Journal of Lie Theory
Volume **9** (1999) 69–112

Foncteurs de Zuckerman pour les superalgèbres de Lie

José Carlos de Sousa Oliveira Santos*

Communicated by J. Faraut

Abstract. Let $\mathfrak{g}$ be a basic classical Lie superalgebra. The aim of this article is the study of certain $\mathfrak{g}$-modules obtained by a method called homological induction. It is proved that the finite-dimensional typical modules can be obtained in this way and the Weyl-Kac character formula is deduced. It is also proved that the vector space spanned by the polynomial functions defined on a Cartan subalgebra $\mathfrak{h}$ of $\mathfrak{g}$ by $H \mapsto \mathrm{str}(\rho(H^m))$, where $m \in \mathbb{N}$ and ρ is a finite-dimensional representation of $\mathfrak{g}$, contains all polynomials functions invariant under the Weyl group which are multiples of every isotropic root.

Table des matières

* L'auteur a été boursier de la *Junta de Investigação Científica e Tecnológica* et de la *Fundação Calouste Gulbenkian* et il a participé au projet Praxis/2/2.1/MAT/63/94.

ISSN 0949–5932 / \$2.50

Introduction

Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie complexe contragrédiente de dimension finie telle que $\mathfrak{g}'$ (la superalgèbre dérivée) soit une extension centrale d'une superalgèbre de Lie basique classique et soit G_0 un groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie soit isomorphe à $\mathfrak{g}_0$. On note $R(G_0)$ l'algèbre des coefficients matriciels des représentations semi-simples de dimension finie de G_0. On va définir une sous-algèbre, notée $\mathcal{M}(G_0)$, du dual de $R(G_0)$. Si V est un $\mathfrak{g}$-module, soit

$$\mathcal{L}_0(V) = \mathcal{M}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} V.$$

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on va noter $\mathcal{L}_i$ le i-ème foncteur dérivé du foncteur $\mathcal{L}_0$ dans une catégorie convenable. Les objets de notre étude seront certains $\mathfrak{g}$-modules de la forme $\mathcal{L}_i(V)$.

Dans la première section de l'article on va introduire les notations et définir les objets mathématiques avec lesquels on va travailler. On y énonce aussi quelques résultats dont on aura besoin ensuite.

Dans la deuxième section on définit les modules de Verma généralisés. Pour la définition, supposons que

$$\mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u}^+$$

soit une décomposition triangulaire de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{p} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u}^+$ soit une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$. Si E est un $\mathfrak{s}$-module, on peut prolonger l'action de $\mathfrak{s}$ dans E à une action de $\mathfrak{p}$ dans E en faisant agir $\mathfrak{u}^+$ de façon triviale dans E. On note alors

$$M(\mathfrak{p}, E) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} E.$$

Les $\mathfrak{g}$-modules de la forme $M(\mathfrak{p}, E)$ sont les modules de Verma généralisés. Si $\mathfrak{s}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\dim E = 1$, on les appelle modules de Verma.

La troisième section est consacrée à l'étude de l'homologie relative des superalgèbres de Lie, dans le cas général d'abord et dans le cas de certaines sous-superalgèbres de $\mathfrak{g}$ ensuite. On démontre dans cette section un résultat, adapté de certains articles de M. Demazure et I. Penkov (cf. [3] et [19]), concernant le rapport qui existe entre les actions d'une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ dans $H(\mathfrak{n}^0, V)$ et $H(\mathfrak{n}^1, V)$, où V est un $\mathfrak{g}$-module et $\mathfrak{n}^0$ et $\mathfrak{n}^1$ sont les radicaux nilpotents de deux sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$.

Dans la quatrième section on va associer une algèbre, notée $\mathcal{M}(G_0)$, au groupe de Lie G_0; c'est une sous-algèbre du dual de $R(G_0)$ pour le produit de convolution. On définit ensuite les foncteurs $\mathcal{L}_i$ en termes d'homologie relative, comme dans [16]. Ces foncteurs sont duaux des foncteurs introduits par Zuckerman dans des cours faits à l'Institut for Advanced Studies de Princeton (cf. [5], [15], [16] ou [24]). Dans dans le cas qui nous concerne, si E est de dimension finie, alors les $\mathfrak{g}$-modules $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{p}, E))$ sont de dimension finie.[2] Si E est un $\mathfrak{s}$-module, alors on dit que le $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{p}, E))$ (qui est égal à $H_i(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes M(\mathfrak{p}, E))$) est obtenu à partir de E par induction homologique. On montre que l'on a, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{p}, E)) \simeq H_i\left(\mathfrak{p}, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E\right) \quad (1)$$

[2]En particulier, $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{p}, E))$ est le plus grand quotient de dimension finie de $M(\mathfrak{p}, E)$.

ce qui signifie que les foncteurs $\mathcal{L}_i$ sont isomorphes aux duaux des foncteurs considérés par I. Penkov dans [19] en termes de géométrie sur les supervariétés de drapeaux. Notons $m = \dim \mathfrak{u}_0^+$. On montre, suivant des raisonnements analogues à ceux de M. Duflo et M. Vergne (cf. [5]) et de N. Wallach (cf. [24]), que si $M(\mathfrak{p}, E)$ est irréductible, alors $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{p}, E))$ est réduit à $\{0\}$ si $i \neq m$ et admet une forme bilinéaire symétrique σ-invariante[3] non-dégénérée si $i = m$.

La cinquième section est consacrée à l'étude de la somme alternée des supercaractères des $\mathfrak{g}$-modules $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{p}, E))$.

Supposons maintenant que $\mathfrak{h}$ soit une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ et que $\mathfrak{b}$ soit une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b}$. Dans la sixième section on donne des conditions suffisantes pour qu'il existe un nombre $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, E))$ soit irréductible et que, si $j \neq i$, alors $\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{b}, E))$ soit nul. Les modules $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, E))$ ainsi obtenus sont typiques (au sens de Kac [12]) et on démontre que tout $\mathfrak{g}$-module typique est isomorphe à un module de la forme $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, E))$. Ceci nous permet d'obtenir une nouvelle démonstration de la formule de Victor Kac concernant le caractère des modules typiques (cf. [12]) qui n'utilise pas les résultats concernant le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ (dont il n'existe d'ailleurs aucune démonstration détaillée publiée). Le point nouveau est la démonstration de l'irréductibilité des modules $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, E))$, qui combine grâce à la formule (1) des méthodes de N. Wallach (pour les foncteurs de Zuckerman; cf. [24]) et de M. Demazure et I. Penkov (pour la démonstration du théorème de Borel-Weil-Bott; cf. [3] et [19]).

Soient $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{b}$ comme dans le paragraphe précédent. Si $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ est un poids et $i \in \mathbb{N}$, soit $\pi_{\Lambda,i}$ l'action de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \mathbb{C}_\Lambda))$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, alors on sait (cf. [16, §IV.11]) que tout $\mathfrak{g}$-module irréductible de dimension finie est isomorphe à un $\mathfrak{g}$-module du type $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \mathbb{C}_\Lambda))$ et que, pour un poids Λ fixé, $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \mathbb{C}_\Lambda)) = \{0\}$ sauf, au plus, pour un seul $i \in \mathbb{N}$. On en déduit (cf. [2, §VIII.8.3] ou [4, §7.3]) que les polynômes $H \mapsto \operatorname{tr}(\pi_{\Lambda,i}(H)^m)$, définis sur $\mathfrak{h}$, engendrent linéairement l'espace de tous les polynômes W-invariants sur $\mathfrak{h}$. Dans le cas général, on considère les polynômes

$$\begin{array}{cccc} P_{\Lambda,m}: & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & H & \mapsto & \sum_i (-1)^i \operatorname{str}(\pi_{\Lambda,i}(H)^m) \end{array}$$

où $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On verra que l'espace vectoriel engendré par ces polynômes est l'espace des polynômes sur $\mathfrak{h}$ qui sont W-invariants et multiples de toutes les racines isotropes.

Les six premières sections de cet article constituent une version un peu abrégée de la thèse de doctorat soutenue par l'auteur à l'Université Paris VII – Denis Diderot (cf. [22]).

L'auteur remercie Michel Duflo de l'aide apportée à la rédaction de cet article.

[3]La notion de σ-invariance d'une forme bilinéaire définie dans un $\mathfrak{g}$-module sera définie dans la première section.

1. Notations et préliminaires

Tout au long de cet article le corps de base est le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Les notations employées ici seront, sauf mention explicite du contraire, celles employées par Victor Kac dans [10] et [12].

Si V est un superespace vectoriel tel que les dimensions de V_0 et V_1 soient finies, alors on dit que la dimension de V est $(\dim V_0) + (\dim V_1)\epsilon$ et on la voit comme un élément de l'anneau $\mathbb{Z}[\epsilon]/(\epsilon^2 - 1)$. On vérifie facilement que si V et W sont deux superespaces vectoriels, alors $\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W$ et $\dim(V \otimes W) = (\dim V)(\dim W)$.

Si V est un superespace vectoriel, soit $T(V)$ sa superalgèbre tensorielle. On définit $S(V)$ comme étant le quotient de $T(V)$ par l'idéal engendré par l'ensemble des éléments de la forme

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - (-1)^{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}\,(\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0 \cup V_1).$$

De façon analogue, soit $\bigwedge(V)$ la superalgèbre extérieure de V, qui est, par définition, le quotient de $T(V)$ par l'idéal engendré par l'ensemble des éléments de la forme $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} + (-1)^{|\mathbf{v}||\mathbf{w}|}\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$, avec $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_0 \cup V_1$. Si $\mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie, soit $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, qui est, par définition, le quotient de $T(\mathfrak{g})$ par l'idéal engendré par l'ensemble des éléments de la forme $v \otimes w - (-1)^{|v||w|}w \otimes v - [v, w]$, avec $v, w \in \mathfrak{g}_0 \cup \mathfrak{g}_1$.

Soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie. Si ρ_V et ρ_W sont deux représentations de $\mathfrak{g}$ dans deux superespaces vectoriels V et W, on note $\hom_{\mathfrak{g}}(V, W)$ l'espace des éléments invariants de $\hom(V, W)$; ce sont les morphismes de $\mathfrak{g}$-modules. Les modules V et W sont dits isomorphes s'il existe un morphisme homogène inversible $f \in \hom_{\mathfrak{g}}(V, W)$. Remarquons qu'avec cette définition f peut être impair; en particulier, nous considérons comme isomorphes deux modules obtenus l'un de l'autre par un changement de parité.

La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ induit une action de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ que l'on appelle aussi représentation adjointe. Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ on note $L(X)$ et $R(X)$ les endomorphismes de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ définis par $L(X)(u) = Xu$ $(u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}))$ et par $R(X)(u) = -(-1)^{|X||u|}uX$ $(u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}))$. Les fonctions L et R sont des représentations de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$; on les appelle respectivement représentation régulière gauche et représentation régulière droite de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

Soient V et W deux superespaces vectoriels et soit $\mathfrak{g}$ une superalgèbre de Lie qui opère à droite dans V et opère à gauche dans W. On note $V \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} W$ le quotient du superespace vectoriel $V \otimes W$ par le sous-espace engendré par les éléments de la forme

$$\mathbf{v}X \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes X\mathbf{w}\,(\mathbf{v} \in V,\ \mathbf{w} \in W,\ X \in \mathfrak{g}).$$

Si $\rho : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ est une représentation de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on appelle annulateur de V dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ le noyau de ρ, c'est-à-dire l'idéal $\{\mathbf{u} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : \rho(\mathbf{u}) \equiv 0\}$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, τ un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$, l le rang de A et $\mathfrak{h}$ un espace vectoriel complexe de dimension $2n-l$. On choisit dans $\mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{h}^*$) un ensemble linéairement indépendant $\{h_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ (resp. $\{\alpha_i\}_{i\in\{1,\ldots,n\}}$) de telle façon que l'on ait $\langle h_i, \alpha_j\rangle = a_{ij}$ pour $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Soit $\hat{\mathfrak{g}}(A, \tau)$ la superalgèbre de Lie linéairement engendrée par l'ensemble $\mathfrak{h} \cup \{e_i\}_i \cup \{f_i\}_i$ et par les relations :

$$\begin{array}{ll}
[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i & (i, j \in \{1, \ldots, n\}) \\
[H, H'] = 0 & (H, H' \in \mathfrak{h}) \\
[H, e_i] = \alpha_i(H) e_i & (H \in \mathfrak{h};\ i \in \{1, \ldots, n\}) \\
[H, f_i] = -\alpha_i(H) f_i & (H \in \mathfrak{h};\ i \in \{1, \ldots, n\}) \\
|e_i| = |f_i| = 0 & (i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \tau) \\
|e_i| = |f_i| = 1 & (i \in \tau) \\
|H| = 0 & (H \in \mathfrak{h}).
\end{array}$$

On démontre (cf. [9]) que, à équivalence près, $\hat{\mathfrak{g}}(A, \tau)$ ne dépend pas du choix des h_i et des α_i et que parmi les idéaux de $\hat{\mathfrak{g}}(A, \tau)$ il y en a un et un seul qui est maximal par rapport à la propriété de ne contenir aucun élément non nul de $\mathfrak{h}$. Soit $\mathfrak{g}(A, \tau)$ le quotient de $\hat{\mathfrak{g}}(A, \tau)$ par cet idéal.

Définition 1.1. *Suivant [9] et [23], on appelle superalgèbre de Lie contragrédiente une superalgèbre de la forme $\mathfrak{g}(A, \tau)$.*

On va énoncer quelques unes des propriétés des superalgèbres de Lie contragrédientes; pour les détails, voir [10] ou [23]. Soient alors $n \in \mathbb{N}$, $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ et τ un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

On note Δ (l'ensemble des racines), Δ_0 et Δ_1 comme dans [10] et dans [23]. On note aussi :

$$\overline{\Delta_0} = \left\{ \alpha \in \Delta_0 | \frac{\alpha}{2} \notin \Delta_1 \right\} \text{ et } \overline{\Delta_1} = \{\alpha \in \Delta_1 | 2\alpha \notin \Delta_0\}.$$

Signalons le résultat suivant (cf. [23, §2.3]) :

Proposition 1.2. *Il existe un et un seul antiautomorphisme σ de $\mathfrak{g}(A, \tau)$ tel que $\sigma|_{\mathfrak{h}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$ et que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait $\sigma(e_i) = (-1)^{|f_i|} f_i$ et $\sigma(f_i) = e_i$.*

L'antiautomorphisme σ induit un antiautomorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}(A, \tau))$, i. e. un endomorphisme linéaire de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}(A, \tau))$ (qui sera noté aussi σ) qui vérifie $\sigma(uv) = (-1)^{|u||v|} \sigma(v) \sigma(u)$ quand $u, v \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}(A, \tau))$. Pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}(A, \tau))$ on a $\sigma^2(u) = (-1)^{|u|} u$.

On va noter $\mathfrak{g}'(A, \tau)$ la superalgèbre dérivée de $\mathfrak{g}(A, \tau)$. Soit $\mathfrak{h}'$ le sous-espace de $\mathfrak{h}$ engendré par $\{h_i : 1 \leq i \leq n\}$. Soit $\mathfrak{h}''$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}'$ dans $\mathfrak{h}$. On démontre (cf. [23, §IV.1]) que l'on a

$$\mathfrak{g}(A, \tau) = \mathfrak{g}'(A, \tau) \oplus \mathfrak{h}'' \text{ et } \mathfrak{g}'(A, \tau) \bigcap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}'.$$

Soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}(A, \tau)$. On démontre (cf. [23, §II.3]) que $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{h}'$. En particulier, $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{g}_0$.

Théorème 1.3. *Soit $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}(A, \tau)$. Si la matrice A vérifie la propriété*

$$\forall_{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}}\ \exists_{i_1, i_2, \ldots, i_s \in \{1,2,\ldots,n\}}\ a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_s j} \neq 0 \tag{2}$$

et si la dimension de $\mathfrak{g}(A,\tau)$ *est finie, alors la superalgèbre de Lie* $\mathfrak{g}'(A,\tau)/\mathfrak{c}$ *est basique classique. Réciproquement, si* $\mathfrak{g}$ *est une superalgèbre de Lie basique classique, alors il existe un* $n \in \mathbb{N}$*, une matrice* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et un ensemble* $\tau \subset \{1,\ldots,n\}$ *tels que, si* $\mathfrak{c}$ *est le centre de* $\mathfrak{g}(A,\tau)$*, alors on a :*

$$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}'(A,\tau)/\mathfrak{c}.$$

Pour la démonstration du théorème, voir [10, §2], [12, §1], et [23, §V.1].

D'après V. Kac (cf. [10]), on a le résultat suivant :

Théorème 1.4. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une superalgèbre de Lie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La superalgèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à une super algèbre de Lie contragrédiente* $\mathfrak{g}(A,\tau)$ *de dimension finie telle que la matrice* A *vérifie la propriété (2).*

2. *Ou bien il existe un* $m > 1$ *tel que* $\mathfrak{g}$ *soit isomorphe à* $\mathfrak{gl}(m,m)$ *ou bien* $\mathfrak{g}$ *est une superalgèbre de Lie basique classique non isomorphe à* $\mathfrak{psl}(m,m)$ *(*$m > 1$*).*

Jusqu'à la fin de cet article, sauf mention explicite du contraire, on va noter $\mathfrak{g}$ *une superalgèbre de Lie qui vérifie les conditions équivalentes du théorème précédent.*

En particulier, on a :

Proposition 1.5. *L'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_0$ *est réductive et le* $\mathfrak{g}_0$*-module* $\mathfrak{g}$ *est complètement réductible.*

Remarquons que si $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m,m)$, alors $\mathfrak{g}' = \mathfrak{sl}(m,m)$ et $\mathfrak{g}'/\mathfrak{c} = \mathfrak{psl}(m,m)$. Comme on a vu dans le théorème 1.4, les superalgèbres de Lie de la forme $\mathfrak{gl}(m,m)$ sont contragrédientes. De plus, toute représentation de $\mathfrak{sl}(m,m)$ est la restriction à $\mathfrak{sl}(m,m)$ d'une représentation de $\mathfrak{gl}(m,m)$ et toute représentation de $\mathfrak{psl}(m,m)$ peut s'obtenir à partir d'une représentation de $\mathfrak{sl}(m,m)$ par passage au quotient. On voit donc que l'étude des représentations des superalgèbres de Lie qui vérifient les conditions équivalentes du théorème 1.4 contient l'étude des représentations des superalgèbres de Lie basiques classiques.

On démontre (cf. [9, §II.2], [10, §2.5] ou [23, ch. IV–V]) qu'il existe une forme bilinéaire sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ qui est non-dégénérée, paire, supersymétrique, invariante et dont la restriction à $\mathfrak{h}'' \times \mathfrak{h}''$ est nulle. On va choisir une telle forme bilinéaire et on va la noter $(\cdot,\cdot)$. Si $\alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\}$, alors la restriction de $(\cdot,\cdot)$ à $\mathfrak{g}_\alpha \times \mathfrak{g}_\beta$ est non-dégénérée (respectivement nulle) si $\alpha + \beta = 0$ (resp. $\neq 0$). En particulier, la restriction de $(\cdot,\cdot)$ à $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}$ est non-dégénérée et symétrique.

Définition 1.6. *Si* $\alpha \in \mathfrak{h}^*$*, on note* H_α *l'élément de* $\mathfrak{h}$ *tel que, pour tout* $H \in \mathfrak{h}$*,* $\alpha(H) = (H_\alpha, H)$*. Si* $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ *et* $\beta \in \mathfrak{h}^*$*, on pose* $(\alpha,\beta) = (H_\alpha, H_\beta)$*.*

On a donc : $\forall_{\alpha\in\Delta}\forall_{X\in\mathfrak{g}_\alpha}\forall_{Y\in\mathfrak{g}_{-\alpha}}\ \ [X,Y] = (X,Y)H_\alpha$.

Définition 1.7. *On dit qu'une racine α est isotrope si $\alpha(H_\alpha) = 0$ (ou, ce qui est équivalent, si $(\alpha, \alpha) = 0$).*

L'ensemble des racines isotropes est égal à $\overline{\Delta_1}$ (cf. [12, §1.4]).

Définition 1.8. *Un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est dit typique si $\forall_{\alpha \in \overline{\Delta_1}} \lambda(H_\alpha) \neq 0$.*

Définition 1.9. *Si α est une racine non isotrope, on note*

$$h_\alpha = \begin{cases} 2H_\alpha/(\alpha, \alpha) & si\ \alpha \in \Delta_0 \\ H_\alpha/(\alpha, \alpha) & si\ \alpha \in \Delta_1\ et\ 2\alpha \in \Delta_0. \end{cases}$$

Remarquons que si $\alpha \in \Delta_1$ et $2\alpha \in \Delta_0$, alors $h_\alpha = h_{2\alpha}$.

Si $\alpha \in \Delta$, la dimension de $\mathfrak{g}_\alpha$ est égale à 1 (cette assertion est vraie pour n'importe quelle superalgèbre de Lie basique classique à l'exception près de $\mathfrak{psl}(2,2)$, d'après [12, proposition 1.3]; elle peut être facilement vérifiée si $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{gl}(m,m)$ et en particulier pour $m = 2$).

Définition 1.10. *Si $\alpha \in \Delta$, on note*

$$\mathfrak{n}^\alpha = \bigoplus_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \mathfrak{g}_{k\alpha} \qquad et \qquad \mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{n}^{-\alpha} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^\alpha.$$

Il est clair que $\mathfrak{n}^\alpha$ et $\mathfrak{g}^\alpha$ sont des sous-algèbres de $\mathfrak{g}$. Si $\alpha \in \Delta$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, alors $k\alpha \in \Delta$ si et seulement si $k = 2$ et α est une racine impaire non isotrope (cf. [12, §1.4]); on en déduit que :

$$\mathfrak{n}^\alpha = \begin{cases} \mathfrak{g}_\alpha & \text{si } \alpha \in \Delta_0 \bigcup \overline{\Delta_1} \\ \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{2\alpha} & \text{si } \alpha \in \Delta_1 \Big\backslash \overline{\Delta_1}\,. \end{cases}$$

Si V est un $\mathfrak{g}$-module (ou, plus généralement, un $\mathfrak{h}$-module) et $\mu \in \mathfrak{h}^*$, on note :

$$V_\mu = \{\mathbf{v} \in V | (\forall_{H \in \mathfrak{h}}) H\mathbf{v} = \mu(H)\mathbf{v}\}\,.$$

Définition 1.11. *On dit qu'un $\mathfrak{g}$-module V admet un supercaractère si :*

1. $\forall_{\mu \in \mathfrak{h}^*} \dim V_\mu < +\infty$;
2. $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$.

Si V admet un supercaractère, alors on appelle supercaractère de V, et l'on note $\mathrm{sch}(V)$, *l'élément $\mu \longmapsto \dim V_\mu$ de $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}[\epsilon]/(\epsilon^2 - 1)$.*

Si le $\mathfrak{g}$-module V admet un supercaractère, on note $\mathrm{ch}(V)$ (respectivement $\mathrm{sch}_{-1}(V)$) l'élément de $\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ que l'on obtient si on remplace ϵ par 1 (resp. -1).

Définition 1.12. *Si Ψ est un sous-ensemble de Δ, on dit que Ψ est clos si chaque élément de Δ qui est somme de deux éléments de Ψ est aussi un élément de Ψ. On dit que Ψ est borélien si Ψ est clos et si*

1. $\Delta = \Psi \cup (-\Psi)$;
2. $\Psi \bigcap -\Psi = \emptyset$.

On dit que Ψ est parabolique si Ψ est clos et si Ψ contient un sous-ensemble borélien de Δ.

Si Ψ est un sous-ensemble clos de Δ on lui associe la sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ définie par :

$$\mathfrak{g}^{\Psi} = \mathfrak{h} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathfrak{g}_{\alpha} \Big).$$

Si Ψ est un sous-ensemble parabolique (respectivement borélien) de Δ, on dit que $\mathfrak{g}^{\Psi}$ est une sous-algèbre parabolique (resp. de Borel) de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}^{\Psi}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, on note $\Delta^{+}(\mathfrak{b}) = \Psi$.

Définition 1.13. *Si Ψ est un sous-ensemble borélien de Δ et si $\alpha \in \Delta$, on dit que α est simple par rapport à Ψ si $\alpha \in \Psi$ et si $\alpha \notin \Psi + \Psi$.*

Remarquons que si Ψ est un sous-ensemble borélien de Δ, alors l'ensemble des racines simples de Ψ est linéairement indépendant. On peut le vérifier cas par cas, car la liste des systèmes de racines de chaque superalgèbre de Lie basique classique est connue et pour chaque système de racines on connaît tous les sous-ensembles de racines simples (cf. [23, §5.3]). On en déduit que si $2\alpha \notin \Delta$ (respectivement $\in \Delta$), alors $\Psi \bigcup \{-\alpha\}$ (resp. $\Psi \bigcup \{-\alpha, -2\alpha\}$) est un sous-ensemble parabolique de Δ.

Définition 1.14. *Soit Ψ un sous-ensemble borélien de Δ et soit $\alpha \in \Psi$ une racine simple. On note*

$$\mathfrak{n}_{\Psi}(\alpha) = \begin{cases} \displaystyle\bigoplus_{\beta \in \Psi \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{g}_{\beta} & \text{si } \alpha \in \Delta_0 \bigcup \overline{\Delta_1} \\ \displaystyle\bigoplus_{\beta \in \Psi \setminus \{\alpha, 2\alpha\}} \mathfrak{g}_{\beta} & \text{si } \alpha \in \Delta_1 \Big\backslash \overline{\Delta_1} \end{cases}$$

et

$$\Psi_{\alpha} = \begin{cases} \Psi \cup \{-\alpha\} & \text{si } \alpha \in \Delta_0 \bigcup \overline{\Delta_1} \\ \Psi \cup \{-\alpha, -2\alpha\} & \text{si } \alpha \in \Delta_1 \Big\backslash \overline{\Delta_1}. \end{cases}$$

Proposition 1.15. *Soit Ψ un sous-ensemble borélien de Δ et soit $\alpha \in \Psi$ une racine simple. L'espace vectoriel $\mathfrak{n}_{\Psi}(\alpha)$ est un idéal de $\mathfrak{g}^{\Psi_{\alpha}}$ et*

$$\mathfrak{g}^{\Psi_{\alpha}} = \mathfrak{n}_{\Psi}(\alpha) \oplus \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

Démonstration. Puisque α est une racine simple et les racines simples sont linéairement indépendantes, on voit que $[\mathfrak{n}_{\Psi}(\alpha), \mathfrak{n}^{\pm\alpha}] \subset \mathfrak{n}_{\Psi}(\alpha)$; on en déduit que $\mathfrak{n}_{\Psi}(\alpha)$ est un idéal de $\mathfrak{g}^{\Psi_{\alpha}}$.

La deuxième assertion de l'énoncé est triviale. ∎

Si V est un $\mathfrak{g}$-module irréductible (au sens gradué) de dimension finie et $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel, on peut trouver un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tel que $V_\lambda \neq \{0\}$ et tel que si $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{b})$, alors $V_{\lambda+\alpha} = \{0\}$. Comme pour les algèbres de Lie semi-simples (cf. [4, §7.2]) on démontre que λ est unique. On dit que λ est le plus haut poids de V; cette notion dépend du choix de $\mathfrak{b}$.

Remarquons que $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_0$. On note $Q \subset \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h})$; c'est l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tels que l'on ait $\lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$ pour toute racine paire α. Remarquons que $Q \supset \Delta$. A chaque sous-ensemble borélien Ψ de Δ, on fait correspondre une relation d'ordre partielle $\geq_\Psi$ sur l'ensemble Q telle que :

1. $\lambda \geq_\Psi 0$ ssi $\lambda \in \sum_{\alpha\in\Psi} \mathbb{N}\alpha$;
2. $\lambda' \geq_\Psi \lambda$ ssi $\lambda' - \lambda \geq_\Psi 0$.

Pour chaque sous-ensemble borélien Ψ de Δ et si $\mathfrak{b}$ est la sous-algèbre de Borel associée, on note :

$$\rho_{\mathfrak{b}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha\in\Psi\cap\Delta_0} \alpha - \sum_{\alpha\in\Psi\cap\Delta_1} \alpha\right).$$

On note aussi :

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_0\cap\Psi} \alpha, \qquad \rho_1 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_1\cap\Psi} \alpha.$$

Remarquons que ρ_0 et ρ_1 dépendent de Ψ et que $\rho_{\mathfrak{b}} = \rho_0 - \rho_1$.

2. Modules de Verma généralisés

Définition 2.1. *Soit Ψ un sous-ensemble parabolique*[4] *de Δ. On note :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}^\pm &= \bigoplus_{\alpha\in\Psi\setminus-\Psi} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}, \qquad \mathfrak{s} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Psi\cap-\Psi} \mathfrak{g}_\alpha\right), \\ \mathfrak{p} &= \mathfrak{g}^\Psi = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha\in\Psi} \mathfrak{g}_\alpha\right) = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u}^+. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u}^+$ et que l'on a :

Proposition 2.2. *La superalgèbre de Lie $\mathfrak{u}^+$ est un idéal de $\mathfrak{p}$.*

On déduit de la proposition précédente que tout $\mathfrak{s}$-module E devient un $\mathfrak{p}$-module avec $\mathfrak{u}^+$ agissant trivialement dans E.

Soit $\Psi_0 = \Psi \cap \Delta_0$. Il est évident que $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{h} \oplus (\bigoplus_{\alpha\in\Psi_0} \mathfrak{g}_\alpha)$. On sait que $\mathfrak{p}_0$ est une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}_0$ et que $\mathfrak{s}_0$ est une algèbre de Lie réductive (cf. [2, §VIII.3]).

[4] Cf. définition 1.12.

Si E est un $\mathfrak{h}$-module, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $E_\lambda \neq \{0\}$, on dit que λ est un poids de E. Soit E un $\mathfrak{s}$-module. On pose

$$M(\mathfrak{p}, E) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} E.$$

On dit que $M(\mathfrak{p}, E)$ est un module de Verma généralisé. Si aucune confusion n'est à craindre, on le note $M(E)$.

Lemme 2.3. *Soit E un $\mathfrak{s}$-module. On a :*

1. *Le module $M(E)$ est $\mathcal{U}(\mathfrak{u}^-)$-libre.*
2. *Si M est un $\mathfrak{g}$-module engendré par un sous-$\mathfrak{p}$-module E' isomorphe à E, alors M est isomorphe à un quotient de $M(E)$.*
3. *Si E est irréductible de dimension finie, alors le module $M(E)$ possède un et un seul quotient irréductible.*
4. *Si E est un $\mathfrak{h}$-module semi-simple, il en est de même de $M(E)$.*

Démonstration. Les propriétés 1 et 2 peuvent être démontrées comme dans le cas des algèbres de Lie (cf. [4, §7.1]) et la démonstration de la propriété 4 est triviale. Supposons maintenant que E soit un $\mathfrak{s}$-module irréductible de dimension finie. Il est donc $\mathfrak{h}$-semi-simple. Soit N la somme de tous les sous-modules propres de $M(E)$. On va démontrer que N est aussi un sous-module propre de $M(E)$ et donc que N est le seul sous-module propre maximal de $M(E)$; on en déduit que $M(E)$ possède un et un seul quotient irréductible.

Supposons le contraire. Soit Ω un sous-ensemble borélien de Ψ. Puisque la dimension de E est finie, on peut trouver un poids λ de E qui est maximal par rapport à la relation d'ordre $\leq_\Omega$. Soit $\mathbf{v} \in E_\lambda \setminus \{0\}$. On déduit du fait que E est irréductible que $E_\lambda = \mathbb{C}\mathbf{v}$. Le vecteur $1 \otimes \mathbf{v} \in N$ est aussi un vecteur de poids λ. Si on écrit $1 \otimes \mathbf{v}$ sous la forme $\sum_{i=1}^k n_i$ où chaque n_i appartient à un sous-module propre N_i de $M(E)$, alors on peut supposer que pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ le vecteur n_i est aussi un vecteur de poids λ. On voit que chaque n_i doit être proportionnel à $1 \otimes \mathbf{v}$, car $\dim M(E)_\lambda = 1$. Si on prend $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tel que $n_i \neq \{0\}$, alors le sous-module N_i n'est pas un sous-module propre de $M(E)$, contrairement à ce qu'on avait supposé. ■

Si E est un $\mathfrak{s}$-module irréductible de dimension finie, on note $L(E)$ le seul quotient irréductible de $M(E)$.

L'antiautomorphisme σ (qui a été défini dans la proposition 1.2) induit un antiautomorphisme dans $\mathfrak{s}$. En fait, puisque $\alpha \in (\Psi \cap -\Psi) \Rightarrow -\alpha \in (\Psi \cap -\Psi)$ et que pour toute racine α on a $\sigma(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ (cf [9, §I.1.3]), on voit d'après la définition de $\mathfrak{s}$ que $\sigma(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}$. On va noter aussi σ la restriction de σ à $\mathfrak{s}$.

Définition 2.4. *Soient a un antiautomorphisme de $\mathfrak{g}$ et V un $\mathfrak{g}$-module. Si $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ est une forme bilinéaire paire, on dit que B est a-invariante si*

$$\forall_{X \in \mathfrak{g}} \forall_{\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V} \quad B(X\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (-1)^{|X||\mathbf{v}|} B(\mathbf{v}, a(X)\mathbf{w}).$$

Remarquons que si E est un $\mathfrak{s}$-module engendré par un élément de plus haut poids λ par rapport à un sous-ensemble borélien Ω de $\Psi \cap -\Psi$ (donc, en particulier, si E est irréductible de dimension finie), alors on peut définir une forme bilinéaire non nulle, paire, symétrique[5] et σ-invariante sur E. C'est un cas particulier de la proposition 2.5 ci-dessous.

Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt implique l'existence de la décomposition en somme directe de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ donnée par :

$$\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = \mathcal{U}(\mathfrak{s}) \oplus \left(\mathfrak{u}^- \mathcal{U}(\mathfrak{g}) + \mathcal{U}(\mathfrak{g})\mathfrak{u}^+\right).$$

On note P_Ψ la projection de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{s})$ induite par cette décomposition.

Soit $(\cdot,\cdot)$ une forme bilinéaire paire, symétrique et σ-invariante définie sur le module E. On considère la forme bilinéaire $\tilde{B}$ définie sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E$ par la formule :

$$\tilde{B}(X \otimes w, Y \otimes w') = (-1)^{|X||w|}(w, P_\Psi(\sigma(X)Y)w').$$

Elle définit par passage au quotient une forme bilinéaire B sur $M(E)$.

Proposition 2.5. *Soit E un $\mathfrak{s}$-module $\mathfrak{h}$-semi-simple de dimension finie. La forme bilinéaire B (définie dans le paragraphe précédent) est paire, symétrique et σ-invariante. Si E est irréductible et la forme $(\cdot,\cdot)$ est non-dégénérée, alors le noyau de B est le sous-module maximal de $M(E)$.*

Remarquons que la symétrie de la forme bilinéaire B est une conséquence du fait que $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \Longrightarrow \sigma^2(u) = (-1)^{|u|}u$.

Soit $\pi : \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E \longrightarrow M(E)$ la projection naturelle. Soit, pour chaque $i \in \mathbb{N}$, $V_i = \pi\left(\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)\mathcal{U}_i(\mathfrak{g}) \otimes M(E)\right)$. On pose $m = \dim(\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{p}))$.

Lemme 2.6. *Les V_i sont des sous-$\mathfrak{g}_0$-modules de $M(E)$ et $V_m = M(E)$. Le $\mathfrak{g}_0$-module $M(E)$ admet une filtration de longueur finie par les $\mathfrak{g}_0$-modules $\{0\} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_m = M(E)$ et, pour $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, on a*

$$V_i/V_{i-1} \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_0)} \left(S^i(\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{p})) \otimes E\right).$$

La démonstration se fait comme dans le cas des algèbres de Lie (cf. [24, §VI.4]), à condition de remarquer que l'on a $V_i = V_{i+1}$ pour tout $i \geq m$, car l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{p})$ est totalement impair.

Supposons que l'ensemble Ψ soit borélien; dans ce cas on a $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}$. On note $\mathfrak{b} = \mathfrak{g}^\Psi$. Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $\mathbb{C}_\lambda$ le $\mathfrak{h}$-module de dimension 1 tel que $\mathfrak{h}$ opère par λ, i. e. si $H \in \mathfrak{h}$ et $c \in \mathbb{C}_\lambda$, alors $Hc = \lambda(H)c$. On note $M(\mathfrak{b}, \lambda)$ le module $M(\mathfrak{b}, \mathbb{C}_\lambda)$. D'après le lemme 2.3, le module $M(\mathfrak{b}, \lambda)$ possède un et un seul sous-module maximal; on note $L(\mathfrak{b}, \lambda)$ le quotient de $M(\mathfrak{b}, \lambda)$ par ce module.

Le résultat suivant est dû à I. Penkov et V. Serganova (cf. [21, §0.1.5]).[6]

Proposition 2.7. *Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}^\#$ deux sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}^\#_0$ et soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ un poids typique[7]. Alors les $\mathfrak{g}$-modules $M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$ et $M(\mathfrak{b}^\#, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}^\#})$ sont isomorphes.*

[5] Il s'agit vraiment d'une forme bilinéaire symétrique et non supersymétrique.

[6] Pour être plus précis, l'article en question n'examine pas toutes les superalgèbres de Lie avec lesquelles on travaille; parmi celles-ci, seules $\mathfrak{gl}(m,m)$, $\mathfrak{sl}(m,n)$ et $\mathfrak{osp}(m,n)$ sont étudiées. Mais l'assertion peut être facilement vérifiée cas par cas si $\mathfrak{g}$ n'est pas de cette forme.

[7] Cf. définition 1.8.

3. Résultats d'algèbre homologique relative

Dans cette section on rappelle quelques définitions concernant l'homologie relative des superalgèbres de Lie. Pour plus de détails, cf. [6, §1.6], [10, §5.5.3] ou [18].

Soit $\mathfrak{a}$ une superalgèbre de Lie de dimension finie et soit $\mathfrak{m}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$. Pour chaque $\mathfrak{a}$-module E on va définir les groupes d'homologie relative $H_i(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E)$. La superalgèbre de Lie $\mathfrak{m}$ opère à gauche de façon naturelle dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$ et cette action à gauche induit une action à droite de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$. L'action à droite de $\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{m}$ induit une action à droite de $\mathfrak{m}$ dans $\bigwedge(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note

$$C_n(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E) = \bigwedge^n(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})} E$$

si $n \in \mathbb{N}$ et $C_n(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E) = \{0\}$ si $n < 0$. On note $C_n(\mathfrak{a},E)$ l'espace $C_n(\mathfrak{a},\{0\};E)$.

Soit $\Pi\mathfrak{a}$ le superespace vectoriel $\mathfrak{a}$ muni de la $\mathbb{F}_2$-graduation donnée par $(\Pi\mathfrak{a})_0 = \mathfrak{a}_1$ et $(\Pi\mathfrak{a})_1 = \mathfrak{a}_0$. Soit $\tilde{\mathfrak{a}}$ le superespace vectoriel $\mathfrak{a} \oplus \Pi\mathfrak{a}$. Si $X \in \mathfrak{a}$, on note X (respectivement $\tilde{X}$) l'élément $(X,0)$ (resp. $(0,X)$) de $\tilde{\mathfrak{a}}$. Dans l'espace $\tilde{\mathfrak{a}}$, on considère la structure de superalgèbre de Lie qui prolonge la structure de superalgèbre de Lie de $\mathfrak{a} \oplus \{0\}$ et telle que si $X, Y \in \mathfrak{a}$, alors :

1. $\left[\tilde{X}, Y\right] = \widetilde{[X,Y]}$;
2. $\left[\tilde{X}, \tilde{Y}\right] = 0$.

On note d la dérivation impaire de $\tilde{\mathfrak{a}}$ telle que $d(X) = 0$ et $d(\tilde{X}) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$. Elle s'étend en une dérivation de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{a}})$ notée encore d. La dérivation d est impaire, $\mathcal{U}(\mathfrak{a})$-linéaire et vérifie $d^2 = 0$. On déduit du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt que l'on a

$$\bigwedge(\mathfrak{a}) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{a}) \simeq \mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{a}}),$$

l'isomorphisme étant un isomorphisme de $\mathfrak{a}$-modules; en conséquence, on identifie $\bigoplus_n C_n(\mathfrak{a},E)$ à $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{a}}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} E$. On écrira donc $\tilde{X}_1 \cdots \tilde{X}_n \otimes v$ (avec $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{a}$ et $v \in E$) un élément typique de $C_n(\mathfrak{a},E)$. L'application $d \otimes 1$ induit une application, encore notée d, de degré -1 et de carré nul dans $\bigoplus_n C_n(\mathfrak{a},E)$. Par exemple, on a $d(v) = 0$ et $d(\tilde{X} \otimes v) = Xv$ pour tout $X \in \mathfrak{a}$ et tout $v \in E$. L'application d induit une application[8], encore notée d, de degré -1 et de carré nul dans $\bigoplus_n C_n(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E)$.

On pose :

$$H_i(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E) = \frac{\ker d : C_i(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E) \to C_{i-1}(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E)}{d(C_{i+1}(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E))}.$$

Si $\mathfrak{m} = \{0\}$, $H_i(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E)$ est noté $H_i(\mathfrak{a},E)$.

Soit $\mathfrak{n}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{a}$ telle que $[\mathfrak{n},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{n}$. La superalgèbre de Lie $\mathfrak{m}$ opère de façon naturelle dans $\bigwedge^k(\mathfrak{n})$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$. Il y a donc une action naturelle de $\mathfrak{m}$ dans $\bigwedge^k(\mathfrak{n}) \otimes E$ pour chaque $\mathfrak{a}$-module E. Cette action commute à l'opérateur :

$$d : \bigwedge^k(\mathfrak{n}) \otimes E \longrightarrow \bigwedge^{k-1}(\mathfrak{n}) \otimes E$$

et induit une action de $\mathfrak{m}$ dans $H_k(\mathfrak{n},E)$. Ceci démontre la proposition suivante :

[8] Cette façon de définir la fonction d (i. e. à partir de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{a}})$) est due à Pierre Cartier.

Proposition 3.1. *Soient $\mathfrak{a}$ une superalgèbre de Lie, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{a}$ et E un $\mathfrak{a}$-module. Si $[\mathfrak{n},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{n}$, alors l'action naturelle de $\mathfrak{m}$ dans $\bigwedge^k(\mathfrak{n}) \otimes E$ induit une action de $\mathfrak{m}$ dans $H_k(\mathfrak{n}, E)$.*

On dispose aussi du résultat suivant :

Proposition 3.2. *Soient $\mathfrak{a}$ une superalgèbre de Lie, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{a}$ et E un $\mathfrak{a}$-module. Supposons que $\mathfrak{m}$ soit une algèbre de Lie réductive qui opère de façon semi-simple dans $\mathfrak{a}$ et dans E, que $\mathfrak{n}$ soit un idéal de $\mathfrak{a}$ et que*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{m}. \tag{3}$$

Alors on a :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad H_n(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E) \simeq H_n(\mathfrak{n},E)^{\mathfrak{m}}.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que, puisque $\mathfrak{n}$ est un idéal de $\mathfrak{a}$, on a $[\mathfrak{n},\mathfrak{m}] \subset \mathfrak{n}$ et donc que $\mathfrak{m}$ opère dans $H_k(\mathfrak{n},E)$ d'après la proposition 3.1; on peut donc parler de $H_n(\mathfrak{n},E)^{\mathfrak{m}}$.

On a :

$$\begin{aligned} C_n(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E) &= \bigwedge\nolimits^n(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})} E \text{ (par définition)} \\ &\simeq \bigwedge\nolimits^n(\mathfrak{n}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})} E \text{ (par (3))} \\ &\simeq \left(\bigwedge\nolimits^n(\mathfrak{n}) \otimes E\right)^{\mathfrak{m}} \end{aligned}$$

car l'action de $\mathfrak{m}$ est semi-simple, et donc, toujours parce que l'action de $\mathfrak{m}$ est semi-simple,

$$\begin{aligned} H_n(\mathfrak{n},E)^{\mathfrak{m}} &= \frac{\ker(\text{restriction de } d \text{ à } C_n(\mathfrak{n},E)^{\mathfrak{m}})}{d(C_{n+1}(\mathfrak{n},E)^{\mathfrak{m}})} \\ &= \frac{\ker d : C_n(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E) \to C_{n-1}(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E)}{d(C_{n+1}(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E))} \\ &= H_n(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E). \end{aligned}$$

∎

De manière duale on définit la cohomologie relative $H^i(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E)$ comme la cohomologie d'un complexe dont le groupe sous-jacent est $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{m}}(\bigwedge(\mathfrak{a}/\mathfrak{m}),E)$. Nous renvoyons aux références citées pour plus de détails.

Soient maintenant $\mathfrak{b}$ une superalgèbre de Lie de dimension finie et $\mathfrak{n}$ une sous-algèbre de $\mathfrak{b}$. Soit E un superespace vectoriel dans lequel $\mathfrak{a}$ opère à gauche et $\mathfrak{b}$ opère à droite de telle façon que l'action à gauche commute avec l'action à droite. On peut considérer les groupes d'homologie relative

$$H_i\left(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},\mathfrak{m}\times\mathfrak{n};E\right).$$

Pour le faire, on considère l'action à gauche de $\mathfrak{b}$ dans E définie par :

$$X\mathbf{v} = -(-1)^{|X||\mathbf{v}|}\mathbf{v}X \quad (X\in\mathfrak{b},\ \mathbf{v}\in E);$$

E devient alors un $\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}$-module à gauche.

Soit $E\mathfrak{b}$ le sous-$\mathfrak{b}$-module de E engendré par les éléments de la forme $\mathbf{v}X$, avec $\mathbf{v}\in E$ et $X\in\mathfrak{b}$. Puisque l'action de $\mathfrak{a}$ dans E commute avec celle de $\mathfrak{b}$, on voit que $E\mathfrak{b}$ et $E/E\mathfrak{b}$ ont des structures naturelles de $\mathfrak{a}$-modules.

Proposition 3.3. *Supposons que :*

$$\forall_{n\geq 1}\,\forall_{p\in\mathbb{N}}\; H_n\left(\mathfrak{b},\mathfrak{n};\bigwedge^p(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})}E\right)=\{0\}.$$

Alors :

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\quad H_n\left(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},\mathfrak{m}\times\mathfrak{n};E\right)\simeq H_n\left(\mathfrak{a},\mathfrak{m};E/E\mathfrak{b}\right).$$

Démonstration. Pour $p,q\in\mathbb{N}$, on note $C_{p,q}$ l'espace

$$\bigwedge^p(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})}E\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{n})}\bigwedge^q(\mathfrak{b}/\mathfrak{n}).$$

En particulier,

$$C_{n,0}=\bigwedge^n(\mathfrak{a}/\mathfrak{m})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{m})}E/E\mathfrak{n}.$$

On identifie $\bigoplus_{p,q}\bigwedge^p(\mathfrak{a})\otimes E\otimes\bigwedge^q(\mathfrak{b})$ et $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{a}})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}E\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{b}})$. Notons $d^\star$ la différentielle de $\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{b}})$. On étend les différentielles d et $d^\star$ à

$$\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{a}})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}E\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}\mathcal{U}(\tilde{\mathfrak{b}})$$

de manière naturelle (et en appliquant la règle des signes). On pose $\delta=d+d^\star$. Les espaces $C_n(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},E)$ et $\bigoplus_{p+q=n}\bigwedge^p(\mathfrak{a})\otimes E\otimes\bigwedge^q(\mathfrak{b})$ sont isomorphes et δ devient la différentielle définissant l'homologie $H_n(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},E)$.

Par passage au quotient, d, $d^\star$ et δ induisent des endomorphismes de $\bigoplus_{p,q}C_{p,q}$. Les espaces $\bigoplus_{p+q=n}C_{p,q}$ et $C_n(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},\mathfrak{m}\times\mathfrak{n};E)$ sont isomorphes et δ devient la différentielle définissant l'homologie relative $H_n(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},\mathfrak{m}\times\mathfrak{n};E)$.

Considérons le complexe double :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
C_{0,n} & \leftarrow & C_{1,n} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & C_{n-1,n} & \leftarrow & C_{n,n} & \leftarrow & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
C_{0,1} & \leftarrow & C_{1,1} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & C_{n-1,1} & \leftarrow & C_{n,1} & \leftarrow & \cdots & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & \\
C_{0,0} & \leftarrow & C_{1,0} & \leftarrow & \cdots & \leftarrow & C_{n-1,0} & \leftarrow & C_{n,0} & \leftarrow & C_{n+1,0} & \cdots
\end{array}$$

Dans ce diagramme les flèches verticales sont les d et les flèches horizontales sont les $d^\star$. Il résulte des hypothèses de la proposition et des définitions de d et de $d^\star$ que :

1. Le diagramme commute (au sens gradué).
2. L'application naturelle $C_{n,0}\longrightarrow C_n(\mathfrak{a},\mathfrak{n};E/E\mathfrak{b})$ est surjective.
3. Si $m\geq 0$, alors le noyau de d dans $C_{n,m}$ est égal à $d(C_{n+1,m})$.

L'application $C_{n,0}\longrightarrow C_n(\mathfrak{a},\mathfrak{n};E/E\mathfrak{b})$ induit une application

$$H_n\left(\mathfrak{a}\times\mathfrak{b},\mathfrak{m}\times\mathfrak{n};E\right)\longrightarrow H_n\left(\mathfrak{b},\mathfrak{n};E/E\mathfrak{b}\right).$$

On démontre de manière standard que cette application est bijective. ∎

On va maintenant étudier l'homologie de certaines superalgèbres de Lie. Si $\mathfrak{a}$ est une superalgèbre de Lie et V est un $\mathfrak{a}$-module, les espaces $(H_i(\mathfrak{a}, V))_{i\in\mathbb{N}}$ peuvent être calculés de la façon suivante (cf. [7, ch. II] ou [15, ch. V–VI]) : on considère une résolution projective du module trivial $\mathbb{C}$:

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \{0\}.$$

Alors $H_n(\mathfrak{a}, V)$ est isomorphe au n-ième groupe d'homologie de la suite :

$$\cdots \longrightarrow P_1 \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} V \longrightarrow P_0 \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} V \longrightarrow \{0\}.$$

On va appliquer cette méthode de calcul dans la démonstration du prochain lemme.

Notons $\mathfrak{n}$ la superalgèbre de Lie de dimension $1+\epsilon$ engendrée par un élément e tel que $\mathfrak{n}_0 = \mathbb{C}[e,e]$ et que $\mathfrak{n}_1 = \mathbb{C}e$. On note $x = [e,e]/2$. Si M est un $\mathfrak{n}$-module, soit $M^e = \{\mathbf{m} \in M : e\mathbf{m} = 0\}$. Remarquons que $M^e = M^{\mathfrak{n}}$, car e engendre $\mathfrak{n}$. Si N est un $\mathfrak{n}_0$-module alors on définit N^x de façon analogue.

Lemme 3.4. *Soit M un $\mathfrak{n}$-module. Alors :*

1. $H_0(\mathfrak{n}, M) \simeq M/eM$ *;*
2. $H_1(\mathfrak{n}, M) \simeq M^e$ *;*
3. $H_i(\mathfrak{n}, M) = \{0\}$ *quand* $i > 1$ *;*

et si N est un $\mathfrak{n}_0$-module

1. $H_0(\mathfrak{n}_0, N) \simeq N/xN$ *;*
2. $H_1(\mathfrak{n}_0, N) \simeq N^x$ *;*
3. $H_i(\mathfrak{n}_0, N) = \{0\}$ *quand* $i > 1$.

Démonstration. Remarquons que $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$ est isomorphe (comme algèbre associative) à $\mathbb{C}[e]$, car $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$ est le quotient de l'algèbre tensorielle de $\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}e$ par l'idéal engendré par $e^2 - x$; il est alors évident que l'application ψ de $\mathbb{C}[e]$ dans $\mathcal{U}(\mathfrak{n})$ telle que $\psi(e^n) = e^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est un isomorphisme. On dispose alors de la résolution projective du module trivial $\mathbb{C}$ donnée par :

$$\cdots \longrightarrow \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}[e] \xrightarrow{\xi} \mathbb{C}[e] \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C} \longrightarrow \{0\}$$

où la fonction $\xi : \mathbb{C}[e] \longrightarrow \mathbb{C}[e]$ est donnée par $\xi(P) = eP$ et ϵ est la projection de $\mathbb{C}[e]$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour chaque polynôme P, $\epsilon(P)$ est son terme constant. On sait alors que les espaces $H_i(\mathfrak{n}, M)$ sont donnés par l'homologie du complexe

$$\{0\} \longrightarrow \mathbb{C}[e] \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{n})} M \longrightarrow \mathbb{C}[e] \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{n})} M \longrightarrow \{0\}.$$

On voit facilement que ce complexe est isomorphe au complexe

$$\{0\} \longrightarrow M \xrightarrow{\xi^*} M \longrightarrow \{0\}$$

où la fonction ξ^* de M dans M est donnée par $\xi^*(\mathbf{m}) = e\mathbf{m}$ et donc $\xi^*(M) = eM$. On en déduit que

1. $H_0(\mathfrak{n}, M) \simeq M/eM$;

2. $H_1(\mathfrak{n}, M) \simeq M^e$;

3. *Si* $i > 1$, *alors* $H_i(\mathfrak{n}, M) = \{0\}$.

Les résultats concernant les $\mathfrak{n}_0$-modules sont bien connus et peuvent être démontrés de la même façon. ■

On va travailler maintenant avec la superalgèbre de Lie $\mathfrak{osp}(1,2)$, qui est isomorphe à la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(1,2)$ dont les éléments sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -b & c_1 & c_2 \\ a & c_3 & -c_1 \end{pmatrix}.$$

On va identifier $\mathfrak{osp}(1,2)$ à cette superalgèbre de Lie. On note :

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que

1. $\mathfrak{osp}(1,2)_0 = \mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}y$;

2. $\mathfrak{osp}(1,2)_1 = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f$;

3. $[h,e] = e$, $[h,f] = -f$, $[e,e] = 2x$, $[f,f] = 2y$, $[e,f] = h$, $[x,y] = -h$, $[h,x] = 2x$, $[h,y] = -2y$, $[e,y] = -f$, $[e,x] = 0$, $[f,x] = e$ et $[f,y] = 0$.

De plus, la sous-algèbre de $\mathfrak{osp}(1,2)$ engendrée par x et par e est isomorphe à $\mathfrak{n}$; en fait, le choix des symboles x et e est compatible avec celui qui a été fait pour $\mathfrak{n}$ avant l'énoncé du lemme 3.4. Remarquons que $\mathfrak{sl}(2) \simeq \mathfrak{osp}(1,2)_0$; on va identifier $\mathfrak{sl}(2)$ à $\mathfrak{osp}(1,2)_0$ par cet isomorphisme.

Soit $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h$. Si V (respectivement W) est un $\mathfrak{osp}(1,2)$-module (resp. $\mathfrak{sl}(2)$-module), alors V est aussi un $\mathfrak{n}$-module (resp. $\mathfrak{n}_0$-module); de plus, puisque $\mathfrak{n}$ (resp. $\mathfrak{n}_0$) est un idéal de $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}$ (resp. $\mathfrak{n}_0 \oplus \mathfrak{h}$), la proposition 3.1 dit que $\mathfrak{h}$ opère dans les espaces $H_i(\mathfrak{n}, V)$ (resp. $H_i(\mathfrak{n}_0, V)$). Le lemme 3.4 a alors le corollaire suivant :

Lemme 3.5. *Soit V (resp. W) un $\mathfrak{osp}(1,2)$-module (resp. $\mathfrak{sl}(2)$-module). Alors :*

1. $H_1(\mathfrak{n}, V) \simeq V^e \otimes \mathbb{C}e$;

2. $H_0(\mathfrak{n}, V) \simeq V/eV$;

3. $H_1(\mathfrak{n}_0, W) \simeq W^x \otimes \mathbb{C}x$;

4. $H_0(\mathfrak{n}_0, W) \simeq W/xW$.

Ces isomorphismes sont des isomorphismes de $\mathfrak{h}$-modules.

Démonstration. L'application $\xi^* : V \otimes \mathbb{C}e \longrightarrow V$ définie par $\xi^*(\mathbf{v} \otimes e) = e\mathbf{v}$ est un morphisme de $\mathfrak{h}$-modules. On en déduit (en reprenant la démonstration du lemme 3.4) que, comme $\mathfrak{h}$-modules, $H_1(\mathfrak{n}, V) \simeq \ker(\xi^*) = V^e \otimes \mathbb{C}e$. Il est clair que $H_0(\mathfrak{n}, V) \simeq V/eV$.

La démonstration dans le cas des $\mathfrak{sl}(2)$-modules peut être faite de la même façon. ■

Soit V un $\mathfrak{osp}(1,2)$-module localement fini, i. e. tel que si $\mathbf{v} \in V$, alors le sous-module engendré par $\mathbf{v}$ est de dimension finie. On sait alors que V est somme directe de ses sous-modules irréductibles de dimension finie car, d'après [8], tout $\mathfrak{osp}(1,2)$-module de dimension finie est somme directe de sous-modules irréductibles. Le lemme suivant va donner des résultats plus précis concernant la structure de $\mathfrak{h}$-module de $H_0(\mathfrak{n}, V)$ et de $H_1(\mathfrak{n}, V)$ dans cette situation.

Lemme 3.6. *Soit V (resp. W) un $\mathfrak{osp}(1,2)$-module (resp. $\mathfrak{sl}(2)$-module) localement fini. Alors, comme $\mathfrak{h}$-modules :*

1. $H_0(\mathfrak{n}, V) \simeq V^f$.
2. $H_0(\mathfrak{n}_0, W) \simeq W^y$.

Pour faire la démonstration, on aura besoin du résultat suivant (cf. [8, §6]): si $n \in \mathbb{N}$ et M est un $\mathfrak{osp}(1,2)$-module de dimension $2n+1$, alors il existe un élément $\mathbf{m} \in M$ tel que

1. l'ensemble $\{\mathbf{m}, e\mathbf{m}, e^2\mathbf{m}, \ldots, e^{2n}\mathbf{m}\}$ est une base de M;
2. $M^f = \mathbb{C}\mathbf{m}$;
3. $\mathbf{m} \notin eM$;
4. $h\mathbf{m} = -n\mathbf{m}$.

Démonstration. Pour démontrer la première assertion du lemme, il faut, d'après le lemme 3.4, que l'on démontre que $V^f \simeq V/eV$. Puisque V est la somme directe de ses sous-modules irréductibles de dimension finie, on voit clairement qu'il suffit que l'on montre que si M est un $\mathfrak{osp}(1,2)$-module irréductible, alors $M^f \simeq M/eM$. Cette assertion est vraie, car $M = M^f \oplus eM$.

La démonstration dans le cas des $\mathfrak{sl}(2)$-modules peut être faite de la même façon. ■

On déduit aussi à partir des propriétés des $\mathfrak{osp}(1,2)$-modules irréductibles de dimension finie que le résultat suivant est vrai :

Lemme 3.7. *Soit V (respectivement W) un $\mathfrak{osp}(1,2)$-module (resp. $\mathfrak{sl}(2)$-module) localement fini et soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

1. *Si $\lambda(h) \notin -\mathbb{N}$, alors $(V^f)_\lambda = \{0\}$;*
2. *Si $\lambda(h) \notin -\mathbb{N}$, alors $(W^y)_\lambda = \{0\}$;*

3. *Si* $\lambda(h) \notin \mathbb{N}$, *alors* $(V^e)_\lambda = \{0\}$;
4. *Si* $\lambda(h) \notin \mathbb{N}$, *alors* $(W^x)_\lambda = \{0\}$.

Rappelons que $\mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie qui vérifie les conditions équivalentes du théorème 1.4. Soit $\alpha \in \Delta$.

Proposition 3.8. *Soit $\alpha \in \Delta$ une racine non isotrope. Si α est paire (respectivement impaire), la sous-algèbre $\mathfrak{g}^\alpha$ de $\mathfrak{g}$ (cf. définition 1.10) est isomorphe à la somme directe de $\mathfrak{sl}(2)$ (resp. $\mathfrak{osp}(1,2)$) avec* $\ker\alpha$.

Démonstration. On va faire la démonstration dans le cas où α est impaire, l'autre cas étant analogue et bien connu.

Soient $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ et $Y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tels que $[X_\alpha, Y_\alpha] = h_\alpha$ (cf. définition 1.9). On note $X_{2\alpha} = [X_\alpha, X_\alpha]/2$ et $Y_{2\alpha} = [Y_\alpha, Y_\alpha]/2$. L'application linéaire $\eta : \mathfrak{osp}(1,2) \longrightarrow \mathfrak{g}(\alpha)$ telle que $\eta(e) = X_\alpha$, $\eta(f) = Y_\alpha$, $\eta(h) = h_\alpha$, $\eta(x) = X_{2\alpha}$ et $\eta(y) = Y_{2\alpha}$ est un homomorphisme injectif. Comme $\alpha(h_\alpha)$ est non nul, on a $\mathfrak{g}(\alpha) \simeq \mathfrak{osp}(1,2) \oplus \ker\alpha$. ■

Soient $\mathfrak{b}^0$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}^0 = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{b}^0)} \mathfrak{g}_\alpha$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, V un $\mathfrak{g}$-module localement fini et i un entier. L'algèbre $\mathfrak{h}$ opère dans $H_i(\mathfrak{n}^0, V)$ et on note comme d'habitude $H_i(\mathfrak{n}^0, V)_\lambda$ le sous-espace de poids λ. Remarquons que si α est une racine non isotrope, alors l'action de h_α dans $H_i(\mathfrak{n}^0, V)$ est semi-simple avec des valeurs propres entières. En particulier, $H_i(\mathfrak{n}^0, V)_\lambda$ est nul si λ n'appartient pas au réseau des poids Q.

Notons que si V est $\mathfrak{h}$-semi-simple (ce qui est le cas dans les applications ultérieures), il en est de même de $H_i(\mathfrak{n}^0, V)$, et donc $H_i(\mathfrak{n}^0, V)$ est somme directe des $H_i(\mathfrak{n}^0, V)_\lambda$, où λ parcourt le réseau des poids.

Proposition 3.9. *Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{b}^0$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{n}^0 = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{b}^0)} \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{b}^0)$ une racine simple non isotrope et V un $\mathfrak{g}$-module localement fini. Soit $\mathfrak{b}^1$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ telle que*

$$\Delta^+(\mathfrak{b}^1) = \begin{cases} (\Delta^+(\mathfrak{b}^0) \setminus \{\alpha\}) \bigcup \{-\alpha\} & si\ \alpha \in \Delta_0 \\ (\Delta^+(\mathfrak{b}^0) \setminus \{\alpha, 2\alpha\}) \bigcup \{-\alpha, -2\alpha\} & si\ \alpha \in \Delta_1 \end{cases}$$

et soit $\mathfrak{n}^1 = \bigoplus_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{b}^1)} \mathfrak{g}_\alpha$. Si $\lambda(h_\alpha) \geq 0$, alors :

$$\forall_{i\in\mathbb{N}} \quad H_i(\mathfrak{n}^0, V)_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}^0}} \simeq H_{i-1}(\mathfrak{n}^1, V)_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}^1}}.$$

Proof. Notons $\mathfrak{n}(\alpha)$ la sous-algèbre $\mathfrak{n}_{\Delta^+(\mathfrak{b}^0)}(\alpha)$ de $\mathfrak{g}$ (cf. définition 1.14). D'après la proposition 1.15, on sait que

$$\left[\mathfrak{n}^\alpha \oplus \mathbb{C}h_\alpha \oplus \mathfrak{n}^{-\alpha}, \mathfrak{n}(\alpha)\right] \subset \mathfrak{n}(\alpha). \tag{4}$$

On a $\mathfrak{n}^0 = \mathfrak{n}^\alpha \oplus \mathfrak{n}(\alpha)$, $\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}^{-\alpha} \oplus \mathfrak{n}(\alpha)$ et $\mathfrak{n}^0 \bigcap \mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}(\alpha)$. On déduit de la formule (4) et des propositions 1.15, 3.1 et 3.8 que si α est paire (respectivement impaire), alors $H_i(\mathfrak{n}(\alpha), V)$ admet une structure de $\mathfrak{sl}(2)$-module (resp. $\mathfrak{osp}(1,2)$-module) localement fini.

On fixe un $i \in \mathbb{N}$. Des résultats standards concernant la suite spectrale de Hochschild-Serre (cf. [6, §I.5 et §I.6.5]) et le fait que, d'après le lemme 3.4, $H_j(\mathfrak{n}, M) = \{0\}$ si $j > 1$ nous permettent de déduire que l'on a :

$$H_i(\mathfrak{n}^0, V) \simeq H_0(\mathfrak{n}^\alpha, H_i(\mathfrak{n}(\alpha), V)) \oplus H_1(\mathfrak{n}^\alpha, (H_{i-1}(\mathfrak{n}(\alpha), V)), \tag{5}$$

l'isomorphisme étant un isomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules. Soient $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha \setminus \{0\}$ et $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \setminus \{0\}$. Alors les lemmes 3.5 et 3.6 et la formule (5) nous permettent de déduire que l'on a :

$$H_i(\mathfrak{n}^0, V) \simeq H_i(\mathfrak{n}(\alpha), V)^{X_{-\alpha}} \oplus \left(H_{i-1}(\mathfrak{n}(\alpha), V)^{X_\alpha} \otimes \mathbb{C}X_\alpha\right). \tag{6}$$

Posons $\mu = \lambda + \rho_{\mathfrak{b}^0}$. Remarquons que l'on a $\rho_{\mathfrak{b}^0} - \rho_{\mathfrak{b}^1} = \alpha$; on a donc $\mu - \alpha = \lambda + \rho_{\mathfrak{b}^1}$. D'autre part, on a

$$\rho_{\mathfrak{b}^0}(h_\alpha) = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \text{ est paire} \\ \frac{1}{2} \text{ si } \alpha \text{ est impaire} \end{cases}$$

et donc $\mu(h_\alpha) > 0$.

On a, d'après la formule (6), appliquée à $\mathfrak{n}^0$ et $\mathfrak{n}^1$,

$$\begin{aligned} H_i(\mathfrak{n}^0, V)_\mu &\simeq \left(H_i(\mathfrak{n}(\alpha), V)^{X_{-\alpha}}\right)_\mu \oplus \left(H_{i-1}(\mathfrak{n}(\alpha), V)^{X_\alpha}\right)_{\mu-\alpha}, &(7)\\ H_{i-1}(\mathfrak{n}^1, V)_{\mu-\alpha} &\simeq \left(H_{i-1}(\mathfrak{n}(\alpha), V)^{X_\alpha}\right)_{\mu-\alpha} \oplus \left(H_{i-2}(\mathfrak{n}(\alpha), V)^{X_{-\alpha}}\right)_\mu. &(8)\end{aligned}$$

Puisque $\mu(h_\alpha) > 0$, le lemme 3.7 (appliqué avec $X_{-\alpha} = f$ ou $X_{-\alpha} = y$) et les égalités (7) et (8) nous permettent de déduire que

$$\begin{aligned} H_i(\mathfrak{n}^0, V)_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}^0}} &\simeq H_i(\mathfrak{n}^0, V)_\mu \simeq \left(H_{i-1}(\mathfrak{n}(\alpha), V)^{X_\alpha}\right)_{\mu-\alpha} \simeq H_{i-1}(\mathfrak{n}^1, V)_{\mu-\alpha} \\ &\simeq H_{i-1}(\mathfrak{n}^1, V)_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}^1}}. \end{aligned}$$ ■

Signalons le cas particulier suivant :

Corollaire 3.10. *Soient $\mathfrak{b}^0$, α et V comme dans la proposition 3.9 et soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Si $\lambda(h_\alpha) = 0$, alors :*

$$\forall_{i \in \mathbb{N}} \quad H_i(\mathfrak{n}^0, V)_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}^0}} = 0.$$

Démonstration. Cela résulte de la formule (7) : sous les hypothèses considérées, les deux facteurs du membre de droite de la formule (7) sont nuls. Remarquons que si α est impaire, on a $(\lambda + \rho_{\mathfrak{b}^0})(h_\alpha) = \frac{1}{2}$, de sorte que $\lambda + \rho_{\mathfrak{b}^0}$ n'est pas un poids. Donc $H_i(\mathfrak{n}^0, V)_{\lambda+\rho_{\mathfrak{b}^0}}$ est nul pour des raisons encore plus fortes! ■

4. Foncteurs de Zuckerman

Rappelons que $\mathfrak{g}$ est une superalgèbre de Lie qui vérifie les conditions équivalentes du théorème 1.4. Soit $\mathfrak{g}_0^\wedge$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles de dimension finie de $\mathfrak{g}_0$. Pour chaque $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$, on fixe une représentation r_γ dans la classe γ. Soient E_γ l'espace vectoriel dans lequel r_γ opère et I_γ le noyau de r_γ. L'application r_γ induit une bijection $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)/I_\gamma \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(E_\gamma)$.

Soit G_0 un groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe dont l'algèbre de Lie soit isomorphe à $\mathfrak{g}_0$ et soit $F(G_0)$ l'algèbre des fonctions continues de G_0 dans $\mathbb{C}$. On note $R(G_0)$ le sous-espace de $F(G_0)$ engendré par les coefficients des représentations semi-simples de dimension finie de G_0. Remarquons que $R(G_0)$ est engendré par les coefficients des représentations irréductibles de dimension finie de G_0. Puisque le produit tensoriel de deux représentations semi-simples de G_0 est semi-simple, $R(G_0)$ est une sous-algèbre de $F(G_0)$.

Si E est un G_0-module semi-simple, $\alpha \in E^*$, $\mathbf{v} \in E$ et $g \in G_0$, on note $\phi_{\alpha,\mathbf{v}}(g) = \alpha(g\mathbf{v})$. Si $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$, l'application

$$\begin{array}{ccc} E_\gamma^* \otimes E_\gamma & \longrightarrow & R(G_0) \\ \alpha \otimes \mathbf{v} & \mapsto & \phi_{\alpha,\mathbf{v}} \end{array}$$

est injective; on note $R(G_0)_{\gamma^*}$ son image. Ces applications induisent un isomorphisme

$$\bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \left(E_\gamma^* \otimes E_\gamma\right) \simeq R(G_0). \tag{9}$$

Soit l l'action régulière gauche de G_0 dans $R(G_0)$ définie par

$$(l(k)\phi)(m) = \phi(k^{-1}m) \ \ (k, m \in G_0;\ \phi \in R(G_0)).$$

De façon analogue, on considère l'action régulière droite r de G_0 dans $R(G_0)$ définie par

$$(r(k)\phi)(m) = \phi(mk) \ \ (k, m \in G_0;\ \phi \in R(G_0)).$$

Il est clair que, pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$, $R(G_0)_\gamma$ est un sous-espace stable de $R(G_0)$ par rapport aux deux actions. On en déduit que l et r induisent des représentations de $\mathfrak{g}_0$ dans $R(G_0)$, que l'on note aussi l et r. Pour chaque $X \in \mathfrak{g}_0$, les fonctions

$$l(X), r(X) : R(G_0) \longrightarrow R(G_0)$$

sont des dérivations et $l(X)$ et $r(X)$ commutent.

Considérons $R(G_0)$ comme un $\mathfrak{g}_0$-module par rapport à l'action régulière gauche. Si pour chaque $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$ on considère l'action de $\mathfrak{g}_0$ dans $E_\gamma^* \otimes E_\gamma$ induite par l'action naturelle dans E_γ^* et par l'action triviale dans E_γ, on voit alors que (9) est un isomorphisme de $\mathfrak{g}_0$-modules. De façon analogue, si on considère $R(G_0)$ comme un $\mathfrak{g}_0$-module par rapport à l'action régulière droite et si pour chaque $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$ on considère l'action de $\mathfrak{g}_0$ dans $E_\gamma^* \otimes E_\gamma$ induite par l'action triviale dans E_γ^* et par l'action naturelle dans E_γ, alors (9) est aussi un isomorphisme de $\mathfrak{g}_0$-modules.

La multiplication dans G_0 fait de $R(G_0)$ une algèbre de Hopf. Soit $f \in R(G_0)$. Alors il existe un unique élément de $\Delta(f) = \sum a_i \otimes b_i \in R(G_0) \otimes R(G_0)$ tel que l'on ait $f(hk) = \sum a_i(h)b_i(k)$ pour tout h et k dans G_0.

On note $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ le dual de $R(G_0)$; c'est aussi une algèbre de Hopf par dualité. On note $*$ le produit dans $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$; c'est le produit de convolution. Si $k \in G_0$, on note $\delta_k \in \hat{\mathcal{M}}(G_0)$ l'évaluation en k. Remarquons que si $k, h \in G_0$, alors $\delta_k * \delta_h = \delta_{kh}$ et que δ_1 est l'unité de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$. Si $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$, on note encore u l'élément de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ définit par la formule $\langle u, \phi_{\alpha,\mathbf{v}} \rangle = \phi_{\alpha,u\mathbf{v}}(1) = \alpha(u\mathbf{v})$. Ceci permet de considérer $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ comme une sous-algèbre de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$.

On note encore r et l les représentations régulières droite et gauche de G_0 ou $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$ dans $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ obtenues par dualité. On a par exemple pour $m \in \hat{\mathcal{M}}(G_0)$ et $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$, $l(u)m = u * m$ et $r(u)m = m * \check{u}$ où $u \mapsto \check{u}$ est l'antiautomorphisme principal de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$.

Par dualité, la multiplication dans $R(G_0)$ fait de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ un $R(G_0)$-module. Par exemple, pour $f \in R(G_0)$ et $k \in G_0$, on a $f\delta_k = f(k)\delta_k$. La multiplication induit un morphisme de $R(G_0) \otimes \hat{\mathcal{M}}(G_0)$ dans $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ respectant les représentations régulières l et r.

On note :

$$\mathcal{M}(G_0) = \left\{\psi \in \hat{\mathcal{M}}(G_0) : \#\{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge : \psi(R(G_0)_\gamma) \neq \{0\}\} < \infty\right\}.$$

C'est un idéal de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$, stable par la multiplication par $R(G_0)$.

On note μ l'élément de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ tel que, si $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$, $\alpha \in E_\gamma^*$ et $\mathbf{v} \in E_\gamma$,

$$\mu(\phi_{\alpha,\mathbf{v}}) = \begin{cases} \alpha(\mathbf{v}) & \text{si } \gamma \text{ est triviale} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'élément μ appartient à $\mathcal{M}(G_0)$ et c'est, à une constante près, l'unique élément invariant à gauche de $\mathcal{M}(G_0)$. L'application $f \mapsto f\mu$ est un isomorphisme de $R(G_0)$ sur $\mathcal{M}(G_0)$ respectant la structure de modules sur $R(G_0)$ et les représentations régulières l et r.

Soit $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$. Notons, pour tout $\mathfrak{g}_0$-module V, V_γ le sous-espace des vecteurs de type γ, et $V/I_\gamma V$ le plus grand quotient de type γ. Lorsque V est somme directe de modules simples de dimension finie, l'application naturelle de V_γ dans $V/I_\gamma V$ est un isomorphisme. Ceci est conforme à la notation employée plus haut pour $R(G_0)_{\gamma^*}$ qui est le sous-espace des éléments de $R(G_0)$ qui sont de type γ^* pour la représentation régulière l, où γ^* est la représentation contragrédiente de γ.

Notons encore $\mathcal{M}(G_0)_\gamma$ le sous-espace des éléments de $\mathcal{M}(G_0)$ qui sont de type γ pour la représentation régulière l. L'application de restriction à $R(G_0)_{\gamma^*}$ induit un homomorphisme surjectif d'algèbres de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ sur l'espace $\mathcal{M}(G_0)_\gamma$. Par exemple, si $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$, l'image u_γ de u vérifie $\langle u_\gamma, \phi_{\alpha,\mathbf{v}} \rangle = \phi_{\alpha,u\mathbf{v}}$ pour tout $\alpha \in E_\gamma^*$ et tout $\mathbf{v} \in E\gamma$. L'application $u \mapsto u_\gamma$ induit par passage au quotient un isomorphisme d'algèbres et de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$-module à gauche et à droite de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)/I_\gamma$ sur $\mathcal{M}(G_0)_\gamma$. Nous notons (conformément aux notations ci-dessus) 1_γ l'élément unité de $\mathcal{M}(G_0)_\gamma$.

Par construction, l'algèbre $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ est isomorphe au produit $\prod_\gamma \mathcal{M}(G_0)_\gamma$. L'espace $\mathcal{M}(G_0)_\gamma$ est un idéal de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$, et l'algèbre $\mathcal{M}(G_0)$ est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_\gamma \mathcal{M}(G_0)_\gamma$. Notons que $\mathcal{M}(G_0)$ n'a pas d'élément unité.

L'application $f \mapsto f\mu$ est un isomorphisme de $R(G_0)_\gamma$ sur $\mathcal{M}(G_0)_\gamma$ pour les représentations régulières droite et gauche. En particulier, il existe un élément $f_\gamma \in R(G_0)_\gamma$ tel que $1_\gamma = f_\gamma \mu$.

Nous allons étendre ces définitions au "supergroupe G" d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. La méthode suivie est analogue à celle qui est décrite en détail dans [16, ch. I] auquel nous renvoyons pour plus de précisions[9]. On pose

$$\hat{\mathcal{M}}(G) = \hat{\mathcal{M}}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}(G) = \mathcal{M}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}).$$

On note $m * u$ l'image de $m \otimes u \in \hat{\mathcal{M}}(G_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ dans $\hat{\mathcal{M}}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Soient $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $n \in \hat{\mathcal{M}}(G_0)$. Choisissons des éléments $u_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $f_j \in R(G_0)$ tels que l'on ait $\mathrm{Ad}(k^{-1})(u) = \sum f_j(k) u_j$ pour tout $k \in G_0$. On pose

$$u * n = \sum_j (f_j n) * u_j. \tag{10}$$

On démontre comme dans [16] qu'il existe une structure d'algèbre sur $\hat{\mathcal{M}}(G)$ telle que l'on ait $(m * u) * (n * v) = m * (u * n) * v$ pour tout $m, n \in \hat{\mathcal{M}}(G_0)$ et tout $u, v \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, où l'opération $u * n$ vient d'être définie, et les opérations $m*$ et $*v$ sont les opérations évidentes.

Puisque $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est libre de rang fini comme module à gauche sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$, l'application $m \mapsto m * 1$ est une injection de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ dans $\hat{\mathcal{M}}(G)$, et $\hat{\mathcal{M}}(G)$ est libre de rang fini comme module à gauche sur $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$. Il est aussi libre de rang fini comme module à droite. En effet, on démontre comme dans [16] que l'application $(u, m) \mapsto u * m$ induit un isomorphisme $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \hat{\mathcal{M}}(G_0) \simeq \hat{\mathcal{M}}(G)$.

Le sous-espace $\mathcal{M}(G)$ est un idéal de $\hat{\mathcal{M}}(G)$ qui contient $\mathcal{M}(G_0)$ comme sous-algèbre. Pour tout $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$, on note encore 1_γ l'élément correspondant de $\mathcal{M}(G)$. L'application $u \mapsto u1_\gamma$ induit un isomorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})I_\gamma$ sur le sous-$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module à gauche $\mathcal{U}(\mathfrak{g})1_\gamma$ de $\mathcal{M}(G)$. De même, l'application $u \mapsto 1_\gamma u$ induit un isomorphisme de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\gamma\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ sur le sous-$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module à droite $1_\gamma\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ de $\mathcal{M}(G)$.

On a donc des isomorphismes $\mathcal{M}(G) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})I_\gamma$ et $\mathcal{M}(G) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\gamma\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. L'isomorphisme

$$\bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})I_\gamma \simeq \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\gamma\mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

qui en résulte peut être calculé grâce à la formule (10). Plus explicitement, soient $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $n \in \mathcal{M}(G_0) = \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)/I_\gamma$. Nous utilisons les notations u_j et f_j de la formule (10). L'isomorphisme cherché envoie $un \in \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/\mathcal{U}(\mathfrak{g})I_\gamma$ sur $\sum_j (f_j n) u_j \in \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} \mathcal{U}(\mathfrak{g})/I_\gamma\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

De manière duale on pose

$$R(G) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), R(G_0)).$$

Rendons explicites les structures de $\mathfrak{g}_0$-modules utilisées : un élément ψ de l'espace $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), R(G_0))$ appartient à $R(G)$ s'il vérifie $\psi(uX) = r(X)(\psi(u))$ pour tout

[9] En fait ici la situation est plus simple que dans [16] car $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est de type fini comme module sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$.

$u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $X \in \mathfrak{g}_0$. Les espaces $R(G)$ et $\hat{\mathcal{M}}(G)$ sont en dualité par la formule $\langle \psi, m * u \rangle = \langle \psi(u), m \rangle$. Par dualité $R(G)$ est munie d'une structure d'algèbre de Hopf; en particulier, c'est une algèbre supercommutative. On considère $R(G)$ comme l'algèbre des fonctions sur le "supergroupe G".[10] L'application $\psi \mapsto \psi(1)$ est un homomorphisme surjectif de $R(G)$ sur $R(G_0)$ que l'on considère comme l'application de restriction au "sous-supergroupe G_0". Dans ces conditions, si $\psi \in R(G)$, l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}(\mathcal{U}(\mathfrak{g}), R(G_0))$ s'interprète comme l'application qui à $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ associe la restriction de $r(u)\psi$ à G_0.

On note $\mathcal{HC}$ la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules qui sont $\mathfrak{g}_0$-finis et $\mathfrak{h}$-semi-simples (ce sont les modules d'Harish-Chandra). En d'autres termes, c'est la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules dont la restriction à $\mathfrak{g}_0$ est somme directe de modules simples de dimension finie. On notera que les éléments de $\mathcal{HC}$ de type fini sont exactement les $\mathfrak{g}$-modules de dimension finie $\mathfrak{h}$-semi-simples. En particulier, $\mathcal{HC}$ contient tous les $\mathfrak{g}$-modules simples de dimension finie. Pour les représentations régulières l et r, les modules $R(G)$ et $\mathcal{M}(G)$ (qui sont isomorphes) sont dans $\mathcal{HC}$.

On pose, pour chaque $\mathfrak{g}$-module V :

$$\hat{\mathcal{L}}_0(V) = \hat{\mathcal{M}}(G) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} V \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_0(V) = \mathcal{M}(G) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} V.$$

Les foncteurs $\mathcal{L}_0$ et $\hat{\mathcal{L}}_0$ vont de la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules dans celle des $\hat{\mathcal{M}}(G)$-modules et sont exacts à droite. Comme $\mathcal{M}(G)$ est dans la catégorie $\mathcal{HC}$, on peut aussi considérer que le foncteur $\mathcal{L}_0$ va de la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules dans la catégorie $\mathcal{HC}$.

Il résulte des définitions de $\hat{\mathcal{M}}(G)$ et $\mathcal{M}(G)$ que l'on a

$$\hat{\mathcal{L}}_0(V) \simeq \hat{\mathcal{M}}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} V \tag{11}$$

et

$$\mathcal{L}_0(V) \simeq \mathcal{M}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} V. \tag{12}$$

Ces formules permettent l'étude de la structure de $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$-module de ces modules. Soit $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$; comme l'algèbre $\mathcal{M}(G_0)_\gamma \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)/\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)I_\gamma$ est facteur direct dans $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$, le sous-$\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)$-module $\mathcal{M}(G_0)_\gamma \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} V$ est facteur direct dans $\hat{\mathcal{L}}_0(V)$ et $\mathcal{L}_0(V)$. On obtient le lemme suivant :

Lemme 4.1. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module.*

1. *Soit $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$. L'application $v \mapsto 1_\gamma * v$ de V dans $\mathcal{L}_0(V)$ induit des isomorphismes $V/I_\gamma V \simeq \mathcal{L}_0(V)_\gamma \simeq \hat{\mathcal{L}}_0(V)_\gamma$.*

2. *On a $\mathcal{L}_0(V) \simeq \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} V/I_\gamma V$.*

3. *Il y a une injection naturelle de $\hat{\mathcal{L}}_0(V)$ dans $\prod_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} V/I_\gamma V$, et l'application $\mathcal{L}_0(V) \to \hat{\mathcal{L}}_0(V)$ s'identifie à l'injection $\bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} V/I_\gamma V \to \prod_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} V/I_\gamma V$.*

On en déduit le corollaire suivant :

[10] Cf. [17] pour la définition.

Corollaire 4.2. *Si V appartient à $\mathcal{HC}$, les $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-modules V, $\mathcal{L}_0(V)$ et $\hat{\mathcal{L}}_0(V)$ sont isomorphes.*

Remarquons que l'isomorphisme $V \to \hat{\mathcal{L}}_0(V)$ du corollaire 4.2 est l'application naturelle de V dans $\hat{\mathcal{L}}_0(V)$ déduite de l'application $v \mapsto 1 \otimes v$ de V dans $\hat{\mathcal{M}}(G) \otimes V$. Comme $\mathcal{M}(G)$ n'a pas d'élément unité, l'isomorphisme $V \to \hat{\mathcal{L}}_0(V)$ est un peu moins simple à décrire. Il est obtenu de la manière suivante : si $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$ et $v \in V_\gamma$, alors l'image de v est $1_\gamma * v$.

Proposition 4.3. *On suppose que $\mathcal{L}_0(V)_\gamma$ est nul, sauf pour un nombre fini de $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$.*[11] *Alors $\mathcal{L}_0(V)$ est le plus grand quotient de V qui soit dans la catégorie $\mathcal{HC}$. En d'autres termes, il existe un morphisme surjectif τ, unique, de V dans $\mathcal{L}_0(V)$ tel que tout morphisme de V dans un module W de la catégorie $\mathcal{HC}$ se factorise à travers τ.*

Démonstration. L'hypothèse implique que l'application naturelle de V dans $\hat{\mathcal{L}}_0(V)$ est surjective, et que l'injection naturelle de $\mathcal{L}_0(V)$ dans $\hat{\mathcal{L}}_0(V)$ est un isomorphisme. On obtient donc une surjection τ de V dans $\mathcal{L}_0(V)$. Notons que pour chaque $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$ la projection de $\tau(v)$ sur $\mathcal{L}_0(V)_\gamma$ se déduit de l'application qui à $v \in V$ associe $1_\gamma * v$. Donc on a $\tau(v) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} 1_\gamma * v$, et la somme est finie par hypothèse. L'application τ répond à la question. ■

Soit V un $\mathfrak{g}$-module. On pose $V^f = \bigoplus_{\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge} V_\gamma$. C'est un $\mathfrak{g}$-module, et c'est le plus grand sous-module de V dans la catégorie $\mathcal{HC}$. On pose

$$\Gamma^0(V) = (R(G) \otimes V)^{\mathfrak{g}}$$

où les invariants sont ceux de la représentation $r \otimes \theta$, en notant θ la représentation dans V. Compte-tenu de la définition de $\mathcal{M}(G)$, $\Gamma^0(V)$ s'identifie aux applications linéaires ψ de rang fini de $\hat{\mathcal{M}}(G)$ dans V telles que l'on ait $\psi(m * u)v = \psi(m)(uv)$ pour tout $m \in \hat{\mathcal{M}}(G)$, $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $v \in V$.

L'application de restriction de $\hat{\mathcal{M}}(G)$ à $\hat{\mathcal{M}}(G_0)$ induit un isomorphisme

$$\Gamma^0(V) \simeq (R(G_0) \otimes V)^{\mathfrak{g}_0}$$

de sorte que l'on peut considérer $\Gamma^0(V)$ au choix comme un espace de fonctions sur G_0 à valeurs dans V, ou un espace de "fonctions sur G" à valeurs dans V. L'isomorphisme entre ces deux espaces est la restriction à G_0; plus explicitement, par restriction aux éléments de la forme δ_k avec $k \in G_0$, on voit que l'on peut considérér $\Gamma^0(V)$ comme un espace de fonctions ψ sur G_0 à valeurs dans V. Ecrivons l'action d'un élément $X \in \mathfrak{g}$ dans $\Gamma^0(V)$ dans cette réalisation et soit $\psi \in \Gamma^0(V)$. Pour tout $k \in G_0$ on a $(X\psi)(k) = \langle X\psi, \delta_k \rangle = \langle \psi, -X * \delta_k \rangle = \langle \psi, -\delta_k * \mathrm{Ad}(k^{-1})(X) \rangle$ d'après la formule (10), et donc $(X\psi)(k) = \mathrm{Ad}(k^{-1})(X)\,(\psi(k))$. De même, pour tout $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, on a

$$(u\psi)(k) = \mathrm{Ad}(k^{-1})(u)\,(\psi(k)).$$

[11] C'est le cas par exemple si $\mathcal{L}_0(V)$ est de dimension finie

En considérant la restriction à $1 \in G_0$, on obtient un isomorphisme $\Gamma^0(V) \simeq V^f$ et donc $\Gamma^0(V)$ est isomorphe au plus grand sous-module de V qui est dans la catégorie $\mathcal{HC}$.

Soit V un $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$-module. Nous noterons θ l'action de $\mathfrak{g}$ dans V. On pose

$$\mathcal{M}(G_0, V) = \mathcal{M}(G_0) \otimes V \quad \text{et} \quad R(G_0, V) = R(G_0) \otimes V.$$

On munit ces deux modules de la structure de $\mathfrak{g}_0$-module $r \otimes \theta$. Les formules (11) et (12) signifient que l'on a des isomorphismes $H_0(\mathfrak{g}_0, \mathcal{M}(G_0, V)) \simeq \mathcal{L}_0(V)$ et $H^0(\mathfrak{g}_0, R(G_0, V)) \simeq \Gamma^0(V)$. La représentation régulière l induit la structure de $\mathfrak{g}_0$-module de $\mathcal{L}_0(V)$ et $\Gamma^0(V)$.

Montrons comment induire la structure de $\mathfrak{g}$-module. Soit $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et choisissons comme plus haut des éléments $u_j \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et $f_j \in R(G_0)$ tels que l'on ait $\mathrm{Ad}(k^{-1})(u) = \sum f_j(k) u_j$ pour tout $k \in G_0$. Soit $m \otimes v \in \mathcal{M}(G_0, V)$. On pose

$$\tilde{l}(u)(m \otimes v) = \sum_j (f_j m) \otimes u_j v.$$

Par exemple, si $k \in G_0$ et $m = \delta_k$, on a $\tilde{l}(u)(\delta_k \otimes v) = \delta_k \otimes \mathrm{Ad}(k^{-1})(u) v$. De manière duale on pose, pour $\psi \in R(G_0, V)$

$$(\tilde{l}(u)\psi)(k) = \mathrm{Ad}(k^{-1})(u)\,(\psi(k)).$$

On démontre (cf. [5] ou [16]) que $\tilde{l}$ est une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}(G_0, V)$ (resp. $R(G_0, V)$) commutant à la représentation $r \otimes \theta$.

On remarquera que, pour $X \in \mathfrak{g}_0$, les endomorphismes $l(X)$ et $\tilde{l}(X)$ de $\mathcal{M}(G_0, V)$ (resp. $R(G_0, V)$) sont tous deux définis. Ils ne sont pas en général égaux, mais ils induisent la même action dans $\mathcal{L}_0(V)$ (resp. $\Gamma^0(V)$). Plus généralement, si $X \in \mathfrak{g}$, l'action induite par $\tilde{l}(X)$ dans $\mathcal{L}_0(V)$ (resp. $\Gamma^0(V)$) redonne la structure de $\mathfrak{g}$-module définie plus haut.

Soit $\mathfrak{s}_0$ une sous-algèbre réductive de $\mathfrak{g}_0$ contenant $\mathfrak{h}$. On note $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules qui sont $\mathfrak{s}_0$-finis et $\mathfrak{h}$-semi-simples. En d'autres termes, c'est la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules dont la restriction à $\mathfrak{s}_0$ est somme directe de modules simples de dimension finie. Notons S_0 le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_0$. Les modules de la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ sont parfois appelés des $(\mathfrak{g}, S_0)$-modules. Nous considérons Γ^0 comme un foncteur exact à gauche de $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ dans $\mathcal{HC}$, et $\mathcal{L}_0$ comme un foncteur exact à droite. Pour tout entier i, on note $\Gamma^i_{\mathfrak{s}_0}(\cdot)$ et $\mathcal{L}_i^{\mathfrak{s}_0}(\cdot)$ les foncteurs dérivés (ils sont nuls par convention si $i < 0$). Pour simplifier les notations, on ommettra $\mathfrak{s}_0$ de la notation lorsque cela ne crée pas de confusion.

Soit V un $\mathfrak{g}$-module; on note toujours θ l'action de $\mathfrak{g}$. Considérons, pour tout entier i, le module

$$H_i\,(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G_0, V)).$$

L'homologie relative est calculée pour l'action $r \otimes \theta$, et $\tilde{l}$ induit une structure de $\mathfrak{g}$-module dans $H_i\,(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G_0, V))$.

Proposition 4.4. *Soit V un module de la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$. Les $\mathfrak{g}$-modules $\mathcal{L}_i(V)$ et $H_i\,(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G_0, V))$ sont isomorphes.*

Démonstration. Remarquons que si $W \in \mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$, alors le foncteur $\cdot \otimes W$ de $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ dans $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ est un foncteur exact; en plus, si $V \in \mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ est un module projectif, alors $V \otimes W$ est aussi projectif (cf. [16, §II.3]). Soit

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow V \longrightarrow \{0\}$$

une résolution projective du $\mathfrak{g}$-module V (dans la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$). Alors

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{M}(G_0, P_2) \longrightarrow \mathcal{M}(G_0, P_1) \longrightarrow \mathcal{M}(G_0, P_0) \longrightarrow \mathcal{M}(G_0, V) \longrightarrow \{0\}$$

est une résolution projective du $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{M}(G_0, V)$. Puisque la restriction à $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ du foncteur $H_i(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; \cdot)$ est le i-ème foncteur dérivé de la restriction à $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ du foncteur $\cdot \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathbb{C}$ (cf. [16, §II.6]), on voit que $H_i(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G_0, V))$ est isomorphe à l'i-ème groupe d'homologie du complexe

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{L}_0(P_2) \longrightarrow \mathcal{L}_0(P_1) \longrightarrow \mathcal{L}_0(P_0)$$

et donc isomorphe à $\mathcal{L}_i(V)$. ∎

De même, $\tilde{l}$ induit dans $H^i(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; R(G_0, V))$ une structure de $\mathfrak{g}$-module et on a un isomorphisme fonctoriel $H^i(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; R(G_0, V)) \simeq \Gamma^i(V)$ pour tout module V de $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$.

Nous passons en revue quelques propriétés générales utiles des foncteurs $\mathcal{L}_i(\cdot)$ et $\Gamma^i(\cdot)$. On note V un module de la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$.

Proposition 4.5. *Soit I l'annulateur de V dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Alors I annule les modules $\mathcal{L}_i(V)$ et $\Gamma^i(V)$.*

Démonstration. Soit $u \in I$. Pour tout $k \in G_0$, on a $\mathrm{Ad}(k)(u) \in I$, de sorte que l'on a $\tilde{l}(u) = 0$ dans $\mathcal{M}(G_0, V)$ et $R(G_0, V)$. ∎

Soit $\gamma \in \mathfrak{g}_0^\wedge$. On a $\mathcal{L}_i(V)_\gamma \simeq E_\gamma \otimes H_i\left(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; E_\gamma^* \otimes V\right)$ et $\Gamma^i(V)_\gamma \simeq E_\gamma \otimes H^i\left(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{s}_0; E_\gamma^* \otimes V\right)$. Si W est un module de la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ (resp. $\mathcal{HC}$), on note W^c le sous-espace du dual formé des vecteurs $\mathfrak{s}_0$-finis (resp. $\mathfrak{g}_0$-finis). Ils sont automatiquement $\mathfrak{h}$-semi-simples et le module W^c est encore dans la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ (resp. $\mathcal{HC}$). Il résulte des formules qui précèdent que le dual de $\mathcal{L}_i(V)_\gamma$ est $\Gamma^i(V^c)_{\gamma^*}$. On a donc (cf. [16, §III.1]) :

Proposition 4.6. *Les modules $\Gamma^i(V^c)$ et $\mathcal{L}_i(V)^c$ sont isomorphes.*

Signalons un cas particulièrement utile dans la suite.

Proposition 4.7. *Si la dimension de $\mathcal{L}_i(V)$ est finie, alors le dual de $\mathcal{L}_i(V)$ est isomorphe à $\Gamma^i(V^c)$.*

On pose $N = 2n = \dim \mathfrak{g}_0/\mathfrak{s}_0$. Puisque $\mathfrak{s}_0$ contient $\mathfrak{h}$, n est un entier. Soient V et W des modules de la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$, et soit $(.,.)$ une forme les mettant en dualité. Une variante de la dualité de Poincaré (cf. [5], [16]) produit une forme $(.,.)$ mettant en dualité les modules $\Gamma^i(V)$ et $\Gamma^{N-i}(W)$. Elle dépend du choix d'un élément non nul $\kappa \in \bigwedge^N(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{s}_0)$. Fixons κ et soient $\omega \otimes \psi \otimes v$

représentant[12] un élément de $U \in \Gamma^i(V)$ et $\omega' \otimes \psi' \otimes w$ représentant un élément de $V \in \Gamma^{N-i}(W)$, avec $v \in V$, $w \in W$, $\psi \in R(G_0)$, $\psi' \in R(G_0)$, $\omega \in \bigwedge^i(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{s}_0)^*$ et $\omega' \in \bigwedge^{N-i}(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{s}_0)^*$. La dualité est donnée par la formule

$$(U,V) = \pm\langle \omega \wedge \omega', \kappa\rangle\langle \mu, \psi\psi'\rangle(v,w), \tag{13}$$

où le signe est déterminé par la règle des signes. Appliquons ceci à $W = V^c$. La dualité de Poincaré pour les foncteurs de Zuckerman peut s'exprimer de la manière suivante (cf. [16, p. 185])

Proposition 4.8. *La formule (13) induit un isomorphisme entre $\mathcal{L}_i(V)$ et $\Gamma^{N-i}(V)$. En particulier, les modules $\mathcal{L}_n(V)$ et $\Gamma^n(V)$ sont isomorphes.*

Soit Ψ un sous-ensemble parabolique de Δ (cf. définition 1.12) et soient $\mathfrak{u}^{\pm}$, $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{p}$ les sous-algèbres de $\mathfrak{g}$ définies par la définition 2.1. Soit E un $\mathfrak{s}$-module de dimension finie $\mathfrak{h}$-semi-simple. Il est clair que le $\mathfrak{g}$-module $M(E) = M(\mathfrak{p}, E)$ est $\mathfrak{h}$-semi-simple et que, comme $\mathfrak{s}_0$-module, il est somme directe de ses sous-modules irréductibles de dimension finie. Il est donc dans la catégorie $\mathcal{HC}(\mathfrak{s}_0)$ et les modules $\mathcal{L}_i(M(E))$ et $\Gamma^i(M(E))$ sont définis. On va donner une autre construction des modules $\mathcal{L}_i(M(E))$. Considérons l'espace $\mathcal{M}(G) \otimes E$ et notons θ la représentation de $\mathfrak{p}$ dans E. On considère la représentation $r \otimes \theta$ de $\mathfrak{p}$ dans $\mathcal{M}(G) \otimes E$. Elle commute à la représentation l de $\mathcal{M}(G)$ dans $\mathcal{M}(G) \otimes E$. Les espaces de cohomologie relative $H_i(\mathfrak{p}, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G) \otimes E)$ sont bien définis, et sont des modules dans la catégorie $\mathcal{HC}$. Ils sont duaux des foncteurs considérés par I. Penkov dans [19] en termes de géométrie sur les supervariétés de drapeaux. La proposition suivante est une adaptation d'un résultat non publié de Michel Duflo et Michèle Vergne.

Proposition 4.9. *Si E est un $\mathfrak{s}$-module de dimension finie $\mathfrak{h}$-semi-simple, alors le $\mathfrak{g}$-module*

$$\mathcal{L}_i(M(E)) \tag{14}$$

est isomorphe au $\mathfrak{g}$-module

$$H_i(\mathfrak{p}, \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G) \otimes E). \tag{15}$$

Démonstration. On considère l'espace $\mathcal{M}(G_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E$ comme un bimodule pour $\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{p}$. L'action de $\mathfrak{g}_0$ est produit tensoriel de la représentation r dans $\mathcal{M}(G_0)$ et l dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. L'action de $\mathfrak{p}$ est produit tensoriel de la représentation r dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ et θ dans E. Enfin, on définit comme plus haut une action $\tilde{l}$ de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{M}(G_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E$ qui commute aux actions précédentes. On peut donc définir les $\mathfrak{g}$-modules

$$H_i(\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{p}, \mathfrak{s}_0 \times \mathfrak{s}_0; \mathcal{M}(G_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E). \tag{16}$$

Remarquons que l'on a

$$\mathcal{M}(G_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} E = \mathcal{M}(G_0) \otimes M(E)$$

[12] Il faudrait en fait écrire des combinaisons linéaires.

et

$$\mathcal{M}(G_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{s}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E = \mathcal{M}(G) \otimes E.$$

On va appliquer la proposition 3.3 pour démontrer que (14) et (16) sont isomorphes; on démontre de façon analogue que (15) et (16) sont isomorphes.

Fixons $j > 0$ et $p \in \mathbb{N}$. Il faut démontrer que

$$H_j\left(\mathfrak{p}, \mathfrak{s}_0; \bigwedge^p(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{s}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{s}_0)} (\mathcal{M}(G_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E)\right) = \{0\}.$$

Ceci résulte de l'assertion suivante :

Si F est un $\mathfrak{s}_0$-module (à droite) somme directe de modules simples de dimension finie, alors le $\mathfrak{p}$-module (à droite) $F \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{s}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{p})$ est projectif dans la catégorie des $\mathfrak{p}$-modules dont la restriction à $\mathfrak{s}_0$ est somme directe de modules simples de dimension finie. On a donc :

$$H_j\left(\mathfrak{p}, \mathfrak{s}_0; F \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{s}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{p})\right) = 0$$

pour tout $j > 0$. Comme le $\mathfrak{p}$-module $\bigwedge^p(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{s}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{s}_0)} (\mathcal{M}(G_0) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes E)$ admet une filtration par des modules de ce type, le résultat s'en déduit (cf. [7, §A.3] ou [16, §D.1]). ■

On a $n = \dim(\mathfrak{u}_0^+)$. Rappelons que n est égal à $\frac{1}{2}\dim(\mathfrak{g}_0/\mathfrak{s}_0) = N/2$ et à $\dim(\mathfrak{p}_0/\mathfrak{s}_0)$.

Proposition 4.10. *Soit E un $\mathfrak{s}$-module $\mathfrak{h}$-semi-simple de dimension finie.*

1. *Les modules $\mathcal{L}_i(M(E))$ sont de dimension finie.*
2. *Les modules $\mathcal{L}_i(M(E))$ sont nuls si $i > n$.*
3. *Le module $\mathcal{L}_0(M(E))$ est le plus grand quotient de dimension finie de $M(E)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.6, on sait que le $\mathfrak{g}_0$-module $M(E)$ admet une filtration de longueur finie par des $\mathfrak{g}_0$-modules $M(\mathfrak{p}_0, V)$, où V est un $\mathfrak{p}_0$-module de dimension finie somme directe de $\mathfrak{s}_0$-modules simples, et où on a posé $M(\mathfrak{p}_0, V) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_0)} V$. En filtrant V, on peut même supposer que V est un $\mathfrak{s}_0$-module simple. En considérant des suites exactes longues, on est ramené à montrer les assertions analogues analogues à 1 et 2 pour les $\mathfrak{g}_0$-modules $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{p}_0, V))$. Ce cas est bien connu (cf. [16, §IV.11]).

La dernière assertion résulte de la première et de la proposition 4.3. ■

Comme dans [16, §V.7], on peut dans certains cas obtenir un résultat complet d'annulation.

Proposition 4.11. *Soit E un $\mathfrak{s}$-module simple de dimension finie. Si $M(E)$ est irréductible, on a :*

1. *Le module $\mathcal{L}_i(M(E))$ est réduit à $\{0\}$ si $i \neq n$.*
2. *Le module $\mathcal{L}_n(M(E))$ admet une forme bilinéaire σ-invariante et non-dégénérée.*

Démonstration. D'après la proposition 2.5, E et $M(E)$ admettent une forme bilinéaire paire, symétrique, σ-invariante et non-dégénérée. La proposition 4.8 dit alors qu'il existe une application bilinéaire non-dégénérée

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{L}_i(M(E)) \times \mathcal{L}_{2n-i}(M(E)) \longrightarrow \mathbb{C}.$$

D'après la proposition 4.10, $\mathcal{L}_i(V) = \{0\}$ pour $i > n$; on en déduit la première assertion de l'énoncé. La deuxième assertion résulte aussi de la proposition 4.8. ■

Remarquons que, sous les hypothèses de la proposition 4.11, il peut arriver que le module $\mathcal{L}_n(M(E))$ soit nul. Lorsqu'il n'est pas nul, on peut se demander si le module $\mathcal{L}_n(M(E))$ est simple. Nous verrons plus loin que c'est le cas lorsque $\mathfrak{p}$ est une algèbre de Borel. L'existence de la forme bilinéaire non dégénérée sur $\mathcal{L}_n(M(E))$ est un élément essentiel de la preuve.

5. Principe d'Euler

Soient Ψ un sous-ensemble parabolique de Δ et Ω un sous-ensemble borélien de Ψ. Pour chaque $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{L}_j(M(E))$ le $\mathfrak{g}$-module $\mathcal{L}_j^{\mathfrak{s}_0}(M(\mathfrak{p}, E))$. Dans cette section on calcule la somme alternée

$$\sum_{j\geq 0}(-1)^j \operatorname{sch}\left(\mathcal{L}_j(M(E))\right). \tag{17}$$

Remarquons que cette expression a un sens car, d'après la proposition 4.10, la dimension de chaque $\mathcal{L}_j(M(E))$ est finie.

Nous commençons par rappeler quelques formules concernant les problèmes analogues pour les algèbres de Lie semi-simples. On note W le groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h})$ et on note $W_0 \subset W$ le groupe de Weyl de $(\mathfrak{s}_0, \mathfrak{h})$.

Si V est un $\mathfrak{p}_0$-module, on considère le $\mathfrak{g}_0$-module

$$M(\mathfrak{p}_0, V) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p}_0)} V.$$

Supposons V de dimension finie et $\mathfrak{h}$-semi-simple. Les $\mathfrak{g}_0$-modules $\mathcal{L}_j^{\mathfrak{s}_0}(M(\mathfrak{p}_0, V))$ sont définis et de dimension finie; on les note $\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{p}_0, V))$. Notons $\Delta^+(\mathfrak{s}_0)$ l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{s}_0$ et $\rho_{\mathfrak{s}_0}$ la demi-somme correspondante. Posons

$$\tilde{\chi}(V) = \left(\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{s}_0)} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})\right) \operatorname{ch}(V).$$

Par exemple, si V est simple, il est encore simple comme $\mathfrak{s}_0$-module. Si l'on note λ son poids dominant par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{s}_0)$, on a

$$\tilde{\chi}(V) = \sum_{w\in W_0} \det(w) e^{w(\lambda+\rho_{\mathfrak{s}_0})} \tag{18}$$

d'après la formule de Weyl.

Proposition 5.1. *On suppose que les poids de V sont dans le réseau Q. On a*

$$\sum_j (-1)^j \mathrm{ch}\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{p}_0,V)) = \frac{\sum_{w\in W/W_0} \det(w) w(\tilde{\chi}(V) e^{\rho_0-\rho_{\mathfrak{s}_0}})}{\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_0)} (e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}.$$

Remarquons que la formule ci-dessus a un sens car $\det(w)w(\tilde{\chi}(V)e^{\rho_0-\rho_{\mathfrak{s}_0}})$ ne dépend que de la classe de w modulo W_0.

Démonstration. Le $\mathfrak{p}_0$-module V admet une filtration finie par des sous-$\mathfrak{p}_0$-modules telle que le gradué associé soit formé de modules simples. D'après le principe d'Euler-Poincaré, on peut supposer que V est simple, ce que nous faisons. Soit $\lambda \in Q$ son poids dominant par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{s}_0)$. Compte-tenu de la formule (18), la formule à démontrer devient

$$\sum_j (-1)^j \mathrm{ch}\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{p}_0,V)) = \frac{\sum_{w\in W} \det(w) e^{w(\lambda+\rho_0)}}{\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_0)} (e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}.$$

Ce résultat est connu; cf. [24, §6.5.2]. ■

Posons $\tilde{\chi}(E) = \left(\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{s}_0)}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})\right)\mathrm{sch}(E)$. Considérons l'espace $\mathfrak{u}_1^+$; il est stable par $\mathfrak{s}_0$. Comme il est totalement impair, l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{u}_1^+)$ est de dimension finie. Les racines de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{u}_1^+$ sont les éléments de $(\Psi\backslash-\Psi)\cap\Delta_1$, et elles ont la multiplicité 1. On a donc

$$\mathrm{sch}(S(\mathfrak{u}_1^+)) = \prod_{\alpha\in(\Psi\backslash-\Psi)\cap\Delta_1} (1+\epsilon e^{\alpha}). \tag{19}$$

Proposition 5.2. *On suppose que les poids de E sont dans le réseau Q. On a*

$$\sum_j (-1)^j \,\mathrm{sch}\,\mathcal{L}_j(M(E)) = \frac{\sum_{w\in W/W_0} \det(w) w\left(\tilde{\chi}(E) \prod_{\alpha\in(\Psi\backslash-\Psi)\cap\Delta_1} (1+\epsilon e^{-\alpha}) e^{\rho_0-\rho_{\mathfrak{s}_0}}\right)}{\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_0)} (e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}.$$

Démonstration. Le $\mathfrak{g}_0$-module $M(E)$ admet une filtration finie par des sous-$\mathfrak{g}_0$-modules telle que le gradué associé soit isomorphe à $M(\mathfrak{p}_0,V)$, où $V = S(\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0+\mathfrak{p}))\otimes E$. D'après le principe d'Euler-Poincaré, et compte-tenu de ce que la structure de $\mathfrak{g}_0$-supermodule des $\mathcal{L}_j(M(E))$ ne dépend que de la structure de $\mathfrak{g}_0$-supermodule de $M(E)$, on voit que l'on a $\sum_j(-1)^j\,\mathrm{sch}\,\mathcal{L}_j(M(E)) = \sum_j(-1)^j\,\mathrm{sch}\,\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{p}_0,V))$. La proposition 5.1 est encore valable avec des supercaractères de supermodules. La proposition 5.2 résulte donc de la formule :

$$\mathrm{sch}\,(S(\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0+\mathfrak{p}))\otimes E) = \left(\prod_{\alpha\in(\Psi\backslash-\Psi)\cap\Delta_1} (1+\epsilon e^{-\alpha})\right)\mathrm{sch}(E).$$

Comme $\mathfrak{g}/(\mathfrak{g}_0+\mathfrak{p})$ est isomorphe comme $\mathfrak{s}_0$-module à $\mathfrak{u}_1^-$, celle-ci résulte de la formule (19). ■

Soit $m = \dim \mathfrak{u}_0$. Lorsque le module $M(E)$ est irréductible, on sait, d'après la proposition 4.11, que $\mathcal{L}_j(M(E))$ est nul sauf pour $j = m$. On en déduit dans ce cas une formule pour le caractère du module $\mathcal{L}_m(M(E))$.

Proposition 5.3. *On suppose que les poids de E sont dans le réseau Q et que le module $M(E)$ est irréductible. On a*

$$\mathrm{sch}\,\mathcal{L}_m(M(E)) = (-1)^m \frac{\sum_{w\in W/W_0} \det(w)w\left(\tilde{\chi}(E) \prod_{\alpha\in(\Psi\setminus-\Psi)\cap\Delta_1}(1+\epsilon e^{-\alpha})e^{\rho_0-\rho_{\mathfrak{s}_0}}\right)}{\prod_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{g}_0)}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}.$$

Même lorsque E est de dimension 1, les conditions nécessaires et suffisantes d'irréductibilité de $M(E)$ ne sont pas connues en général. Pour des conditions "génériques" sur E, on peut établir des conditions suffisantes d'irréductibilité de $M(E)$ et de $\mathcal{L}_m(M(E))$ (cf. [16, ch. VIII] ou [24, §6.6]). On trouve alors des résultats voisins de I. Penkov et V. Serganova (cf. [20, p. 871]).

Soit Q l'ensemble des poids de $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{h})$. On note Q_{++} l'ensemble des poids Ω-dominants.[13] Pour chaque $\sigma \in Q_{++}$ on note E_σ le $\mathfrak{g}_0$-module simple de dimension finie de plus haut poids σ (par rapport à la relation d'ordre $\leq_\Omega$, qui a été définie après la démonstration de la proposition 1.15.). Soient $\sigma \in Q_{++}$ et V un $\mathfrak{g}_0$-supermodule. On note $m(\sigma, V) = \dim \hom_{\mathfrak{g}_0}(E_\sigma, V)$ la multiplicité de σ dans V, considérée comme un élément de $\mathbb{N} + \epsilon\mathbb{N}$. Comme les $\mathfrak{g}_0$-modules $\mathfrak{h}$-semi-simples sont semi-simples, les $m(\sigma, \mathcal{L}_j(M(E)))$ déterminent complètement la structure de $\mathfrak{g}_0$-module de $\mathcal{L}_j(M(E))$. Nous donnons une formule, pour tout $\sigma \in Q_{++}$, pour la somme alternée

$$N_\sigma = \sum_j (-1)^j m(\sigma, \mathcal{L}_j(M(E))) \in \mathbb{Z} + \epsilon\mathbb{Z}. \tag{20}$$

Les formules (17) et (20) sont reliées par la formule évidente

$$\sum_j (-1)^j \,\mathrm{sch}\,(\mathcal{L}_j(M(E))) = \sum_{\sigma\in Q_{++}} N_\sigma \mathrm{ch}\, E_\sigma.$$

Introduisons les notations suivantes : si $\gamma \in \mathfrak{s}_0^\wedge$ et F_γ est dans la classe γ, on note comme plus haut $m_\gamma = \dim \hom_{\mathfrak{s}_0}(F_\gamma, E) \in \mathbb{N} + \epsilon\mathbb{N}$ la multiplicité de F_γ dans E. On note $\Lambda_\gamma \in Q$ le plus haut poids de F_γ par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{s}_0)$.

Définition 5.4. *On note P_ϵ la fonction de $\mathfrak{h}^*$ à valeurs dans $\mathbb{Z}[\epsilon]/(\epsilon^2 - 1) = \mathbb{Z} + \epsilon\mathbb{Z}$ qui vérifie la propriété suivante :*

$$\forall_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} \prod_{\alpha\in(\Psi\setminus-\Psi)\cap\Delta_1} (1+\epsilon e^{\alpha}) = \sum_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} P_\epsilon(\lambda)e^\lambda.$$

On déduit de cette définition et de formule (19) que l'on a :

Lemme 5.5. *Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, alors $P_\epsilon(\lambda) = \dim(S(\mathfrak{u}_1^+)_\lambda)$.*

[13] L'ensemble Q_{++} dépend du choix de Ω.

Proposition 5.6. *On suppose que les poids de E sont dans le réseau Q. On a :*

$$N_\sigma = \sum_{\gamma \in \mathfrak{s}_0^\wedge} \sum_{w \in W} m_\gamma \det(w)\ P_\epsilon(\Lambda_\gamma + \rho_0 - w(\sigma + \rho_0)).$$

Démonstration. Soit Λ un élément de Q qui soit le poids dominant d'une représentation irréductible de $\mathfrak{s}_0$. Compte tenu de la formule de Weyl (pour $\mathfrak{s}_0$ et $\mathfrak{g}_0$) et de la proposition 5.2, il s'agit de démontrer que le coefficient de $e^{\lambda+\rho_0}$ dans l'expression

$$I = \sum_{w \in W/W_0} \det(w) w \left(\sum_{s \in W_0} \det(s) e^{s(\Lambda + \rho_{\mathfrak{s}_0})} \left(\sum_{\lambda \in Q} P_\epsilon(-\lambda) e^\lambda \right) e^{\rho_0 - \rho_{\mathfrak{s}_0}} \right)$$

est égal à $\sum_{w \in W} \det(w)\ P_\epsilon(\Lambda + \rho_0 - w(\sigma + \rho_0))$. En tenant compte de l'invariance de certains termes par s, on trouve

$$I = \sum_{w \in W/W_0} \det(w) w \left(\sum_{s \in W_0, \lambda \in Q} P_\epsilon(-\lambda) \det(s) e^{s(\Lambda + \rho_0 + \lambda)} \right)$$

et donc

$$I = \sum_{w \in W} \sum_{\lambda \in Q} P_\epsilon(-\lambda) \det(w) e^{w(\Lambda + \rho_0 + \lambda)}.$$

Changeons w en w^{-1} et λ en $-\lambda$. On a $I = \sum_{w \in W} \sum_{\lambda \in Q} P_\epsilon(\lambda) \det(w) e^{w^{-1}(\Lambda + \rho_0 - \lambda)}$. Comme $\sigma + \rho_0$ est régulier, pour chaque $w \in W$ il y a exactement un λ tel que $w^{-1}(\Lambda + \rho_0 - \lambda) = \sigma + \rho_0$. Il est égal à $\Lambda + \rho_0 - w(\sigma + \rho_0)$. Il contribue pour $\det(w) P_\epsilon(\Lambda + \rho_0 - w(\sigma + \rho_0))$ au coefficient de $e^{\sigma + \rho_0}$ dans I. Notre formule est donc établie. ■

Pour terminer cette section, nous explicitons la proposition 5.2 lorsque Ψ est un sous-ensemble borélien de Δ. On note $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Borel correspondante. Dans ce cas, on a $\mathfrak{s} = \mathfrak{h}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$; on va appliquer les résultats précédents à la représentation $E = \lambda - \rho_{\mathfrak{b}}$ de $\mathfrak{h}$.

Si $w \in W$, soit $\mu(w) \in \{1, \epsilon\}$ tel que

$$w \left(\prod_{\alpha \in \Psi_1} \left(e^{\alpha/2} + \epsilon e^{-\alpha/2} \right) \right) = \mu(w) \prod_{\alpha \in \Psi_1} \left(e^{\alpha/2} + \epsilon e^{-\alpha/2} \right).$$

La proposition 5.2 donne immédiatement la formule suivante :

Proposition 5.7. *On suppose que $\lambda - \rho_{\mathfrak{b}}$ est un poids. On a*

$$\sum_j (-1)^j \operatorname{sch} \mathcal{L}_j(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})) = \frac{\left(\sum_{w \in W} \det(w) \mu(w) e^{w(\lambda)} \right) \prod_{\alpha \in \Psi_1} (e^{\alpha/2} + \epsilon e^{-\alpha/2})}{\prod_{\alpha \in \Psi_0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}.$$

6. Irréductibilité de certaines représentations

Dans cette section, nous écrirons, pour tout $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{h}$-semi-simple V, $\mathcal{L}_i(V) = \mathcal{L}_i^{\mathfrak{h}}(V)$. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. On verra que si un poids de la forme $\lambda - \rho_{\mathfrak{b}}$ satisfait certaines conditions, alors on peut trouver un $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}}))$ soit irréductible et tel que, si $j \neq i$, alors $\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})) = \{0\}$.

Lemme 6.1. *Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On note*

$$\mathfrak{n}^0 = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{b})} \mathfrak{g}_\alpha.$$

On a

$$\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})) \simeq H_i\left(\mathfrak{n}^0, \mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g})\right)_{-\lambda+\rho_{\mathfrak{b}}}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})) \simeq \\
&\quad \simeq \; H_i\left(\mathfrak{b}, \mathfrak{h}; \mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho_{\mathfrak{b}}}\right) \text{ (d'après la proposition 4.9)} \\
&\quad \simeq \; H_i\left(\mathfrak{n}^0, \mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}_{\lambda-\rho_{\mathfrak{b}}}\right)^{\mathfrak{h}} \text{ (d'après la proposition 3.2)} \\
&\quad \simeq \; H_i\left(\mathfrak{n}^0, \mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g})\right)_{-\lambda+\rho_{\mathfrak{b}}}
\end{aligned}$$

Chacun de ces isomorphismes est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules, car l'action donnant la structure de $\mathfrak{g}$-module et l'action pour laquelle on calcule l'homologie commutent. ■

Si α est une racine non isotrope, on note s_α la réflexion par rapport à α. Notons que si α est impaire, alors 2α est une racine paire et on a $s_\alpha = s_{2\alpha}$. Donc dans tous les cas s_α est un élément du groupe de Weyl W de $\mathfrak{g}_0$ et son action dans $\mathfrak{h}$ est la restriction d'un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

Si $w \in W$, alors $w(\mathfrak{b})$ est la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ telle que $\Delta^+(w(\mathfrak{b})) = w(\Delta^+(\mathfrak{b}))$. Remarquons que l'on a $\rho_{w(\mathfrak{b})} = w(\rho_{\mathfrak{b}})$.

Proposition 6.2. *Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{b})$ une racine simple non isotrope. Soit $\mathfrak{b}^1$ la sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ telle que*

$$\Delta^+(\mathfrak{b}^1) = \begin{cases} (\Delta^+(\mathfrak{b}) \setminus \{\alpha\}) \bigcup \{-\alpha\} & si\ \alpha \in \Delta_0 \\ (\Delta^+(\mathfrak{b}) \setminus \{\alpha, 2\alpha\}) \bigcup \{-\alpha, -2\alpha\} & si\ \alpha \in \Delta_1. \end{cases}$$

Si $\lambda(h_\alpha) \leq 0$, on a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$:

$$\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})) \simeq \mathcal{L}_{i-1}(M(\mathfrak{b}^1, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}^1})) \simeq \mathcal{L}_{i-1}(M(s_\alpha(\mathfrak{b}), \lambda - \rho_{s_\alpha(\mathfrak{b})})).$$

Démonstration. On note $\mathfrak{n}^0 = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{b})} \mathfrak{g}_\alpha$, et $\mathfrak{n}^1 = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{b}^1)} \mathfrak{g}_\alpha$. Pour l'action de $\mathfrak{g}$ par multiplication à droite, le module $\mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ est localement fini. D'après la proposition 3.9, on a

$$H_i\left(\mathfrak{n}^0, \mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g})\right)_{-\lambda+\rho_{\mathfrak{b}}} \simeq H_{i-1}\left(\mathfrak{n}^1, \mathcal{M}(\mathfrak{g}_0) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0)} \mathcal{U}(\mathfrak{g})\right)_{-\lambda+\rho_{\mathfrak{b}^1}}$$

On obtient le premier isomorphisme en appliquant le lemme 6.1.

Le deuxième isomorphisme résulte de ce que s_α permute les racines positives non proportionnelles à α. On a donc $s_\alpha(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^1$. ■

Lemme 6.3. *Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\lambda(h_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b})$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{b}_0$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}_0$ telle que $\lambda(h_\alpha) \geq 0$ pour toute racine α de $\mathfrak{b}_0$. Il s'agit de montrer qu'il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ dont $\mathfrak{b}_0$ est la partie paire. Comme toutes les sous-algèbres de Borel de $\mathfrak{g}_0$ sont conjuguées par un automorphisme de $\mathfrak{g}$, on voit que l'on peut même choisir $\mathfrak{b}$ conjuguée d'une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ fixée à l'avance. ∎

Si $w \in W$, on note $l(w)$ la longueur de w par rapport à l'ensemble des racines simples de $\Delta_0^+(\mathfrak{b})$. Rappelons la définition 1.8 : on dit que un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est typique si $\lambda(H_\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \overline{\Delta_1}$.

Proposition 6.4. *Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ un élément typique. Supposons que $\lambda(h_\alpha) \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b})$. On a, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et pour tout $w \in W$:*

$$\mathcal{L}_{i+l(w)}(M(w(\mathfrak{b}), \lambda - \rho_{w(\mathfrak{b})})) \simeq \mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})).$$

Démonstration. La démonstration sera faite par récurrence sur $l(w)$. Si $l(w) = 1$, alors $w = s_\alpha$ pour une racine simple $\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b})$. D'après [19, ch. IV], il existe une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}^\#$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b}_0 = (\mathfrak{b}^\#)_0$ et que si $\alpha/2$ est (respectivement n'est pas) une racine, alors $\alpha/2$ (resp. α) est simple par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{b}^\#)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{i+1}(M(s_\alpha(\mathfrak{b}), \lambda - \rho_{s_\alpha(\mathfrak{b})})) \simeq \\
&\quad \simeq \mathcal{L}_{i+1}(M(s_\alpha(\mathfrak{b}^\#), \lambda - \rho_{s_\alpha(\mathfrak{b}^\#)})) \text{ (d'après la proposition 2.7)} \\
&\quad \simeq \mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}^\#, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}^\#})) \text{ (d'après la proposition 6.2)} \\
&\quad \simeq \mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}}))
\end{aligned}$$

d'après la proposition 2.7.

Dans le cas général, on écrit $w = s_\alpha w'$, où α est une racine simple de $\Delta_0^+(\mathfrak{b})$ et $l(w) = l(w') + 1$. Si on pose $\lambda' = w'(\lambda)$, il suffit que l'on démontre que $\lambda'(h_\alpha) \geq 0$, mais ceci est une conséquence du fait que $(w')^{-1}(\alpha) \in \Delta_0^+(\mathfrak{b})$ (cf. [1, ch. VI]). ∎

Rappelons qu'on dit qu'un élément $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est régulier si $\lambda(h_\alpha) \neq 0$ pour toute racine non isotrope α.

Théorème 6.5. *Soient λ un élément typique de $\mathfrak{h}^*$ et $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Alors :*

1. *Si $\lambda - \rho_{\mathfrak{b}}$ n'est pas un poids, $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})) = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

2. *Si λ n'est pas régulier, $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}})) = \{0\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. La première assertion résulte immédiatement du lemme 6.1. Pour démontrer la seconde assertion, prenons une racine non isotrope α telle que $\lambda(h_\alpha) = 0$. Si α ou $\frac{1}{2}\alpha$ est simple dans $\Delta^+(\mathfrak{b})$, l'annulation de $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ résulte du lemme 6.1 et du corollaire 3.10. On va se ramener à ce cas. On choisit une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}'$ telle que α ou $\frac{1}{2}\alpha$ soit simple dans $\Delta^+(\mathfrak{b}')$. Conjuguant $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ à des sous-algèbres de Borel pour lesquelles λ soit dominant, et appliquant deux fois la proposition 6.4, on voit qu'il existe un entier j tel que l'on ait $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})) = \mathcal{L}_j(M(\mathfrak{b}', \lambda - \rho_{\mathfrak{b}'}))$. ∎

Si $\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ est régulier, on note

$$n(\mathfrak{b}, \lambda) = \#\left\{\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b}) : \lambda(h_\alpha) < 0\right\}.$$

Remarquons que $n(\mathfrak{b}, \lambda)$ est égal à la longueur de l'élément w du groupe de Weyl de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que $w(\lambda)$ soit dominant par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{b})$ (cf. [1, §VI.1.6] et [2, §VIII.3.3]).

Théorème 6.6. *Soit λ un élément typique et régulier de $\mathfrak{h}^*$. On suppose que pour une (ou pour toute) sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ l'élément $\lambda - \rho_\mathfrak{b}$ est un poids. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Alors :*

1. $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})) = \{0\}$ *pour chaque $i \in \mathbb{N}$ différent de $n(\mathfrak{b}, \lambda)$.*
2. *Si $\mathfrak{b}'$ est une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$, les $\mathfrak{g}$-modules $\mathcal{L}_{n(\mathfrak{b},\lambda)}(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ et $\mathcal{L}_{n(\mathfrak{b}',\lambda)}(M(\mathfrak{b}', \lambda - \rho_{\mathfrak{b}'}))$ sont alors isomorphes.*
3. *Le super caractère du module $\mathcal{L}_{n(\mathfrak{b},\lambda)}(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ est donné par la formule*

$$(-1)^{n(\mathfrak{b},\lambda)} \frac{\left(\sum_{w \in W} \det(w)\mu(w)e^{w(\lambda)}\right) \prod_{\alpha \in \Delta_1^+(\mathfrak{b})} (e^{\alpha/2} + \epsilon e^{-\alpha/2})}{\prod_{\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b})} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}.$$

Démonstration. Il résulte de la proposition 6.4 que, pour démontrer la première assertion, il suffit de la démontrer lorsque $\mathfrak{b}$ vérifie $n(\mathfrak{b}, \lambda) = 0$. Il faut alors démontrer que l'on a $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}), \lambda - \rho_\mathfrak{b})) = 0$ si $i \neq 0$. C'est évident si $i < 0$; supposons $i > 0$. On note w_0 l'élément de plus grande longueur de W. On a $l(w_0) = n$ (rappelons que n est défini après l'énoncé de la proposition 4.7) et $\mathcal{L}_i(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})) \simeq \mathcal{L}_{i+n}(M(w_0(\mathfrak{b}), \lambda - \rho_{w_0(\mathfrak{b})}))$. D'autre part, on a $\mathcal{L}_{i+n}(M(w_0(\mathfrak{b}), \lambda - \rho_{w_0(\mathfrak{b})})) = 0$ d'après la proposition 4.10.

Démontrons la seconde assertion. Il résulte de la proposition 6.4 qu'il suffit de la démontrer lorsqu'on a $n(\mathfrak{b}, \lambda) = n(\mathfrak{b}', \lambda) = 0$. Ceci implique que l'on a $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}'_0$. L'assertion résulte alors de la proposition 2.7.

La troisième assertion est une conséquence de la première assertion et du théorème 5.7. ∎

Pour poursuivre, nous utiliserons un résultat de Kac (cf. [13, §8] pour l'énoncé et [14] pour la démonstration) sur l'irréductibilité des modules de Verma — nous n'aurons besoin en fait que de la condition suffisante.

Théorème 6.7. *Soient $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Le module $M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$ est simple si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. *Pour toute racine isotrope α, on a $\lambda(H_\alpha) \neq 0$ (i.e. λ est typique).*
2. *Pour toute racine paire α telle que $\frac{1}{2}\alpha$ ne soit pas racine et pour tout entier $n > 0$ on a $\lambda(h_\alpha) \neq n$.*
3. *Pour toute racine non isotrope impaire et pour tout entier $n \geq 0$ on a $\lambda(h_\alpha) \neq \frac{1}{2} + n$.*

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de cette section. Rappelons que pour $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et toute sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$, le module $M(\mathfrak{b}, \lambda)$ admet un plus grand quotient de dimension finie, égal à $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{b}, \lambda))$, et un unique quotient simple, noté $L(\mathfrak{b}, \lambda)$.

Théorème 6.8. *Soit λ un élément typique et régulier de $\mathfrak{h}^*$. On suppose que pour une (ou pour toute) sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{g}$ l'élément $\lambda - \rho_\mathfrak{b}$ est un poids.*

1. *Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ telle que $n(\mathfrak{b}, \lambda) = 0$. Alors $L(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$ est de dimension finie. Le module $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ est simple et isomorphe à $L(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$. Le supercaractère du module $L(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$ est donné par la formule*

$$\mathrm{sch}(L(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})) = \frac{\left(\sum_{w \in W} \det(w)\mu(w)e^{w(\lambda)}\right) \prod_{\alpha \in \Delta_1^+(\mathfrak{b})} (e^{\alpha/2} + \epsilon e^{-\alpha/2})}{\prod_{\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b})} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}.$$

2. *Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Alors le module $\mathcal{L}_{n(\mathfrak{b},\lambda)}(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ est simple et isomorphe à $L(\mathfrak{b}', \lambda - \rho'_\mathfrak{b})$ pour toute sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}'$ de $\mathfrak{g}$ telle que $n(\mathfrak{b}', \lambda) = 0$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ telle que $n(\mathfrak{b}, \lambda) = 0$. Il résulte de la troisième assertion du théorème 6.6 que le module $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ est non nul. En effet, comme λ est régulier, les $w(\lambda)$ sont distincts et son supercaractère est non nul. Il en résulte que $M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$ admet un quotient non nul de dimension finie et donc que $L(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$ est de dimension finie.

Montrons que le module $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ est simple. Pour cela, il suffit de montrer que ce module admet une forme bilinéaire paire non-dégénérée σ-invariante symétrique. En effet, comme $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$ est quotient non nul de $M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b})$, son sous-espace de poids $\lambda - \rho_\mathfrak{b}$ est de dimension un et il engendre $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_\mathfrak{b}))$. Soit $\mathfrak{b}^\#$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ telle que l'on ait $n(\mathfrak{b}^\#, \lambda) = n$, c'est-à-dire $\lambda(h_\alpha) < 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b}^\#)$. Il résulte du théorème 6.6 qu'il suffit de démontrer que $\mathcal{L}_n(M(\mathfrak{b}^\#, \lambda - \rho_\mathfrak{b}^\#))$ admet une telle forme bilinéaire. Comme, d'après le théorème 6.7, le module $M(\mathfrak{b}^\#, \lambda - \rho_\mathfrak{b}^\#)$ est simple, ceci résulte de la proposition 4.11.

Le reste du théorème résulte du théorème 6.6. ∎

Explicitant ce qui concerne les modules simples de dimension finie, nous retrouvons des théorèmes classiques de Kac [11] sur les modules typiques :

Théorème 6.9. *Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$.*

1. *Soit V un module simple de dimension finie et soit $\lambda \in Q$ son poids dominant (par rapport à $\mathfrak{b}$). Supposons que $\lambda + \rho_{\mathfrak{b}}$ soit typique*[14]*. Alors $\lambda + \rho_{\mathfrak{b}}$ est régulier et le supercaractère de V est donné par la formule*

$$\frac{\left(\sum_{w \in W} \det(w)\mu(w)e^{w(\lambda+\rho_{\mathfrak{b}})}\right) \prod_{\alpha \in \Delta_1^+(\mathfrak{b})} (e^{\alpha/2} + \epsilon e^{-\alpha/2})}{\prod_{\alpha \in \Delta_0^+(\mathfrak{b})} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}.$$

2. *Réciproquement, soit $\lambda \in Q$ un poids dominant tel que $\lambda + \rho_{\mathfrak{b}}$ soit typique et régulier. Alors il existe un module simple de dimension finie de plus haut poids λ.*

Démonstration. Par hypothèse, le module $\mathcal{L}_0(M(\mathfrak{b}, \lambda))$ est non nul. Il résulte du théorème 6.5 que $\lambda + \rho_{\mathfrak{b}}$ est régulier. Le reste est une conséquence du théorème 6.8. ∎

7. Polynômes invariants sur une sous-algèbre de Cartan

Soit $\mathfrak{b}$ une sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$. Soit $\pi_{\Lambda,i}$ la représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{L}_i(\mathfrak{b}, M(\mathfrak{b}, \Lambda))$. A chaque poids Λ on associe les polynômes sur $\mathfrak{h}$ donnés par :

$$\begin{array}{rccc} P_{\Lambda,m} : & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & H & \mapsto & \sum_i (-1)^i \mathrm{str}\,(\pi_{\Lambda,i}(H)^m) \end{array}$$

où $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On note aussi $T = \prod_{\alpha \in \overline{\Delta_1^+}} \alpha$. Si P_1 et P_2 sont deux fonctions polynomiales, alors $P_1 | P_2$ veut dire que P_2 est multiple de P_1.

Théorème 7.1. *L'espace vectoriel engendré par les polynômes $P_{\Lambda,m}$ est l'espace $\left\{\Phi \in S(\mathfrak{h}^*)^W : T|\Phi\right\}$.*

Remarquons que cet ensemble est égal à $\left\{\Phi \in S(\mathfrak{h}^*)^W : \forall_{\alpha \in \overline{\Delta_1}}\ \alpha|\Phi\right\}$; c'est une conséquence du fait que deux racines isotropes, α et β, sont proportionnelles si et seulement si $\alpha = \pm\beta$ (cf. [12, §1.4]).

Ce théorème généralise un théorème de Chevalley concernant les polynômes invariants sur une algèbre de Lie semi-simple et la démonstration qu'on va donner suit les lignes de la démonstration de ce théorème qu'on peut trouver dans [2, ch. VIII] ou dans [4, ch. VII].

[14] On dit alors, suivant Kac, que V est typique.

Lemme 7.2. *Soient $\Delta' \subset \mathfrak{h}^*$ un système de racines (reduit), $\Delta'^+ \subset \Delta'$ un système de racines positif, P' un sous-réseau du réseau des poids tel que $\mathbb{Z}\Delta' \subset P'$, $\rho' = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta'^+}\alpha$, W' le groupe de Weyl et $\mathbb{Z}[P']$ l'algèbre des combinaisons linéaires (à coefficients dans $\mathbb{Z}$) des éléments e^λ ($\lambda \in P'$). On note, pour chaque $\lambda \in P'$:*

$$\theta_\lambda = \frac{\sum_{w\in W'} \det(w) e^{w(\lambda+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta'^+}(1-e^{-\alpha})}.$$

Alors $\mathbb{Z}[P']^W$ est engendré par $\{\theta_\lambda : \lambda \in P'\}$.

Ce résultat est bien connu.

Rappelons que Q est le réseau des poids de $\Delta_0(\mathfrak{b})$. On note $\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})} = \overline{\Delta_1} \cap \Delta^+(\mathfrak{b})$ et $\omega_\mathfrak{b} = \sum_{\alpha\in\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}} \alpha$.

Lemme 7.3. *L'élément $\omega_\mathfrak{b}$ est dans le réseau Q.*

Démonstration. Soit $\beta \in \Delta_0$; on veut démontrer que $\omega_\mathfrak{b}(h_\beta) \in \mathbb{Z}$. On choisit une sous-algèbre de Borel $\mathfrak{b}^\#$ de $\mathfrak{g}$ telle que β ou $\beta/2$ soit simple par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{b}^\#)$. Si $\alpha \in \overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b}^\#)}$, alors

$$(\alpha + s_\beta(\alpha))(h_\beta) = \begin{cases} (2\alpha - \alpha(h_\beta)\beta)(h_\beta) = 0 & \text{si } \beta \in \Delta_0 \\ (2\alpha - 2\alpha(h_\beta)\beta)(h_\beta) = 0 & \text{si } \beta \in \Delta_1 \end{cases}$$

et $s_\beta(\alpha) \in \overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b}^\#)}$. On en déduit que $(\omega_{\mathfrak{b}^\#} + s_\beta(\omega_{\mathfrak{b}^\#}))(h_\beta) = 0$ et donc que $\omega_{\mathfrak{b}^\#}(h_\beta) = 0$, car $s_\alpha(\omega_{\mathfrak{b}^\#})(h_\beta) = -\omega_{\mathfrak{b}^\#}(h_\beta)$. Puisque $\omega_\mathfrak{b} - \omega_{\mathfrak{b}^\#} \in \mathbb{Z}\Delta \subset Q$, on voit que $\omega_\mathfrak{b}(h_\beta) \in \mathbb{Z}$. ∎

Notons $\Delta'_0 = \overline{\Delta_0} \cup \left(\Delta_1 \setminus \overline{\Delta_1}\right)$, $\Delta'^+_0 = \Delta'_0 \cap \Delta^+(\mathfrak{b})$ et $\rho' = \rho(\Delta'^+_0)$. Remarquons que Δ'^+_0 et ρ' dépendent du choix de $\mathfrak{b}$ et que :

$$\begin{aligned}
\rho_\mathfrak{b} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha\in\Delta_0^+(\mathfrak{b})}\alpha - \sum_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})}\alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha\in\overline{\Delta_0(\mathfrak{b})}}\alpha + 2\sum_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}\alpha - \sum_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}\alpha - \sum_{\alpha\in\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}\alpha\right) \\
&= \rho' - \omega_\mathfrak{b}.
\end{aligned}$$

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $P(\lambda) = \sum_{\alpha\in\Delta_0^+\setminus\overline{\Delta_0}} \lambda(h_\alpha)$. On note aussi

$$\begin{array}{cccc}
\Theta : & \mathbb{Z}[Q] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[Q] \\
& \sum_{\lambda\in Q} c_\lambda e^\lambda & \mapsto & \sum_{\lambda\in Q} c_\lambda (-1)^{P(\lambda)} e^\lambda.
\end{array}$$

La fonction Θ est un automorphisme de $\mathbb{Z}[Q]$ qui ne dépend pas du choix de $\mathfrak{b}$, car si $\mathfrak{b}^\#$ est une autre sous-algèbre de Borel de $\mathfrak{g}$ et si on note $P^\#$ la fonction analogue à P définie à partir de $\mathfrak{b}^\#$, alors $P(\lambda) - P^\#(\lambda) \in 2\mathbb{Z}$ pour tout $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Lemme 7.4. *Si* $\alpha \in \Delta_0'$, *alors* $\Theta(e^\alpha) = \begin{cases} e^\alpha & \textit{si } \alpha \in \Delta_0 \\ -e^\alpha & \textit{si } \alpha \in \Delta_1 \setminus \overline{\Delta_1}. \end{cases}$

Démonstration. Soit $\alpha \in \Delta_0'$. On va supposer que α ou $\alpha/2$ est simple par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{b})$; on peut le faire d'après la dernière assertion avant l'énoncé du lemme. On note :

$$A = \{\beta \in \Delta_0^+(\mathfrak{b}) \setminus \overline{\Delta_0} : \alpha(h_\beta) \neq 0 \text{ et } \beta \notin \{\alpha, \alpha/2\}\}$$

et

$$B = \{\beta \in \Delta_0^+(\mathfrak{b}) \setminus \overline{\Delta_0} : \alpha(h_\beta) = 0\}.$$

Remarquons que si $\beta \in A$, alors $s_\alpha(\beta)$ est un élément de A différent de β et que $(\alpha + s_\beta(\alpha))(h_\beta) = 0$; on en déduit que $\sum_{\beta \in A} \beta(h_\alpha) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= \sum_{\beta \in A} \alpha(h_\beta) + \sum_{\beta \in B} \alpha(h_\beta) + \begin{cases} \alpha(h_\alpha) & \text{si } \alpha \in \Delta_0 \setminus \overline{\Delta_0} \\ 0 & \text{si } \alpha \in \overline{\Delta_0} \\ \alpha(h_{2\alpha}) & \text{si } \alpha \in \Delta_1 \setminus \overline{\Delta_1} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ ou } 2 & \text{si } \alpha \in \overline{\Delta_0} \\ 1 & \text{si } \alpha \in \Delta_1 \setminus \overline{\Delta_1} \end{cases} \end{aligned}$$

et donc $P(\alpha)$ est pair si et seulement si $\alpha \in \Delta_0$. ∎

Soit $\nu : W \longrightarrow \{1, -1\}$ la fonction telle que :

$$(\forall_{w \in W}) : w\left(\prod_{\alpha \in \Delta_1^+(\mathfrak{b}) \setminus \overline{\Delta_1}} \left(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right)\right) = \nu(w) \prod_{\alpha \in \Delta_1^+(\mathfrak{b}) \setminus \overline{\Delta_1}} \left(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right).$$

Lemme 7.5. *Si* $w \in W$, *alors* $\Theta(e^{w(\rho') - \rho'}) = \nu(w) e^{w(\rho') - \rho'}$.

Proof. Puisque $w(\rho') - \rho' = \sum_{\alpha \in \Delta_0'^+ \text{ et } w(\alpha) < 0} \alpha$, on a :

$$\Theta\left(e^{w(\rho') - \rho'}\right) = \Theta\left(\prod_{\alpha \in \Delta_0'^+ \text{ et } w(\alpha) < 0} e^\alpha\right) = (-1)^{\#\{\alpha \in \Delta_1^+(\mathfrak{b}) \setminus \overline{\Delta_1} : w(\alpha) < 0\}}$$

d'après le lemme 7.4. On déduit de la définition de la fonction ν que

$$\nu(w) = (-1)^{\#\{\alpha \in \Delta_1^+(\mathfrak{b}) \setminus \overline{\Delta_1} : w(\alpha) < 0\}}.$$ ∎

Lemme 7.6. *Si* $w \in W$ *et* $\lambda \in Q$, *alors* $\Theta\left(e^{w(\lambda)}\right) = (-1)^{P(\lambda)} e^{w(\lambda)}$.

Proof. En effet,

$$P(w(\lambda)) - P(\lambda) = 2 \sum_{\alpha \in \Delta_0'^+ \text{ et } w(\alpha) < 0} \lambda(h_\alpha) \in 2\mathbb{Z}$$

et donc

$$\Theta\left(e^{w(\lambda)}\right) = \left((-1)^{P(\lambda)} e^{w(\lambda)}\right) = w\left((-1)^{P(\lambda)} e^\lambda\right) = (-1)^{P(\lambda)} e^{w(\lambda)}$$ ∎

Lemme 7.7. *Si $\lambda \in Q$, alors :*

$$\Theta\left(\frac{\sum_{w\in W}\det(w)e^{w(\lambda+\rho')}}{\prod_{\alpha\in\Delta_0'^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}\right) = \frac{(-1)^{P(\lambda)}\sum_{w\in W}\det(w)\nu(w)e^{w(\lambda+\rho')}}{\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_0^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1}}(e^{\alpha/2}+e^{-\alpha/2})}.$$

Proof. On a

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{w\in W}\det(w)e^{w(\lambda+\rho')}}{\prod_{\alpha\in\Delta_0'^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})} &= \frac{\sum_{w\in W}\det(w)e^{w(\lambda+\rho')-\rho'}}{\prod_{\alpha\in\Delta_0'^+}(1-e^{-\alpha})}\\ &= \frac{\sum_{w\in W}\det(w)e^{w(\lambda)}e^{w(\rho')-\rho'}}{\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_0^+(\mathfrak{b})}}(1-e^{-\alpha})\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1}}(1-e^{-\alpha})}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&\Theta\left(\frac{\sum_{w\in W}\det(w)e^{w(\lambda+\rho')}}{\prod_{\alpha\in\Delta_0'^+}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})}\right) =\\ &= \frac{\sum_{w\in W}\det(w)\Theta(e^{w(\lambda)})\Theta(e^{w(\rho')-\rho'})}{\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_0^+(\mathfrak{b})}}(1-\Theta(e^{-\alpha}))\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1}}(1-\Theta(e^{-\alpha}))}\\ &= \frac{\sum_{w\in W}\det(w)(-1)^{P(\lambda)}\nu(w)e^{w(\lambda)}e^{w(\rho')-\rho'}}{\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_0^+(\mathfrak{b})}}(1-e^{-\alpha})\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1}}(1+e^{-\alpha})} \text{ (d'après les lemmes 7.4, 7.5 et 7.6)}\\ &= (-1)^{P(\lambda)}\frac{\sum_{w\in W}\det(w)\nu(w)e^{w(\lambda+\rho')}}{\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_0^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1}}(e^{\alpha/2}+e^{-\alpha/2})}.\end{aligned}$$

■

Si $\lambda \in Q$, on note

$$\Psi_\lambda = \frac{\sum_{w\in W}\det(w)\nu(w)e^{w(\lambda+\rho')}}{\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_0^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1}}(e^{\alpha/2}+e^{-\alpha/2})};$$

on déduit du lemme 7.7 que $\Psi_\lambda \in \mathbb{Z}[Q]$.

Le lemme 7.2 (appliqué au réseau Q) et le fait que Θ est un automorphisme de $\mathbb{Z}[Q]$ impliquent que l'on a :

Corollaire 7.8. *L'ensemble* $\{\Psi_\lambda : \lambda \in Q\}$ *engendre* $\mathbb{Z}[Q]^W$.

Rappelons que si V est un $\mathfrak{g}$-module qui admet un supercaractère, alors on note $\mathrm{sch}_{-1}(V)$ l'élément que l'on obtient de $\mathrm{sch}(V)$ quand on remplace ϵ par -1. Soit $\mu : W \longrightarrow \{1, \epsilon\}$ la fonction qui a été définie avant l'énnoncé de la proposition 5.7. Si on remplace ϵ par -1, alors la fonction μ devient la fonction ν. En effet, T est W-invariant (cf. [12, §1.5]); on en déduit que $\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$ est W-invariant et on a donc, pour tout $w \in W$:

$$
\begin{aligned}
& w\left(\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})\right) = \\
&\quad = w\left(\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1}}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})\right).w\left(\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})\right) \\
&\quad = \nu(w)\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}).
\end{aligned}
$$

Corollaire 7.9. *L'ensemble* $\left\{\sum_{j\geq 0}(-1)^j\,\mathrm{sch}_{-1}\left(\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{b}, \lambda - \rho_{\mathfrak{b}}))\right) : \lambda \in Q\right\}$ *engendre l'espace des éléments de* $\mathbb{Z}[Q]^W$ *qui sont divisibles par* $\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}$.

Démonstration. Ceci est une conséquence de la proposition 5.7. On a, pour $\lambda \in Q$:

$$
\begin{aligned}
\sum_j(-1)^j\,\mathrm{sch}_{-1}\,\mathcal{L}_j(M(\mathfrak{b}, \lambda)) &= \frac{\left(\sum_{w\in W}\det(w)\nu(w)e^{w(\lambda+\rho_{\mathfrak{b}})}\right)\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})}{\prod_{\alpha\in\Delta_0^+(\mathfrak{b})}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})} \\
&= \frac{\sum_{w\in W}\det(w)\nu(w)e^{w(\lambda+\rho_{\mathfrak{b}})}}{\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_0^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})\prod_{\alpha\in\Delta_1^+(\mathfrak{b})\setminus\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2} + e^{-\alpha/2})}\prod_{\alpha\in\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})
\end{aligned}
\tag{21}
$$

et cette expression et égale à $\Psi_\lambda \cdot \prod_{\alpha\in\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}}(e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})$. ∎

Si $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$ est une série formelle, avec $g_m \in S^m(\mathfrak{h}^*)$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$, on note $d_m(g) = g_m$. En particulier, si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, alors $d_m(e^\lambda) = \lambda^m/m!$ et, plus généralement

$$
d_m(ge^\lambda) = \sum_{k=0}^{m} g_k \frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!}.
$$

Lemme 7.10. *Si* $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *et* $g_0 \neq 0$, *alors* λ^m *est combinaison linéaire de* $d_m(e^\lambda g)$, $d_m(e^{2\lambda}g)$, …, $d_m(e^{(m+1)\lambda})$.

Démonstration. Il suffit que l'on remarque que si $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors

$$d_m(e^{j\lambda}) = \sum_{k=0}^{m} 2^{m-k} g_k \frac{\lambda^{m-k}}{(m-k)!}$$

et que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^m & 2^{m-1} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ (m+1)^m & (m+1)^{m-1} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est non nul. ■

Si $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, on note $\gamma_\lambda = \sum_{w \in W} w(e^\lambda)$; si $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a alors $d_m(\gamma_\lambda) = \sum_{w \in W} (w(\lambda))^m / m!$ et on déduit du lemme 7.10 que si $g \in S(\mathfrak{h}^*)^W$ et si $g_0 \neq 0$, alors $d_m(\gamma_\lambda)$ est combinaison linéaire de $d_m(\gamma_\lambda g)$, $d_m(\gamma_{2\lambda} g)$, $\ldots$, $d_m(\gamma_{(m+1)\lambda})$. Supposons maintenant que $\lambda \in Q$. Puisque $\{m\gamma : m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \subset Q$, chaque $d_j(\gamma_\lambda)$ est combinaison linéaire des $d_m(g\Psi)$ ($\Psi \in \mathbb{Z}[Q]^W$). On déduit de cette assertion et du corollaire 7.8 que l'on a :

Corollaire 7.11. *Si $\lambda \in Q$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors $d_m(\gamma_\lambda)$ est combinaison linéaire des $d_m(\Psi_\Lambda)$ ($\Lambda \in Q$).*

Pour démontrer le théorème 7.1 on prend

$$g = \prod_{\alpha \in \overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}} \frac{e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}}{\alpha}.$$

On note q le degré de T; on a donc $q = \#\overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}$. On a remarqué dans la démonstration du corollaire 7.9 que T est W-invariant; on en déduit que g est aussi W-invariant. On peut donc écrire g sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ avec $g_m \in S^m(\mathfrak{h}^*)^W$ pour chaque $m \in \mathbb{N}$. Remarquons que $g_0 = 1$. Si $\lambda \in Q$ et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, notons

$$\zeta_\lambda^m = d_m\left(\Psi_\lambda \prod_{\alpha \in \overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right)$$

et $\eta_\lambda^m = d_m(g\Psi_\lambda)$. On a alors :

$$\zeta_\lambda^m = \begin{cases} T d_{m-q}(\eta_\lambda^m) & \text{si } m \geq q \\ 0 & \text{si } m < q. \end{cases}$$

On en déduit que si $m \geq q$, alors $T d_{m-q}(\gamma_\lambda)$ est combinaison linéaire des $d_m\left(\Psi_\Lambda \prod_{\alpha \in \overline{\Delta_1^+(\mathfrak{b})}} e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right)$ ($\Lambda \in Q$). Le théorème 7.1 est alors une conséquence de la formule (21).

Références

[1] Bourbaki, N., "Groupes et algèbres de Lie, ch. IV–VI", Masson, 1981.

[2] —, "Groupes et algèbres de Lie, ch. VII–VIII", Masson, 1990.

[3] Demazure, M., *A very simple proof of Bott's theorem,* Inv. Math. **5** (1968), 349–356.

[4] Dixmier, J., "Algèbres enveloppantes", Gauthier-Villars, 1974.

[5] Duflo, M. et M. Vergne, *Sur le foncteur de Zuckerman*, C. R. Acad. Sc. Paris **304** (1987), 467–469.

[6] Fuks, D. B, "Cohomology of infinite-dimensional Lie algebras", Plenum Publishing Corporation, 1986.

[7] Guichardet, A., "Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie", CEDIC/Fernand Nathan, 1980.

[8] Hochschild, G., *Semisimplicity of 2-graded Lie algebras*, Illinois J. Math. **20** (1976), 107–123.

[9] Kac, V. G., "Infinite dimensional Lie algebras (third edition)", Cambridge University Press, 1990.

[10] —, *Lie superalgebras*, Adv. Math. **26** (1977), 8–96.

[11] —, *Characters of typical representations of classical Lie superalgebras*, Comm. Alg. **5** (1977), 889–897.

[12] —, *Representations of classical Lie superalgebras*, "Differential geometrical methods in mathematical physics, Proceedings, 1977" (K. Bleuler *et al.*, eds.), 597–626, Springer-Verlag, 1978.

[13] —, *Highest weight representations of conformal current algebras*, "Symposium on topological and geometrical methods in field theory, Finland, 1986" (J. Hieterinta et J. Westerholm, eds.), 3–15, World Scientific, 1986.

[14] Kac, V. G., et D. A. Kazhdan, *Structure of representations with highest weight of infinite-dimensional Lie algebras*, Adv. Math. **34** (1979) 97–108.

[15] Knapp, A. W., "Lie groups, Lie algebras, and cohomology", Princeton University Press, 1988.

[16] Knapp, A. W., et D. A. Vogan, jr., "Cohomological induction and unitary representations", Princeton University Press, 1995.

[17] Koszul, J.-L., *Graded manifolds and graded algebras*, "Proceedings of the International Conference on Geometry and Physics, Florence, 1982", Pitagora, 1983, 71–84.

[18] Leites, D. A., *Cohomologies of Lie superalgebras*, Funct. Anal. Appl. **9** (1976), 340–341.

[19] Penkov, I., "Geometric representation theory of classical complex Lie supergroups", non publié.

[20] Penkov, I., et V. Serganova, *Cohomology of G/P for classical Lie supergroups G and characters of some atypical G-modules*, Ann. Inst. Fourier, **39** (1989) n°4, 845–873.

[21] —, *Representations of classical Lie superalgebras of type I*, Indag. Math., N. S. **3** (1992), 419–466.

[22] Santos, J. C., “Induction homologique dans les super algèbres de Lie basiques classiques”, thèse, Université Paris VII, 1996.

[23] van de Leur, J., “Contragredient Lie superalgebras of finite growth”, thèse, Université d'Utrecht, 1986.

[24] Wallach, N. R., “Real reductive groups I”, Academic Press, 1988.

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências
Praça Gomes Teixeira
4050 Porto
Portugal
e-mail : jcsantos@fc.up.pt

Received July 30, 1997
and in final form July 2, 1998