2_{\text{big}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$
$\cong \{(\gamma, f) \in \mathcal{Z}^2_{\text{alg}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \times \mathrm{Der}(\mathfrak{g}^*) \mid \gamma$ *et* f *soient Drinfeld-compatibles* $\}$.
(ii) $\mathrm{B}^2_{\text{big}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) \cong \{(\delta\varphi, \mathrm{ad}_\varphi) \mid \varphi \in \mathfrak{g}^*\}$.

Preuve. La démarche est similaire à celle du lemme 2.2 de ([4]) dans le cas des extensions centrales. ■

Signalons finalement que si $\mathbb{R}$ est un $\mathfrak{g}$-module trivial, alors $\mathbb{R}$, considéré aussi comme un $\mathfrak{g}^*$-module trivial, est bien un module (trivial) sur $\mathfrak{g}$: c'est le cas des extensions centrales des bigèbres de Lie par $\mathbb{R}$. Le théorème ci-dessus généralise le résultat de ([4]) établi dans le cas particulier où $\mathbb{R}$ est un module trivial sur $\mathfrak{g}$.

Remerciements. L'auteur remercie vivement toutes les personnes avec qui il a pu discuter lors de l'élaboration de ce travail; plus particulièrement S. Shnider.

References

[1] Aminou, R., "Groupes de Lie-Poisson et bigèbres de Lie," Thèse d'Université. Lille, 1988.

[2] Aminou, R., et Y. Kosmann-Schwarzbach, *Bigèbres de Lie, doubles et carrés*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Série A **49 (4)** (1988), 461–478.

[3] Benayed, M., *Central extensions of Lie bialgebras and Poisson Lie groups*, Journal of Geometry and Physics **16** (1995), 301–304.

[4] Benayed, M., *Lie bialgebras real Cohomology*, Journal of Lie Theory **7** (1997), 287–292.

[5] Drinfel'd, V. G., *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras and the geometric meaning of the classical Yang Baxter equation*, Soviet Math. Dokl **27 (1)** (1983), 68–71.

[6] Drinfeld, V. G., *Quantum groups*, Proceeding of the International Congress of Mathematicians (1986), Berkeley, 798–820.

[7] Leborgne, D., "Cohomologie non abélienne des anneaux de Lie," Thèse d'Université. Rennes, 1968.

[8] Lecomte, P. B. A., et C. Roger, *Modules et cohomologies des bigèbres de Lie* (et Note rectificative), C.R. Acad. Sci. Paris Série I **310** et **310** (1990), 405–410, et 893–894.

Miloud Benayed
Université des Sciences de Lille I
UFR de Mathématiques Pures
URA 751 associée au CNRS
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
FRANCE
E-mail: benayed@gat.univ-lille1.fr

Received May 30, 1997
and in final form October 28, 1997