Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **6** *(1994), 161–203*

Pfaffien et discriminant

par Jacques Queyrut

0. Introduction

Soient F un corps de caractéristique 0 et Γ un groupe fini. Le but de cet article est de donner une nouvelle description des groupes de Grothendieck $\mathcal{K}_0$ associés aux catégories dont les objets sont les modules sur l'algèbre de groupe $F[\Gamma]$, munis d'une forme bilinéaire symétrique ou antisymétrique, non dégénérée invariante par les éléments du groupe Γ.

L'idée, introduite par A. Fröhlich [F1] et développée par moi-même [Q1], est de décrire les groupes de Grothendieck $\mathcal{K}_0$ et de Whitehead $\mathcal{K}_1$ à l'aide de groupes d'homomorphismes définis à partir du groupe des caractères $R(\Gamma)$ de Γ. La technique utilisée est de décrire par dualité ces groupes dans le cas où F est un corps algébriquement clos. Puis la suite de $\mathcal{K}$-théorie introduite par A. Heller [H] et une procédure de descente galoisienne, à l'aide du groupe de Galois G_F d'une clôture séparable $\overline{F}$ de F, permettent d'atteindre le but fixé.

Jusqu'à présent, la classification des formes bilinéaires invariantes sous l'action d'un groupe Γ se faisait en factorisant l'algèbre de groupe à involution $F[\Gamma]$ (voir par exemple le livre de W. Scharlau [Sc]). Cette nouvelle approche permet de mettre naturellement en évidence les propriétés fonctorielles liées aux changements de corps de base F et changements de groupe Γ, en étendant les formules de A. Fröhlich [F1]. De plus cette description du groupe $\mathcal{K}_0$ est bien adaptée à la situation arithmétique décrite ci-dessous.

Dans la situation classique de classification des espaces vectoriels munis de formes quadratiques non dégénérées, les trois premiers invariants sont la dimension sur le corps, qui est un entier, le discriminant, qui peut être considéré comme un élément soit de $H^1(G_F, \{\pm 1\})$ soit de F^*/F^{*2} et les invariants de Hasse-Witt qui peuvent être considérés comme des éléments soit d'un groupe de Brauer soit d'un groupe de cohomologie.

Ici, la généralisation de la notion de dimension donne un invariant à valeurs dans le groupe $Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$; l'ensemble des valeurs prises est donné par la proposition 5.1. Il dépend à la fois de l'indice de Schur

Manuscrit reçu le 15 décembre 1993.

et du *F-type* des caractères irréductibles de Γ (la définition du *F-type* est donnée dans le paragraphe 3).

Le deuxième invariant qui généralise la notion de discriminant prend ses valeurs

- soit dans le groupe $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*))$ en utilisant une technique de descente galoisienne ($R^s(\Gamma)$ désignant le groupe des caractères symplectiques de Γ)

- soit dans le groupe $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma), \overline{F}^*))$ en utilisant des calculs de déterminants.

Pour décrire la structure des anneaux d'entiers munis de la forme trace A. Fröhlich avait introduit la notion de Pfaffien dans le cadre des représentations de groupes finis [F3]. Il est montré ici que cette notion est en fait un invariant qui se définit naturellement sur le groupe de Grothendieck relatif $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ (défini dans le paragraphe 1) et prend ses valeurs dans le groupe $Hom_{G_F}(R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$. Le rôle important joué par le groupe $R^s(\Gamma)$ des caractères symplectiques dans la classification des formes symétriques est à mettre en parallèle avec le rôle joué par les formes alternées dans l'article de J. Tits [T].

L'outil de départ utilisé dans cette étude est donc la suite exacte de Heller (voir théorème 1.2) :

Pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(F[\Gamma])$, la catégorie des $F[\Gamma]$-modules quadratiques, (resp. $\mathcal{C} = \mathcal{S}(F[\Gamma])$, la catégorie des $F[\Gamma]$-modules symplectiques), il existe une suite exacte :

$$(S) : \mathcal{K}_1(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\nu} \mathcal{K}_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K}_0(\overline{F}[\Gamma]).$$

Le Pfaffien est un homomorphisme rendant le diagramme suivant commutatif où les applications verticales sont des isomorphismes (théorème 2.2) :

(D1)

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Det"] & \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \arrow[r] \arrow[d, "Det"] & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Pf"] & 0 \\
1 \arrow[r] & Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & Hom(R(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Soit $\tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ le noyau de l'application ε ; l'étude de l'action du groupe G_F permet de déduire un diagramme commutatif (théorème 4.3) :

(D2)

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Det"] & \mathcal{K}_1(F[\Gamma]) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Det"] & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Pf"] & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Disc"] & 0 \\
1 \arrow[r] & Hom_{G_F}(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & Hom(R(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & Hom_{G_F}(R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r, "\partial"] & H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}
$$

Une description du groupe $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$ est donnée par la proposition 4.1, qui montre en particulier que ce groupe est d'exposant 2.

Un deuxième outil fondamental est fourni par l'équivalence de Morita. Le rappel et la description explicite de cette équivalence dans le cadre des algèbres de groupe sont donnés en annexe.

Le premier paragraphe donne les définitions des groupes de Grothendieck associés à la catégorie des modules quadratiques et symplectiques. Il y est décrit la suite (S) de Heller associée à cette situation. Le deuxième paragraphe donne la définition du Pfaffien, déjà introduit par A. Fröhlich sous une autre forme dans [F3]. Ensuite est décrite l'action du groupe de Galois d'une clôture algébrique $\overline{F}$ de F, afin de pouvoir définir les groupes qui nous intéressent par descente galoisienne. Les paragraphes 4 et 5 montrent comment se généralisent les invariants classiques que sont le rang et le discriminant. Le lien entre le pfaffien et le discriminant est décrit dans le paragraphe 5. L'interprétation et la généralisation de la notion d'invariants de deux réseaux à l'aide des groupes de Grothendieck relatifs données par la $\mathcal{K}$-théorie fournissent une approche qui a permis de progresser dans la description de la structure galoisienne des anneaux d'entiers ou des groupes d'unités dans les corps de nombres (voir par exemple les travaux récents de D. Holland et S. Wilson [H-W1] et [H-W2]). Le fait que le Pfaffien soit en fait un invariant défini sur le groupe $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ permet de nourrir le même espoir.

Le dernier invariant classique est l'invariant de Clifford. Celui-ci a été calculé par A. Fröhlich dans le cas où tous les caractères de Γ sont réalisables sur F [F4]. La technique utilisée ici permet de s'affranchir de cette condition et de définir un invariant à valeurs dans $H^2(G_F, Hom(\mathcal{W}^o(\Gamma), \{\pm 1\}))$ (voir [Q3]). L'étude générale et détaillée de cet invariant dans le cadre décrit ci-dessous fera l'objet d'un autre article.

Les deux principaux ouvrages de références, pour le point de vue adopté ici, sont l'article de A. Fröhlich [F2] qui donne un certain nombre d'invariants et surtout le livre de W. Scharlau [Sc].

La situation arithmétique visée est la suivante : soit N une extension finie, séparable de F. Supposons qu'il existe un homomorphisme injectif de Γ dans le groupe des F-automorphismes de N. Le corps N est alors muni d'une structure de $F[\Gamma]$-module. L'application trace de N sur F est notée $tr_{N/F}$. L'application

$$(x, y) \longmapsto tr_{N/F}(xy)$$

est une forme F-bilinéaire symétrique non dégénérée invariante par Γ, notée $Tr_{N/F}$.

Soit $Is_F(N,\overline{F})$ l'ensemble des F-isomorphismes de N dans $\overline{F}$; Γ peut donc être considéré comme un sous-ensemble de $Is_F(N,\overline{F})$. Le F-espace vectoriel de base les éléments de $Is_F(N,\overline{F})$ est noté $F[Is_F(N,\overline{F})]$.
Si $v \in Is_F(N,\overline{F})$, $v \circ \gamma^{-1}$ appartient à $Is_F(N,\overline{F})$ pour tout $\gamma \in \Gamma$; $F[Is_F(N,\overline{F})]$ a donc une structure de $F[\Gamma]$-module telle que

$$\gamma \sum_{v \in Is_F(N,\overline{F})} x_v v = \sum_{v \in Is_F(N,\overline{F})} x_{v\circ\gamma} v = \sum_{v \in Is_F(N,\overline{F})} x_v v \circ \gamma^{-1}.$$

Soit N^Γ le sous-corps de N fixé par Γ ; le degré de N^Γ sur F est noté r ; r est le rang des deux $F[\Gamma]$-modules N et $F[Is_F(N,\overline{F})]$.

Sur $F[Is_F(N,\overline{F})]$, la forme F-bilinéaire symétrique non dégénérée telle que $Is_F(N,\overline{F})$ soit une base orthonormale est notée B_{Is}. Il est clair que cette forme est invariante par Γ.

Enfin soit $T_{N/F}$ l'application de $\overline{F} \otimes_F N$ dans $\overline{F}[Is_F(N,\overline{F})]$ définie par

$$T_{N/F}(k \otimes x) = k \sum_{v \in Is_F(N,\overline{F})} v(x)v.$$

L'application $T_{N/F}$ est une isométrie de $\overline{F} \otimes_F N$ sur $\overline{F}[Is_F(N,\overline{F})]$ munis respectivement des formes bilinéaires symétriques obtenues par extension des scalaires à partir de $Tr_{N/F}$ et B_{Is}. Le discriminant de $[N, Tr_{N/F}]$ est donné par le théorème :

Théorème A. *Soit N une extension de F, alors*

$$Disc([N, Tr_{N/F}] - [F[Is_F(N,\overline{F})], B_{Is}])$$

est représenté par la classe du 1-cocycle

$$g \longmapsto Det([\overline{F}[Is_F(N,\overline{F})], g])$$

où g désigne encore l'automorphisme de $\overline{F}[\Gamma]$-module de $\overline{F}[Is_F(N,\overline{F})]$ qui à $v \in Is_F(N,\overline{F})$ associe $g \circ v$.

Corollaire 1. *Supposons que F est le corps des invariants de Γ. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) Dans $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*))$

$$Disc([N, Tr_{N/F}] - [F[Is_F(N,\overline{F})], B_{Is}]) = 1.$$

ii) Pour tout sous-groupe Δ de Γ, la signature $\varepsilon_{\Gamma/\Delta}$ de l'action de Γ sur Γ/Δ est $+1$.
iii) Γ n'a pas de sous-groupe d'indice 2.
iv) Pour tout sous-groupe Δ distingué de Γ, Γ/Δ ne contient pas de 2-sous-groupe de Sylow cyclique non-trivial.

Ce corollaire généralise un résultat de P. E. Conner et R. Perlis [C-P, page 24]. En particulier, si Γ est abélien, i) est vérifié si et seulement si Γ est d'ordre impair. Les groupes d'ordre impair et les groupes simples vérifient évidemment ii) ; mais par exemple le groupe A_4 vérifie aussi ii).

COROLLAIRE 2. *Supposons que N/F est une extension totalement ramifiée de corps locaux de caractéristique résiduelle un nombre premier p. Le groupe Γ est le produit semi-direct de son p-sous-groupe de Sylow Γ_1 par un sous-groupe cyclique d'ordre premier avec p. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*
i) Dans $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*))$

$$Disc([N, Tr_{N/F}] - [F[Is_F(N, \overline{F})], B_{Is}]) = 1.$$

ii) Si p est impair ou Γ_1 trivial, le groupe Γ est d'ordre impair.
Si p est égal à 2 et Γ_1 est non trivial, le groupe Γ/Γ_1 n'est pas trivial et Γ_1 est le sous-groupe des commutateurs de Γ.

Supposons que F est égal à $\mathbb{Q}$. Soit N' la clôture galoisienne de N sur $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois noté Γ'. Pour tout caractère χ de Γ, notons χ' le caractère obtenu en relevant χ au groupe de Galois de N' sur N^Γ puis en induisant ce caractère à Γ'. Soit $W(\chi')$ la constante de l'équation fonctionnelle de la série d'Artin associée à χ'. En suivant P. Deligne qui normalise l'isomorphisme de la théorie du corps de classe en faisant correspondre les uniformisantes aux automorphismes de Frobenius géométriques [D], on a une relation de la forme (voir [Ta]) :

$$W(\chi')\tau(\chi') = W_\infty(\chi')\sqrt{f(\chi')}$$

où $\tau(\chi')$ est la somme de Gauss galoisienne et $f(\chi')$ est le conducteur d'Artin de χ' ; $W_\infty(\chi')$ est une racine quatrième de l'unité qui peut être considérée comme la racine carrée canonique de la partie à l'infini du conducteur (voir [T], formule 6.6, §0). L'application $\tau : \chi \longmapsto \tau(\chi')$ est un homomorphisme de $R(\Gamma)$ dans $\overline{\mathbb{Q}^*}$. A. Fröhlich [F1] a montré que l'action du groupe de Galois $G_\mathbb{Q}$ est telle que pour tout caractère χ de $R^s(\Gamma)$, $\forall g \in G_F$, $W_\infty(g(\chi')) = W_\infty(\chi') = \pm 1$, $g(\tau(g^{-1}(\chi'))) = \tau(\chi')$.

Ceci n'est plus vrai en général pour $\sqrt{f(\chi')}$; toutefois si l'extension N/N^{Γ} est modérément ramifiée $f(\chi')$ est un carré dans $\mathbb{Q}^*$, et $W(\chi')$ est aussi invariant sous l'action de $G_{\mathbb{Q}}$.

Théorème B. *Soit ∂ l'homomorphisme cohomologique*

$$Hom_{G_{\mathbb{Q}}}(R^s(\Gamma), \overline{\mathbb{Q}^*}) \xrightarrow{\partial} H^1(G_{\mathbb{Q}}, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{\mathbb{Q}^*}),$$

alors

$$Disc([N, Tr_{N/\mathbb{Q}}] - [\mathbb{Q}[Is_{\mathbb{Q}}(N, \overline{\mathbb{Q}})], B_{Is}]) = \partial(\tau).$$

Corollaire. *Soit disc l'invariant de $\tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(\mathbb{Q}[\Gamma]))$ à valeurs dans $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_{\mathbb{Q}}}(R(\Gamma), \overline{\mathbb{Q}}^*))$; $disc([N, Tr_{N/\mathbb{Q}}] - [\mathbb{Q}[Is_{\mathbb{Q}}(N, \overline{\mathbb{Q}})], B_{Is}])$ est représenté par la classe de l'homomorphisme $\chi \longmapsto f(\chi')det_{\chi'}(-1)$.*

Seul le cas semi-simple d'une algèbre de groupe sur un corps de caractéristique 0 est traité ici. Certains résultats s'étendent sans difficultés au cas d'une algèbre semi-simple sur un corps de caractéristique différente de 2. Les résultats non démontrés dans cet article sont connus et se trouvent éparpillés dans les articles donnés dans la bibliographie. Il m'est apparu intéressant de les regrouper autour du point de vue adopté dans cet article.

1. Classification des $F[\Gamma]$-modules quadratiques : notations et définitions

Soit F un corps commutatif de caractéristique 0 et soit Γ un groupe fini. L'algèbre de groupe $F[\Gamma]$ est donc semi-simple.

Définition 1.1. *La donnée d'un couple (V, b) où V est un $F[\Gamma]$-module de type fini et b est une F-forme bilinéaire symétrique, (resp. antisymétrique), non dégénérée invariante par Γ est appelée $F[\Gamma]$-module quadratique, (resp. symplectique).*

Soit V un $F[\Gamma]$-module (à gauche) de type fini ; le dual $Hom_F(V, F)$ de V est noté V^* ; soit $< \cdot, \cdot >$ l'application bilinéaire définie sur $V \oplus V^*$ par

$$\forall v \in V,\ \forall v^* \in V^* \ \ < v, v^* >= v^*(v).$$

L'ensemble V^* est muni d'une structure de $F[\Gamma]$-module à gauche en posant :

$$\forall \gamma \in \Gamma,\ \forall f \in V^*,\ \forall v \in V, \quad (\gamma f)(v) = f(\gamma^{-1}v).$$

Soit b une F-forme bilinéaire définie sur V et soit s_b l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} s_b : V &\longrightarrow V^* \\ x &\longmapsto (y \mapsto b(x,y)). \end{aligned}$$

La forme b est non dégénérée si et seulement si s_b est un isomorphisme. La forme b est invariante par Γ si et seulement si s_b est un homomorphisme de $F[\Gamma]$-module pour la structure de $F[\Gamma]$-module sur V^* définie ci-dessus.

Soient V et W deux $F[\Gamma]$-modules et soit $f \in Hom_{F[\Gamma]}(V,W)$; l'application transposée de f est notée ${}^t f$; elle appartient à $Hom_{F[\Gamma]}(W^*,V^*)$ et est définie par :

$$\forall v \in V,\ \forall w^* \in W^*, \quad < v, {}^t f(w^*) > = < f(v), w^* > .$$

En particulier, b est symétrique, (resp. antisymétrique), si et seulement si ${}^t s_b = s_b$, (resp. ${}^t s_b = -s_b$).

Soit $\mathcal{Q}(F[\Gamma])$, (resp. $\mathcal{S}(F[\Gamma])$), la catégorie suivante :

- les objets sont les $F[\Gamma]$-modules quadratiques, (resp. symplectiques),
- un morphisme de (V,b) dans (V',b') est un $F[\Gamma]$-homomorphisme φ de V dans V' tel que :

$$\forall x,y \in V,\ b'(\varphi(x),\varphi(y)) = b(x,y).$$

Si de plus φ est un isomorphisme, φ est appelé une isométrie et (V,b) et (V',b') sont dits isométriques. Le groupe des isométries de (V,b) dans lui-même est noté $O_{F[\Gamma]}(V,b)$ (ou plus simplement $O_{F[\Gamma]}(b)$).

Soit $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$, (resp. $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma]))$), le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathcal{Q}(F[\Gamma])$, (resp. $\mathcal{S}(F[\Gamma])$). Par un abus de notation, la classe d'isométrie du couple (V,b) est notée encore (V,b) ; le groupe $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$, (resp. $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma]))$), est le quotient du groupe abélien libre de base les classes d'isométries des objets de $\mathcal{Q}(F[\Gamma])$, (resp. $\mathcal{S}(F[\Gamma])$), par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme :

$$(V \oplus V',\ b \oplus b') - (V,b) - (V',b'),$$

où $b \oplus b'$ est la forme bilinéaire non dégénérée invariante par Γ, définie sur la somme directe $V \oplus V'$ par :

$$\forall v,w \in V,\ \forall v',w' \in V', \quad b \oplus b'((v,v'),(w,w')) = b(v,w) + b'(v',w').$$

La classe de (V, b) dans ce groupe est notée $[V, b]$. Tout élément de $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$, (resp. $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])))$, s'écrit sous la forme $[V, b] - [V', b']$.

Soit $\overline{F}$ une extension séparable de F ; le groupe des F-automorphismes de $\overline{F}$ est noté G_F. Par la suite, $\overline{F}$ sera le plus souvent une extension algébriquement close de F.

Si W est un $F[\Gamma]$-module et b une forme F-bilinéaire invariante par Γ ; soit $\overline{W} = \overline{F} \otimes_F W$; la forme b se prolonge en une forme $\overline{F}$-bilinéaire invariante par Γ sur $\overline{W}$, notée $\overline{b}$.

Le foncteur $(V, b) \longmapsto \overline{F} \otimes_F V$ induit un homomorphisme, noté ε, de $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$, (resp. $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])))$, dans $\mathcal{K}_0(\overline{F}[\Gamma])$, le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\overline{F}[\Gamma]$-modules de type fini.

Le noyau de cet homomorphisme se décrit à l'aide d'un groupe de Grothendieck relatif, construit de la façon suivante : soit $\mathcal{C}$ l'une des deux catégories $\mathcal{Q}(F[\Gamma])$ ou $\mathcal{S}(F[\Gamma])$. À $\mathcal{C}$ est associée la catégorie, notée $\overline{\mathcal{C}}_{rel}$, suivante :

- les objets de $\overline{\mathcal{C}}_{rel}$ sont les triplets $((V, b), \varphi, (V', b'))$ où (V, b) et (V', b') sont des objets de $\mathcal{C}$ et φ est un $\overline{F}[\Gamma]$-isomorphisme de $\overline{V}'$ sur $\overline{V}$,

- un morphisme de $((V_1, b_1), \varphi_1, (V_1', b_1'))$ dans $((V_2, b_2), \varphi_2, (V_2', b_2'))$ est un couple (f, g) où f et g sont des morphismes de $\mathcal{C}$, de (V_1, b_1) dans (V_2, b_2) et de (V_1', b_1') dans (V_2', b_2') respectivement, tels que $\varphi_2 \circ \overline{g} = \overline{f} \circ \varphi_1$ où $\overline{f}$ et $\overline{g}$ proviennent de f et g par extensions des scalaires de F à $\overline{F}$.

Le groupe $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C})$ est alors le quotient du groupe abélien libre de base les classes d'isomorphisme, encore notées $((V, b), \varphi, (V', b'))$, des objets $((V, b), \varphi, (V', b'))$ de $\overline{\mathcal{C}}_{rel}$ par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme :

$$((V \oplus W, b \oplus \beta), \varphi \oplus y, (V' \oplus W', b' \oplus \beta')) - ((V, b), \varphi, (V', b')) \\ -((W, \beta), y, (W', \beta'))$$

et les éléments de la forme :

$$((V, b), \varphi \circ \rho, (V', b')) - ((V, b), \varphi, ((W, \beta)) - ((W, \beta), \rho, (V', b')).$$

La classe de $((V, b), \varphi, (V', b'))$ dans $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C})$ est notée $[(V, b), \varphi, (V', b')]$. Si $\overline{F} = F$, ce groupe est noté plus simplement $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{C})$. Pour tout élément x de $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C})$, il existe (V, b) et (V', b') deux objets de $\mathcal{C}$ et un $\overline{F}[\Gamma]$-isomorphisme φ de $\overline{V}'$ sur $\overline{V}$ tels que $x = [(V, b), \varphi, (V', b')]$.

Soit U un $F[\Gamma]$-module (à gauche) de type fini ; $U^* = Hom_F(U, F)$ est muni de la structure de $F[\Gamma]$-module à gauche définie précédemment.

Soit sur $U \oplus U^*$ la forme bilinéaire symétrique, (resp. antisymétrique), suivante :

$$\forall u, v \in U,\ \forall u^*, v^* \in U^*, \qquad h_+((u,u^*),(v,v^*)) = u^*(v) + v^*(u),$$
$$(\text{resp. } h_-((u,u^*),(v,v^*)) = u^*(v) - v^*(u)).$$

Pour l'action de Γ sur U^* définie ci-dessus, la forme h_+, (resp. h_-), est invariante par Γ. Le module quadratique (resp. symplectique) ainsi défini est noté $H_+(U)$, (resp. $H_-(U)$), et appelé module hyperbolique, la forme h_+, (resp. h_-), étant appelée forme hyperbolique.

Pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(F[\Gamma])$, (resp. $\mathcal{S}(F[\Gamma])$), le groupe de Witt de $\mathcal{C}$, noté $\mathcal{W}(\mathcal{C})$, est le quotient de $\mathcal{K}_0(\mathcal{C})$ par le sous-groupe engendré par les modules hyperboliques quadratiques, (resp. symplectiques).

Soit $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ le groupe de Whitehead de la catégorie des $\overline{F}[\Gamma]$-modules de type fini. Il est engendré par les paires (V, α) où V est un $\overline{F}[\Gamma]$-module de type fini et α est un $\overline{F}[\Gamma]$-automorphisme de V.

Si V est un $\overline{F}[\Gamma]$-module de type fini, il existe un $\overline{F}[\Gamma]$-module V' de type fini et un $F[\Gamma]$-module quadratique, (resp. symplectique), (U, b) tels que

$$V \oplus V' = \overline{F} \otimes_F U,$$

(choisir U_0 et V_0' tels que $V \oplus V_0' = \overline{F} \otimes_F U_0$ (voir [Q1], §2) puis prendre $U = U_0 \oplus U_0^*$ muni de la forme hyperbolique correspondante, alors

$$V' = V_0' \oplus (\overline{F} \otimes_F Hom_F(U_0, F))$$

répond à la question).

L'élément $[(U,b), \alpha \oplus 1_{V'}, (Ub)]$ de $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C})$ ne dépend que de (V, b). Ceci définit ainsi un homomorphisme, noté δ, de $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ dans $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C})$ (voir [H] p. 395).

En particulier soient U un $F[\Gamma]$-module de type fini et α un $\overline{F}[\Gamma]$-automorphisme de $\overline{U}$. Si U est muni d'une forme bilinéaire b non dégénérée invariante par Γ, symétrique ou antisymétrique, alors

$$\delta([\overline{U}, \alpha]) = [(U,b), \alpha, (U,b)],$$

(en effet soit h la forme hyperbolique égale à h_+ si b est symétrique et à h_- si b est antisymétrique ; elle est définie sur $U \oplus U^*$; alors l'application :

$$(u, v) \longmapsto ((u+v)/2, s_b(u) - s_b(v))$$

est une isométrie de $(U \oplus U, b \oplus (-b))$ sur $(U \oplus U^*, h))$.

Pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(F[\Gamma])$, (resp. $\mathcal{S}(F[\Gamma])$), soit $\mathcal{K}_1(\mathcal{C})$ le quotient du groupe abélien libre de base les classes d'isométries des objets $((V,b),\varphi)$ où (V,b) est un objet de $\mathcal{C}$ et φ est une isométrie de (V,b) dans lui-même, par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme :

$$((V \oplus V', b \oplus b'), \varphi \oplus \varphi') - ((V,b),\varphi) - ((V',b'),\varphi')$$

et les éléments de la forme :

$$((V,b),\varphi \circ \rho) - ((V,b),\rho) - ((V,b),\varphi).$$

Ici deux objets $((V,b),\varphi)$ et $((V',b'),\varphi')$ sont dits isométriques s'il existe une isométrie f de (V,b) sur (V',b') telle que $\varphi' \circ f = f \circ \varphi$.

Le foncteur d'oubli donne un homomorphisme de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{K}_1(F[\Gamma])$ et par extension des scalaires de F à $\overline{F}$, il induit un homomorphisme de $\mathcal{K}_1(\mathcal{C})$ dans $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ qui avec les notations précédentes associe donc à la classe de $((V,b),\varphi)$ la classe du couple $(\overline{V}, \overline{\varphi})$.

Des résultats de A. Heller [H] découle le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. *Pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(F[\Gamma])$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{S}(F[\Gamma])$, la suite suivante est exacte :*

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\nu} \mathcal{K}_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{K}_0(\overline{F}[\Gamma])$$

où ε est défini par

$$\varepsilon([(V,v),\varphi,(V',b')]) = [V',b'] - [V,b].$$

Démonstration. voir A. Heller [H], propositions 4.1, 5.1, 5.2.

DÉFINITION 1.3. *Le noyau de ε est appelé groupe des classes quadratiques, (resp. symplectiques), de $F[\Gamma]$; il est engendré par les éléments de la forme $[V,b] - [V',b']$ où V et V' sont deux $F[\Gamma]$-modules isomorphes.*

Ce groupe est noté $\tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{C})$ pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(F[\Gamma])$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{S}(F[\Gamma])$.

La suite ci-dessous est exacte :

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\nu} \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{C}) \longrightarrow 0.$$

Cas particuliers - Exemples.

1) Supposons que $\Gamma = \{1\}$. L'application de dimension induit un isomorphisme, noté dim, de $\mathcal{K}_0(F)$ sur $\mathbb{Z}$. L'application déterminant induit un isomorphisme, noté det, de $\mathcal{K}_1(F)$ sur F^*.

2) Supposons que $\Gamma = \{1\}$, que $\overline{F}$ est algébriquement clos et que $F = \overline{F}$. L'application ε est un isomorphisme de $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(\overline{F}))$ sur $\mathcal{K}_0(\overline{F})$. L'application de $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}))$ dans $\mathcal{K}_1(\overline{F})$ est injective et par restriction à $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}))$ l'application det donne un isomorphisme de $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}))$ sur $\{\pm 1\}$. Donc l'application det se factorise en un isomorphisme, noté d, de $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(\overline{F}))$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F})) \arrow[r] \arrow[d, "det"] & \mathcal{K}_1(\overline{F}) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "det"] & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F})) \arrow[r] \arrow[d, "d"] & 1 \\
1 \arrow[r] & \{\pm 1\} \arrow[r] & \overline{F}^* \arrow[r, "x \longmapsto x^2"'] & \overline{F}^* \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Plus précisement, soit $[(V,b),\varphi,(V',b')] \in \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}))$; φ est un $\overline{F}$-isomorphisme de V dans V'. Comme ε est injectif et que $\overline{F}$ est supposé algébriquement clos, il existe α une isométrie de (V,b) sur (V',b'). Par définition de $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}))$, $[(V,b),\alpha,(V',b')] = 0$; d'où

$$[(V,b),\varphi,(V',b')] = [(V,b),(\alpha^{-1}\circ\varphi),(V,b)] = \delta([V,(\alpha^{-1}\circ\varphi]).$$

Alors

$$d([(V,b),\varphi,(V',b')]) = det([V,(\alpha^{-1}\circ\varphi)^2]).$$

Application numérique. Soit $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1,\cdots,dim(V)}$ une base de V, soit $disc(b,\mathcal{B}) = det((b(e_i,e_j)_{i,j}) = det(s_b,\mathcal{B}^*,\mathcal{B})$, où $\mathcal{B}^*$ désigne la base duale de $\mathcal{B}$.
Alors pour la base $\mathcal{B}' = \varphi(\mathcal{B})$ de V' :

$$d([(V,b),\varphi,(V',b')]) = disc(b',\mathcal{B}')/disc(b,\mathcal{B}).$$

En effet comme $\varphi(\mathcal{B})^* = {}^t\varphi(\mathcal{B}^*)$ et ${}^t\alpha\circ s_{b'}\circ\alpha = s_b$, d'où

$$\begin{aligned}
det(s_{b'},\varphi(\mathcal{B})^*,\varphi(\mathcal{B})) &= det(s_{b'},{}^t\varphi^{-1}(\mathcal{B}^*),\varphi(\mathcal{B})) \\
&= det({}^t\varphi\circ s_{b'}\circ\varphi,\mathcal{B}^*,\mathcal{B}) \\
&= det({}^t\varphi\circ{}^t\alpha^{-1}\circ s_b\circ\alpha^{-1}\circ\varphi,\mathcal{B}^*,\mathcal{B}) \\
&= det({}^t\varphi\circ{}^t\alpha,\mathcal{B},\mathcal{B}^*)det(s_b,\mathcal{B}^*,\mathcal{B})det(\alpha^{-1}\circ\varphi,\mathcal{B}^*,\mathcal{B}).
\end{aligned}$$

Le résultat découle alors de l'égalité

$$det({}^t\varphi \circ {}^t\alpha^{-1}, \mathcal{B}, \mathcal{B}^*) = det(\alpha^{-1} \circ \varphi, \mathcal{B}^*, \mathcal{B}).$$

3) Supposons que $\Gamma = \{1\}$. L'application ε composée avec l'application dim donne un isomorphisme de $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F))$ sur $2\mathbb{Z}$. Le groupe $\mathcal{K}_1(\mathcal{S}(F))$ est trivial. L'application δ de $\mathcal{K}_1(F)$ dans $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{S}(F))$ est donc un isomorphisme.

DÉFINITION 1.4. *L'isomorphisme $det \circ \delta^{-1}$ de $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{S}(F))$ sur F^* est appelé Pfaffien et noté Pf.*

$$Pf \ : \ \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{S}(F)) \longrightarrow F^*.$$

Plus précisement, soit $[(V,b), \varphi, (V',b')] \in \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{S}(F))$; φ est un F-isomorphisme de V dans V'. Comme ε est injectif, il existe α une isométrie de (V,b) sur (V',b'). Alors

$$Pf([(V,b), \varphi, (V',b')]) = det([V, (\alpha^{-1} \circ \varphi)]).$$

Soit b_1 la forme antisymétrique définie sur V par :

$$b_1(v,v') = b(\alpha^{-1} \circ \varphi(v), \alpha^{-1} \circ \varphi(v')).$$

D'après la proposition 1, n° 2, §5 de [Bo], pour la notion de pfaffien classique

$$Pf(b_1) = det(\alpha^{-1} \circ \varphi) Pf(b).$$

4) Supposons que $F = \overline{F}$ et que $\overline{F}$ est algébriquement clos. Pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])$ ou $\mathcal{C} = \mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma])$ l'application ε est injective. Le groupe $\mathcal{K}_0(\overline{F}[\Gamma])$ s'identifie au groupe des caractères, noté $R[\Gamma]$, de Γ à valeurs dans $\overline{F}$. Il admet pour base l'ensemble, noté $Irr(\Gamma)$, des caractères irréductibles, correspondant aux classes des $\overline{F}[\Gamma]$-modules irréductibles. Soit $R^o(\Gamma)$, (resp. $R^s(\Gamma)$), l'image de $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$, (resp. $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$), dans $R(\Gamma)$.

Soit χ le caractère d'un $\overline{F}[\Gamma]$-module V ; soit $\overline{\chi}$ le caractère défini par :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \overline{\chi}(\gamma) = \chi(\gamma^{-1}).$$

C'est le caractère de V^*. Ceci définit une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $R(\Gamma)$. En conséquence, il existe sur V une forme bilinéaire non dégénérée invariante par Γ si et seulement si $\chi = \overline{\chi}$. D'où

$$R^o(\Gamma) + R^s(\Gamma) = \{\chi \in R(\Gamma), \chi = \overline{\chi}\}.$$

Si χ est irréductible, toute forme non nulle est non dégénérée, et unique à homothétie près, car $End_{\overline{F}[\Gamma]}(V) = \overline{F}$. Classiquement les caractères irréductibles se distinguent en trois types :

type 0 : $\chi \neq \overline{\chi}$ et il n'existe pas sur V de forme bilinéaire invariante par Γ. Les modules hyperboliques $H_+(V)$ et $H_-(V)$ sont indécomposables. Un système de représentants des orbites des caractères irréductibles de *type* 0 pour l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est noté $Irr^0(\Gamma)$.

type 1 : $\chi = \overline{\chi}$ et il existe sur V une forme bilinéaire non dégénérée symétrique invariante par Γ ; le module hyperbolique $H_-(V)$ est indécomposable ; χ est appelé un caractère orthogonal. L'ensemble des caractères irréductibles de *type* 1 est noté $Irr^+(\Gamma)$.

type -1 : $\chi = \overline{\chi}$ et il existe sur V une forme bilinéaire non dégénérée antisymétrique invariante par Γ ; le module hyperbolique $H_+(V)$ est indécomposable ; χ est appelé un caractère symplectique. L'ensemble des caractères irréductibles de *type* -1 est noté $Irr^-(\Gamma)$.

Exemple. Cet exemple permet à la fois de décrire la structure des groupes de caractères qui interviennent par la suite et de rassembler les résultats connus sur la forme bilinéaire symétrique canonique Tr de $\overline{F}[\Gamma]$ en donnant ainsi des exemples de modules quadratiques et symplectiques.

Si $\lambda \in \overline{F}[\Gamma]$, soit $\overline{\lambda}$ l'image de λ par l'involution induite par l'application qui à $\gamma \in \Gamma$ associe γ^{-1}. Soit tr l'application de $\overline{F}[\Gamma]$ dans $\overline{F}$ donnée par la trace du $\overline{F}$-endomorphisme de $\overline{F}[\Gamma]$ défini par la multiplication. L'application $(\lambda, \mu) \longmapsto tr(\lambda\overline{\mu})$ est une forme bilinéaire définie sur $\overline{F}[\Gamma]$, symétrique non dégénérée invariante par Γ, notée Tr. Si $d \in \overline{F}[\Gamma]$, la forme bilinéaire, invariante par Γ, $(\lambda, \mu) \longmapsto tr(\lambda d\overline{\mu})$ est notée Tr_d.
Soit χ un caractère irréductible de $R(\Gamma)$; à χ correspond un unique facteur simple A_χ de l'algèbre semi-simple $\overline{F}[\Gamma]$; cette algèbre simple est associée à l'idempotent central :

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|\Gamma|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \chi(\gamma)\gamma^{-1} \ ;$$

le centre de A_χ est égal à $\overline{F}e_\chi$; soit $(n_\chi)^2$ la dimension de A_χ sur $\overline{F}$. L'algèbre simple A_χ est stable par l'involution si et seulement si $\chi = \overline{\chi}$.

Si χ est de *type* 0, l'involution $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ est un isomorphisme de A_χ sur l'algèbre opposée de $A_{\overline{\chi}}$. La restriction de la forme bilinéaire symétrique Tr à tout idéal minimal I_χ de A_χ est nulle.
L'idéal $\overline{I}_\chi$ est un idéal de $A_{\overline{\chi}}$, $(I_\chi \oplus \overline{I}_\chi, Tr)$ est isométrique au module hyperbolique $H_+(I_\chi)$. Pour $d = e_\chi - e_{\overline{\chi}} = -\overline{d}$, $(I_\chi \oplus \overline{I}_\chi, Tr_d)$ est isométrique

au module hyperbolique $H_-(I_\chi)$. D'où $(A_\chi \oplus A_{\overline{\chi}}, Tr)$ est somme orthogonale de n_χ modules quadratiques $(I_\chi \oplus \overline{I}_\chi, Tr)$ isométriques entre eux.

Si χ est de *type* -1, la restriction de la forme bilinéaire symétrique Tr à tout idéal minimal I_χ de A_χ est nulle ; I_χ est engendré par un idempotent e tel que $e\overline{e} = 0$. Soit $e' = e - \overline{e}e/2$ et $I'_\chi = \overline{F}[\Gamma]e'$; alors $(I'_\chi \oplus \overline{I}_\chi, Tr)$ est isométrique au module hyperbolique $H_+(I'_\chi)$. L'application s_{Tr} induit un $\overline{F}[\Gamma]$-isomorphisme de $\overline{I'}_\chi$ sur $(I'_\chi)^*$. Soit b une forme bilinéaire non nulle antisymétrique sur I'_χ ; s_b est un $\overline{F}[\Gamma]$-isomorphisme de I'_χ sur $(I'_\chi)^*$ donc $(s_{Tr})^{-1} \circ s_b$ est un $\overline{F}[\Gamma]$-isomorphisme de I'_χ sur $\overline{I'}_\chi$. Si $d = ((s_{Tr})^{-1} \circ s_b)(e')$, $(s_{Tr})^{-1} \circ s_b$ est la multiplication à droite par d ; $Tr_d = b$; $e'd = \overline{d}$, $e' = d = -\overline{d}$; donc (I'_χ, Tr_d) est un module symplectique. L'entier n_χ est pair ; (A_χ, Tr) est somme orthogonale de $n_\chi/2$ modules hyperboliques $(I'_\chi \oplus \overline{I'}_\chi, Tr)$ isométriques entre eux.

Si χ est de *type* 1, la restriction de la forme bilinéaire symétrique Tr à tout idéal minimal I_χ de A_χ est non dégénérée. En effet soit I_χ un idéal minimal tel que la restriction de Tr soit nulle. Un raisonnement analogue au précédent, montre qu'il existe un idéal minimal I'_χ tel que $(I'_\chi \oplus \overline{I'}_\chi, Tr)$ soit hyperbolique ; donc la restriction de Tr à I'_χ est nulle. Par le même raisonnement, il existe $d \in \overline{I'}_\chi$ tel que $e'd = d\overline{e}' = d = \overline{d}$; $f = e' + d$ est un idempotent tel que $f\overline{f} = 2d \neq 0$; la restriction de Tr à $(I'_\chi \oplus \overline{I'}_\chi)f = I'_\chi$ est donc non nulle ; ce qui établit une contradiction. D'où (A_χ, Tr) est somme orthogonale de n_χ modules quadratiques (I_χ, Tr) isométriques entre eux.

Soit T l'application de $R(\Gamma)$ dans lui-même qui à un caractère χ associe $\chi + \overline{\chi}$. Alors $T(R(\Gamma)) = R^o(\Gamma) \cap R^s(\Gamma)$.

Une base de $R^o(\Gamma)$ est donnée par l'ensemble des caractères de *type* 1 et des caractères $\chi + \overline{\chi}$ où χ est de *type* 0 et de *type* -1.

Une base de $R^s(\Gamma)$ est donnée par l'ensemble des caractères de *type* -1 et des caractères $\chi + \overline{\chi}$ où χ est de *type* 0 et de *type* 1.

De plus $\mathcal{W}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$, (resp. $\mathcal{W}(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$), est un F_2- espace vectoriel dont une base est donnée par les classes des caractères de *type* 1, (resp. de *type* -1), (voir [F-McE], §4). Dans la suite ce groupe sera noté plus simplement $\mathcal{W}^o(\Gamma)$, (resp. $\mathcal{W}^s(\Gamma)$).

Le groupe $T(R(\Gamma))$ est le sous-groupe de $R(\Gamma)$ engendré par les modules hyperboliques. Donc :

$$\mathcal{W}^o(\Gamma) = R^o(\Gamma)/R^o(\Gamma) \cap R^s(\Gamma) = R^o(\Gamma)/T(R(\Gamma)),$$
$$\mathcal{W}^s(\Gamma) = R^s(\Gamma)/R^o(\Gamma) \cap R^s(\Gamma) = R^s(\Gamma)/T(R(\Gamma)).$$

Les deux suites suivantes sont donc exactes :

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}^o(\Gamma) \longrightarrow R(\Gamma)/R^s(\Gamma) \longrightarrow R(\Gamma)/(R^o(\Gamma)+R^s(\Gamma)) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{W}^s(\Gamma) \longrightarrow R(\Gamma)/R^o(\Gamma) \longrightarrow R(\Gamma)/(R^o(\Gamma)+R^s(\Gamma)) \longrightarrow 0.$$

Le groupe $R(\Gamma)/(R^o(\Gamma)+R^s(\Gamma))$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de base l'ensemble des classes des caractères χ de *type* 0, (la classe dans ce groupe de $\overline{\chi}$ étant égale à celle de $-\chi$).

Le groupe $\mathcal{W}^o(\Gamma)$, (resp. $\mathcal{W}^s(\Gamma)$), s'identifie au sous-groupe de torsion de $R(\Gamma)/R^s(\Gamma)$, (resp. $R(\Gamma)/R^o(\Gamma)$).

La description de $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ se fait par dualité de la façon suivante : soit χ un caractère de Γ associé à un $\overline{F}[\Gamma]$-module W et soit $[V,\alpha] \in \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$. À $([V,\alpha],\chi)$ est associé le déterminant de l'automorphisme $f \longmapsto \alpha \circ f$, noté α_W, de $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,V)$. Avec cette notation, pour α et β automorphismes de V,

$$\alpha_W \circ \beta_W = (\alpha \circ \beta)_W.$$

Ceci définit une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire du produit cartésien $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \times R(\Gamma)$ dans $\overline{F}^*$ et par dualité un homomorphisme, noté Det :

$$Det \ : \ \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \longrightarrow Hom(R(\Gamma), \overline{F}^*).$$

Cet homomorphisme est un isomorphisme (voir [Q1] et l'annexe).

2. Pfaffien

En plus des notations et hypothèses du paragraphe 1, $\overline{F}$ est supposée être une extension algébriquement close de F. Le Pfaffien est un outil permettant de calculer $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ puis $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$.

Soit (V,b) un $F[\Gamma]$-module quadratique et soit (W,h) un $\overline{F}[\Gamma]$-module symplectique.

Soit sur $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V})$ la forme antisymétrique non dégénérée, notée b_h, définie par :

$$\forall f,g \in Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}),\ b_h(f,g) = Tr({}^t s_h^{-1} \circ {}^t f \circ \overline{s}_b \circ g).$$

Soit $\chi = [W,h] \in R^s(\Gamma) = \mathcal{K}_0(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$ et soit $x = [(V,b),\varphi,(V',b')]$ un élément de $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$. Le $\overline{F}[\Gamma]$-isomorphisme φ de V sur V' induit un $\overline{F}$-isomorphisme de $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V})$ sur $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}')$ qui à f associe $\varphi \circ f$; il est noté φ_W. Ainsi l'élément

$$[(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}),b_h),\varphi_W,(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}'),b'_h)]$$

appartient-il à $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{S}(\overline{F}))$. Ce dernier groupe s'identifie grâce à l'application Pf à $\overline{F}^*$ (définition 1.4).

Le prolongement par linéarité induit une application $\mathbb{Z}$-bilinéaire de $R^s(\Gamma) \times \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ dans $\overline{F}^*$. Par dualité, elle donne donc un homomorphisme, encore noté Pf et appelé Pfaffien, de $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ dans $Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$ caractérisé par la relation :

$$\forall x = [(V,b), \varphi, (V',b')] \in \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])), \forall \chi = [W,h] \in R^s(\Gamma),$$
$$Pf_\chi(x) = Pf([(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}), b_h), \varphi_W, (Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}'), b'_h)]).$$

Proposition 2.1.

Soit Det l'isomorphisme de $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ dans $Hom(R(\Gamma), \overline{F}^*)$ défini dans [Q1], (voir l'annexe sur l'équivalence de Morita).

1) $\forall \chi \in R^s(\Gamma)$, $\forall x \in \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$, $Pf_\chi(\delta(x)) = Det_\chi(x)$.

2) Soit $x = [(V,b), \varphi, (V',b')] \in \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$.

a) Il existe α une isométrie de $(\overline{V}, \overline{b})$ sur $(\overline{V}', \overline{b}')$ donc telle que

$$\forall x, y \in \overline{V},\ \overline{b}'(\alpha(x), \alpha(y)) = \overline{b}(x,y).$$

Alors

$$\forall \chi \in R^s(\Gamma),\ Pf_\chi([(V,b), \varphi, (V',b')]) = Det_\chi([\overline{V}, \alpha^{-1} o \varphi]).$$

b) Il existe $\beta \in Aut_{\overline{F}[\Gamma]}(\overline{V})$ tel que

$$\forall x, y \in \overline{V},\ \overline{b}'(\varphi(x), \varphi(y)) = \overline{b}(\beta(x), y)$$
$$\text{i.e. } {}^t\varphi \circ \overline{s}_{b'} \circ \varphi = {}^t\beta \circ \overline{s}_b = \overline{s}_b \circ \beta.$$

Alors

$$\begin{aligned}\forall \chi \in R(\Gamma),\ Pf_{\chi+\overline{\chi}}([(V,b), \varphi, (V',b')]) &= Det_\chi([\overline{V}, \beta]) = Det_{\overline{\chi}}([\overline{V}, \beta]) \\ &= Det_{\chi+\overline{\chi}}([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi]).\end{aligned}$$

Démonstration.

1) Soit $x = [V, \alpha] \in \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ et soit $\chi = [W,h]$ appartenant à $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$. Il existe un $\overline{F}[\Gamma]$-module V' et un $F[\Gamma]$-module quadratique (U,b) tels que $V \oplus V' = \overline{F}[\Gamma] \otimes_F U$. Par définition de δ :

$$\delta(x) = [(U,b), \alpha \oplus 1_{V'}, (U,b)]$$

et par définition du Pfaffien :

$$
\begin{aligned}
&Pf_\chi(\delta(x))\\
&\qquad = det \circ \delta^{-1}([Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{U}),b_h),(\alpha \oplus 1_{V'})_W,(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{U}),b_h)])\\
&\qquad = det([Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,V) \oplus Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,V'),\overline{\alpha}_W \oplus (1_{V'})_W])\\
&\qquad = det([Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,V),\overline{\alpha}_W])\\
&\qquad = Det_\chi(x).
\end{aligned}
$$

2) Soit $x = [(V,b),\varphi,(V',b') \in \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$.

a) Soit $\chi = [W,h] \in \mathcal{K}_0(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$;
α_W est une isométrie de $(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}),b_h)$ sur $(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}'),b'_h)$. Comme $(\alpha^{-1}\circ\varphi)_W = (\alpha_W)^{-1}\circ\varphi_W$, par définition du Pfaffien,

$$Pf_\chi(x) = det(\alpha_W^{-1}\circ\varphi_W) = Det_\chi([\overline{V},\alpha^{-1}\circ\varphi]).$$

b) Soit $\chi = [W] \in \mathcal{K}_0(\overline{F}[\Gamma])$; alors $\overline{\chi} = [W^*]$;
$Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W\oplus W^*,\overline{V})$ s'identifie à $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V})\oplus Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W^*,\overline{V})$. La somme directe $W\oplus W^*$ est munie de la forme hyperbolique h ; donc

$$
\begin{aligned}
&\forall f,g \in Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,\overline{V}),\ \forall f^*,g^* \in Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W^*,\overline{V}),\\
&\qquad b_h((f,f^*),(g,g^*)) = Tr\begin{pmatrix} {}^tf^*\circ s_b\circ g & {}^tf^*\circ s_b\circ g^*\\ -{}^tf\circ s_b\circ g & -{}^tf\circ s_b\circ g^*\end{pmatrix}\\
&\qquad\qquad = Tr({}^tf^*\circ s_b\circ g) - Tr({}^tf\circ s_b\circ g^*).
\end{aligned}
$$

Posons $U = W\oplus W^*$. L'application $((\varphi\oplus\varphi)\circ(1\oplus\beta^{-1}))_U$ est une isométrie de $(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W\oplus W^*,\overline{V}),b_h)$ sur $(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W\oplus W^*,\overline{V}'),b'_h)$. En effet

$$
\begin{aligned}
&b'_h((\varphi\circ f,\varphi\circ\beta^{-1}\circ f^*),(\varphi\circ g,\varphi\circ\beta^{-1}\circ g^*)) =\\
&\qquad Tr({}^tf^*\circ{}^t\beta^{-1}\circ{}^t\varphi\circ s_{b'}\circ\varphi\circ g) - Tr({}^tf\circ{}^t\varphi\circ s_{b'}\circ\varphi\circ\beta^{-1}\circ g^*).
\end{aligned}
$$

De la définition de β et du fait que b et b' sont des formes symétriques découle que ${}^t\varphi\circ s_{b'}\circ\varphi = s_b\circ\beta = {}^t\beta\circ s_b$. Donc

$$
\begin{aligned}
Pf_{\chi+\overline{\chi}}([(V,b),\varphi,(V',b')]) &= det((((\varphi\oplus\varphi)\circ(1\oplus\beta^{-1}))_U)^{-1}\circ(\varphi\oplus\varphi)_U)\\
&= det((1\oplus\beta)_U) = Det_\chi([\overline{V},b]).
\end{aligned}
$$

Théorème 2.2. - *1) La suite suivante est exacte :*

$$1 \longrightarrow \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \longrightarrow \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \xrightarrow{\delta} \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \longrightarrow 0.$$

2) L'application Det se factorise en un isomorphisme de $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ sur $Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$. Cet isomorphisme est le Pfaffien.
3) Il existe un isomorphisme, encore noté Det, de $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ sur $Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) & \longrightarrow & \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) & \longrightarrow & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle Det} & & \downarrow{\scriptstyle Det} & & \downarrow{\scriptstyle Pf} & & \\
1 & \longrightarrow & Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*) & \longrightarrow & Hom(R(\Gamma), \overline{F}^*) & \longrightarrow & Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Démonstration.
1) De la suite

$$0 \longrightarrow R^s(\Gamma) \longrightarrow R(\Gamma) \longrightarrow R(\Gamma)/R^s(\Gamma) \longrightarrow 0$$

découle une suite exacte :

$$1 \longrightarrow Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \longrightarrow Hom(R(\Gamma), \overline{F}^*) \longrightarrow Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*).$$

Soit $f \in Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$; un relèvement f_1 de f peut être construit en déterminant f_1 sur la base de $R(\Gamma)$ formée des caractères irréductibles en distinguant leur type :

Si χ est du *type* 1, 2χ est un caractère symplectique ; soit $\sqrt{f(2\chi)}$ une racine carrée de $f(2\chi)$; $f_1(\chi) = \sqrt{f(2\chi)}$.

Si χ est du *type* -1, $f_1(\chi) = f(\chi)$.

Si χ est du *type* 0, $f_1(\chi) = f(\chi + \overline{\chi}), f_1(\overline{\chi}) = 1$.

2) Soient $[(V,b),\alpha] \in \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ et soit $(W,h) \in \mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma])$; $(\overline{\alpha})_W$ est une isométrie du $\overline{F}$-espace vectoriel $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W, \overline{V})$ muni de la forme antisymétrique b_h. En effet ${}^t\alpha \circ s_b \circ \alpha = s_b$; d'où

$$\begin{aligned}
b_h(\alpha \circ f, \alpha \circ g) &= Tr({}^t s_h^{-1} \circ {}^t(\alpha \circ f) \circ s_b \circ \alpha \circ g) \\
&= Tr({}^t s_h^{-1} \circ {}^t f \circ {}^t\alpha \circ s_b \circ \alpha \circ g) \\
&= b_h(f,g).
\end{aligned}$$

Donc $Det_{[W]}([V,\alpha]) = 1$ et l'image de $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])$ dans $Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$ est triviale. L'application Det induit donc un isomorphisme de $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])$ dans $Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$.

3) Montrons que $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ s'injecte dans $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$. Tout élément x de $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ s'écrit sous la forme $\sum_{V\in S}[V^n, b_V, \alpha_V]$ où S est un système de représentants des classes d'isométries des $\overline{F}[\Gamma]$-modules quadratiques indécomposables. Comme $\overline{F}$ est supposé algébriquement clos, V est soit un $\overline{F}[\Gamma]$-module simple de commutant isomorphe à $\overline{F}$, soit un $\overline{F}[\Gamma]$-module hyperbolique associé à un $\overline{F}[\Gamma]$-module simple de commutant isomorphe à $\overline{F}$ (voit [E], 2.3 et 2.4). Supposons que l'image de x dans $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ soit triviale ; donc que $Det(\sum_{V\in S}[V^n, b_V, \alpha_V]) = 1$.

Si V est simple, V est muni d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante par Γ ; $Det_{[V]}(x) = Det_{[V]}([V^n, \alpha_V]) = det(\alpha_V) = 1$; donc α_V appartient à $SO(Hom_{F[\Gamma]}(V, V^n), (b_V)_h)$ qui, comme $\overline{F}$ est algébriquement clos, est égal au groupe des commutateurs de $O(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(V, V^n), (b_V)_h)$. Donc par équivalence de Morita

$$[V^n, b_V, \alpha_V] = 0.$$

Supposons que $V = W \oplus W^*$ est un module hyperbolique avec W simple. Si $[W] \neq [W^*]$, alors $\alpha_V = \alpha_W \oplus {}^t\alpha_W^{-1}$. Par hypothèse

$$Det_{[W]}(x) = Det_{[W]}([V^n, \alpha_V]) = det(\alpha_W) = 1 \ ;$$

donc α_W appartient au groupe des commutateurs de $End_{F[\Gamma]}(W)$. Il est clair que $O_{F[\Gamma]}(b_V)$ contient les éléments de la forme $\beta_W \oplus {}^t\beta_W^{-1}$. Donc

$$[V^n, b_V, \alpha_V] = 0.$$

Si $[W] = [W^*]$, alors W est muni d'une forme antisymétrique h non dégénérée invariante par Γ ; α_V induit sur $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W, V^n)$ un automorphisme qui laisse la forme antisymétrique b_h invariante ; c'est donc un commutateur car $\mathcal{K}_1(\mathcal{S}(\overline{F}))$ est trivial. Donc par équivalence de Morita

$$[V^n, b_V, \alpha_V] = 0.$$

4) Reste à montrer que l'application Det induit une surjection de $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ sur $Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*)$. Un système de générateurs de $R(\Gamma)/R^s(\Gamma)$ est donné par les classes des caractères orthogonaux irréductibles et les classes des caractères de *type* 0. Le résultat découle alors du fait que les homothéties de rapport 1 et -1 sont des isométries et que toute homothétie de rapport non nul est une isométrie sur un module hyperbolique.

Exemple. Pour $\Gamma = \{1\}$, le diagramme précédent devient :

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F})) & \longrightarrow & \mathcal{K}_1(\overline{F}) & \longrightarrow & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F})) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle det} & & \Big\downarrow{\scriptstyle det} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Pf(=d)} & & \\
1 & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & \overline{F}^* & \longrightarrow & \overline{F}^* & \longrightarrow & 1,
\end{array}$$

l'application de $\overline{F}^*$ dans lui-même étant $x \longmapsto x^2$; à l'aide de la partie 2.b de la proposition 2.1, ceci donne une nouvelle démonstration du résultat de l'exemple 2 du paragraphe 1.

Remarque. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \longrightarrow R(\Gamma)/R^s(\Gamma) \longrightarrow R(\Gamma)/(R^o(\Gamma) + R^s(\Gamma)) \longrightarrow 0$$

découle une suite exacte :

$$0 \longrightarrow Hom(R(\Gamma)/(R^o(\Gamma) + R^s(\Gamma)), \overline{F}^* \longrightarrow \\ Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \longrightarrow Hom(\mathcal{W}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]), \{\pm 1\}) \longrightarrow 1.$$

Ces suites exactes sont scindées car $R(\Gamma)/(R^o(\Gamma)+R^s(\Gamma))$ est un $\mathbb{Z}$-module libre. Cette dernière suite donne donc une description de la partie libre et de la partie de torsion de $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])$.

Soit $\overline{\mathcal{K}}^{iso}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ le groupe de Grothendieck relatif classifiant les objets de la forme $[(V,b), \alpha, (V',b')]$ où α est une isométrie de $(\overline{V}, \overline{b})$ sur $(\overline{V}', \overline{b}')$. Ce groupe est aussi défini par la suite exacte :

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \longrightarrow \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \longrightarrow \\ \overline{\mathcal{K}}^{iso}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \longrightarrow \mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])).$$

De la proposition 2.2 et du théorème 1.2, découle le corollaire suivant :

Corollaire 2.3. *La suite suivante est exacte :*

$$0 \longrightarrow \overline{\mathcal{K}}^{iso}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \longrightarrow \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \xrightarrow{Pf} Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \longrightarrow 0,$$

où Pf désigne encore le composé des applications :

$$\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))) \xrightarrow{\otimes_F} \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \longrightarrow Hom(R^s(\Gamma), \overline{F}^*).$$

3. Action du groupe de Galois G_F

Dans ce paragraphe, $\overline{F}$ est supposé algébriquement clos.

Soit W un $\overline{F}[\Gamma]$-module et soit $g \in G_F$. Sur W existe une nouvelle structure de $\overline{F}[\Gamma]$-module en posant

$$\forall \lambda = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma \gamma \in \overline{F}[\Gamma],\ \forall w \in W,\ \lambda \circ w = \sum_{\gamma \in \Gamma} g^{-1}(\lambda_\gamma)\gamma(w).$$

Soit ${}^gW$ le $\overline{F}[\Gamma]$-module ainsi défini. L'application identique est semi-linéaire de W sur ${}^gW$ et ${}^{gh}W = {}^g({}^hW)$. Si χ est le caractère de W, alors $\gamma \longmapsto g(\chi(\gamma))$ est le caractère de ${}^gW$. Le groupe G_F opère ainsi sur $\mathcal{K}_0(\overline{F}[\Gamma])$.

Soit α un $\overline{F}[\Gamma]$-automorphisme et soit b une forme bilinéaire non dégénérée invariante par Γ définie sur W ; α est aussi un $\overline{F}[\Gamma]$-automorphisme de ${}^gW$, noté ${}^g\alpha$ et l'application $(w, w') \longmapsto g^{-1}(b(w, w'))$ est une forme $\overline{F}$-bilinéaire non dégénérée définie sur ${}^gW$ invariante par Γ, notée ${}^gb$.

Le groupe G_F opère ainsi sur $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$, $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$, $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$, $\mathcal{K}_1(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$, $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$, $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma]))$.

Soit maintenant $x = [(V, b), \alpha, (V', b')] \in \overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$. L'application qui à $\lambda \otimes v \in \overline{V} = \overline{F} \otimes_F V$ associe $g^{-1}(\lambda) \otimes v$ est un $\overline{F}[\Gamma]$-isomorphisme semi-linéaire de $\overline{V}$ sur $\overline{V}$, linéaire de $\overline{V}$ sur ${}^g\overline{V}$, noté $\tilde{g}$, d'où :

$${}^g\alpha = \tilde{g} \circ \alpha \circ \tilde{g}^{-1} \text{ et } g(x) = [(V, b), \tilde{g} \circ \alpha \circ \tilde{g}^{-1}, (V', b')]$$

Le groupe G_F opère donc sur $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$.

Soient $\overline{s_b}$ et $\overline{b}$ les applications définies sur $\overline{V}$ à partir de s_b et b par extension des scalaires de F à $\overline{F}$. D'où :

$$\overline{s_b} = s_{\overline{b}} \text{ et } {}^t\tilde{g} \circ \overline{s}_b \circ \tilde{g}^{-1} = s_{{}^g\overline{b}}.$$

Donc $\tilde{g}$ est une isométrie de $(\overline{V}, \overline{b})$ sur $({}^g\overline{V}, {}^g\overline{b})$.
De ces définitions découle immédiatement la proposition suivante (voir [Q1], §2) :

PROPOSITION 3.1. *1) Pour tout $\chi \in R(\Gamma)$ et pour tout $g \in G_F$,*

$$\forall x \in \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \ \ g(Det_\chi(x)) = Det_{g(\chi)}(g(x)).$$

2) Pour tout $\chi \in R^s(\Gamma)$ et pour tout $g \in G_F$,

$$\forall x \in \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])) \ \ g(Pf_\chi(x)) = Pf_{g(\chi)}(g(x)).$$

Démonstration.

L'application identique induit un $\overline{F}$-isomorphisme de ${}^{g}Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W,V)$ sur $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}({}^{g}W,{}^{g}V)$. Si u est un automorphisme d'un $\overline{F}$-espace vectoriel U, $g(det(u)) = det({}^{g}u)$.

Soit A un G_F-module, la proposition précédente conduit donc à définir l'action de G_F sur $Hom(R(\Gamma), A)$ par :

$$\forall g \in G_F,\ \forall f \in Hom(R(\Gamma), A),\ (gf)(\chi) = g(fg^{-1}(\chi)).$$

<u>Pour toute la suite, l'homomorphisme de</u> $\mathcal{K}_1(F[\Gamma])$ <u>dans</u> $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$ <u>induit par le foncteur d'extension des scalaires de</u> F <u>à</u> $\overline{F}$ <u>est supposé injectif</u> ; $\mathcal{K}_1(F[\Gamma])$ est donc identifié à son image dans $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$. Cette condition est en particulier vérifiée lorsque F est un corps de nombres ou un corps localement compact. En fait un résultat plus précis est rappelé dans la proposition suivante (voir [Q1], §2) :

PROPOSITION 3.2. *1) Soit F un corps local ; l'application Det induit un isomorphisme*

$$\mathcal{K}_1(F[\Gamma]) \longrightarrow Hom_{G_F}(R(\Gamma), \overline{F}^*).$$

2) Soit F un corps de nombres ; l'application Det induit un isomorphisme

$$\mathcal{K}_1(F[\Gamma]) \longrightarrow Hom^+_{G_F}(R(\Gamma), \overline{F}^*),$$

où $Hom^+_{G_F}(R(\Gamma), \overline{F}^*)$ désigne le sous-groupe de $Hom_{G_F}(R(\Gamma), \overline{F}^*)$ formé des applications f telles que tout caractère irréductible symplectique χ, $f(\chi)$ est réel et positif pour toute place de $\overline{F}$ au-dessus des places réelles de F.

La fin de ce paragraphe reprend l'exemple du paragraphe précédent et explique l'apport de l'action galoisienne dans la description de la structure du module quadratique $(F[\Gamma], Tr)$. Étant donné un module quadratique, la question peut se poser de le comparer à un module quadratique canonique. Cette approche conduit à vouloir définir une section de l'application ε de la suite de Heller. Tout $F[\Gamma]$-module indécomposable est isomorphe à un sous-module de $F[\Gamma]$. Dans cette optique, il est donc naturel d'explorer les sous-modules quadratiques de $(F[\Gamma], Tr)$.

Le fait que G_F opère sur $R(\Gamma)$ et l'application $\chi \longmapsto \overline{\chi}$ permettent de définir le F-*type* d'un caractère irréductible de $R(\Gamma)$. Ceci est une application des résultats de [Sc] chapitre 8, §7-8 à cette situation particulière.

Si $\lambda \in F[\Gamma]$, $\overline{\lambda} \in F[\Gamma]$. L'application tr est un F-endomorphisme de $F[\Gamma]$. L'application Tr définit une forme bilinéaire sur $F[\Gamma]$, symétrique, non dégénérée invariante par Γ. Si $d \in F[\Gamma]$, la forme bilinéaire sur $F[\Gamma]$, invariante par Γ, $(\lambda, \mu) \longmapsto tr(\lambda d\overline{\mu})$ est notée Tr_d.

Soit χ un caractère irréductible de $R(\Gamma)$; à χ correspond un unique facteur simple A_χ de l'algèbre semi-simple $F[\Gamma]$; le centre de A_χ est isomorphe au corps $F(\chi)$ obtenu en adjoignant à F les valeurs de χ ; cette algèbre simple est associée à l'idempotent central :

$$e_{F,\chi} = \frac{\chi(1)}{|\gamma|} \sum_g (\sum_{\gamma \in \Gamma} g(\chi(\gamma))\gamma^{-1}).$$

où g parcourt $G_F/G_{F(\chi)}$. L'algèbre simple A_χ est stable par l'involution si et seulement si $\overline{\chi}$ appartient à l'orbite de χ pour l'action de G_F.

Soit I_χ un idéal minimal de A_χ et soit D_χ le commutant de I_χ ; il est de dimension $(s_{F,\chi})^2$ sur son centre $F(\chi)$; soit $(n_{F,\chi})^2$ la dimension de A_χ sur D_χ. En fait $D_\chi = End_{F[\Gamma]}(I_\chi)$, $A_\chi = End_{D_\chi}(I_\chi)$.
Le caractère de $\overline{F} \otimes_F I_\chi$ est égal à $s_{F,\chi} \sum_{g \in G_F/G_{F(\chi)}} g(\chi)$; D_χ est stable par l'involution si et seulement si A_χ l'est ; A_χ, D_χ, $e_{F,\chi}, s_{F,\chi}$ ne dépendent que de l'orbite de χ pour l'action de G_F.

F-type 0 : $\overline{\chi}$ n'appartient pas à l'orbite de χ pour l'action de G_F et l'involution $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ ne laisse pas I_χ stable. Les facteurs simples A_χ et $A_{\overline{\chi}}$ sont distincts ; l'involution $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ est un isomorphisme de A_χ sur l'algèbre opposée de $A_{\overline{\chi}}$. Il n'existe pas sur I_χ de F-forme bilinéaire symétrique invariante par Γ, en particulier la restriction de la forme Tr à I_χ est nulle. Les modules hyperboliques $H_+(I_\chi)$ et $H_-(I_\chi)$ sont indécomposables. Ils sont isométriques à $H_+(I_{\overline{\chi}})$ et $H_-(I_{\overline{\chi}})$ respectivement. La restriction de la forme Tr à $I_\chi \oplus \overline{I}_\chi$ est une forme bilinéaire symétrique invariante par Γ isométrique à $H_+(I_\chi)$. Pour $d = e_{F,\chi} - e_{F,\overline{\chi}}$, soit:

$$I_\chi^+ = [I_\chi \oplus \overline{I}_\chi, Tr], I_\chi^- = [I_\chi \oplus \overline{I}_\chi, Tr_d] \text{ et } s_{F,\chi}^+ = s_{F,\chi}^- = s_{F,\chi}.$$

Le module quadratique $(A_\chi \oplus A_{\overline{\chi}}, Tr)$ est somme orthogonale de n_χ modules quadratiques $(I_\chi \oplus \overline{I}_\chi, Tr)$ isométriques entre eux.

F-type 1 : χ est de *type* 1 et $s_{F,\chi} = 1$. Donc toute forme bilinéaire antisymétrique, non dégénérée, invariante par Γ sur $\overline{F} \otimes_F I_\chi$ est hyperbolique. La restriction de l'involution à $F(\chi)$ est l'application identique. La restriction de la forme Tr à I_χ est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, invariante par Γ. Le module hyperbolique $H_-(I_\chi)$ est indécomposable.
Posons :

$$I_\chi^+ = [I_\chi, Tr], I_\chi^- = [H_-(I_\chi)] \text{ et } s_{F,\chi}^+ = 1 \text{ et } s_{F,\chi}^- = 2.$$

Le module quadratique (A_χ, Tr) est somme orthogonale de n_χ modules quadratiques (I_χ, Tr), non nécessairement isométriques entre eux.

F-type -3 : χ est de *type* 1 et $s_{F,\chi} \neq 1$. Comme dans le cas précédent toute forme bilinéaire antisymétrique, non dégénérée, invariante par Γ sur $\overline{F} \otimes_F I_\chi$ est hyperbolique. La restriction de l'involution à $F(\chi)$ est l'application identique. La restriction de la forme Tr à I_χ est toujours une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, invariante par Γ. Mais comme $s_{F,\chi} \neq 1$, il existe $d \in D_\chi$ tel que $\overline{d} = -d$; la forme Tr_d est bilinéaire, antisymétrique, non dégénérée, invariante par Γ. Comme $(\overline{F} \otimes_F I_\chi, Tr_d)$ est hyperbolique, $s_{F,\chi}$ est pair. Le commutant D_χ est d'ordre 2 dans le groupe de Brauer de $F(\chi)$ (théorème 8.4 de [Sc]). Posons :

$$I_\chi^+ = [I_\chi, Tr], I_\chi^- = [I_\chi, Tr_d] \text{ et } s_{F,\chi}^+ = s_{F,\chi}^- = s_{F,\chi}.$$

Le module quadratique (A_χ, Tr) est somme orthogonale de n_χ modules quadratiques (I_χ, Tr), non nécessairement isométriques entre eux.

F-type -1 : χ est de *type* -1 et $s_{F,\chi} = 1$. Donc toute forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, invariante par Γ sur $\overline{F} \otimes_F I_\chi$ est hyperbolique. La restriction de l'involution à $F(\chi)$ est l'application identique. La restriction de la forme Tr à I_χ est nulle. Il existe un idéal minimal I'_χ tel que $I'_\chi \oplus \overline{I'}_\chi$ contienne I_χ et $(I'_\chi \oplus \overline{I'}_\chi, Tr)$ soit isométrique au module hyperbolique $H_+(I'_\chi)$. Il existe d tel que (I'_χ, Tr_d) soit un module symplectique. L'entier n_χ est pair. Posons :

$$I_\chi^+ = [I'_\chi \oplus \overline{I'}_\chi, Tr], I_\chi^- = [I'_\chi, Tr_d] \text{ et } s_{F,\chi}^+ = 2 \text{ et } s_{F,\chi}^- = 1.$$

Le module quadratique (A_χ, Tr) est somme orthogonale de $n_\chi/2$ modules quadratiques $(I'_\chi \oplus \overline{I'}_\chi, Tr)$, isométriques entre eux.

F-type 3 : χ est de *type* -1 et $s_{F,\chi} \neq 1$. Comme dans le cas précédent toute forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, invariante par Γ sur $\overline{F} \otimes_F I_\chi$ est hyperbolique. La restriction de l'involution à $F(\chi)$ est l'application identique. La restriction de la forme Tr à I_χ est une forme bilinéaire symétrique invariante par Γ, non dégénérée. Comme $(\overline{F} \otimes_F I_\chi, Tr)$ est hyperbolique, $s_{F,\chi}$ est pair. Il existe $d \in D_\chi$ tel que $\overline{d} = -d$, la forme Tr_d est bilinéaire, antisymétrique invariante par Γ. Le commutant D_χ est d'ordre 2 dans le groupe Brauer de $F(\chi)$ (théorème 8.4 de [Sc]). Posons :

$$I_\chi^+ = [I_\chi, Tr], I_\chi^- = [I_\chi, Tr_d] \text{ et } s_{F,\chi}^+ = s_{F,\chi}^- = s_{F,\chi}.$$

Le module quadratique (A_χ, Tr) est somme orthogonale de n_χ modules quadratiques (I_χ, Tr), non nécessairement isométriques entre eux.

F-type 4 : $\chi \neq \overline{\chi}$ et $\overline{\chi}$ appartient à l'orbite de χ pour l'action de G_F et l'involution $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ laisse I_χ, A_χ et D_χ stables ; les facteurs simples A_χ et $A_{\overline{\chi}}$ sont égaux ; la restriction de l'involution à $F(\chi)$ est un automorphisme d'ordre 2 et $F(\chi)$ est une extension quadratique du sous-corps $F(\chi)_0$ fixé par l'involution. La restriction de la forme Tr à I_χ est une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, invariante par Γ. Il existe $d \in F(\chi)$ tel que $\overline{d} = -d$, la forme Tr_d est bilinéaire, antisymétrique, non dégénérée invariante par Γ. Posons :

$$I_\chi^+ = [I_\chi, Tr], I_\chi^- = [I_\chi, Tr_d] \text{ et } s_{F,\chi}^+ = s_{F,\chi}^- = s_{F,\chi}.$$

Le module quadratique (A_χ, Tr) est somme orthogonale de n_χ modules quadratiques (I_χ, Tr), non nécessairement isométriques entre eux.

Remarques et exemple.

1) Les classes I_χ^+ dépendent du choix de I_χ. Un exemple simple est donné par le groupe de permutation $\mathcal{S}_3$. L'algèbre $\mathbb{Q}[\mathcal{S}_3]$ est isomorphe à $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Soit σ un cycle d'ordre 3 et τ une transposition, un isomorphisme est donné par :

$$\sigma \longmapsto \left(1, 1, \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}\right), \ \tau \longmapsto \left(1, -1, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right).$$

L'involution $\gamma \longmapsto \gamma^{-1}$ est donnée sur le facteur $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ par :

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} {}^t M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Soit χ le caractère correspondant à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$; $e_{\mathbb{Q},\chi} = (2 - \sigma - \sigma^2)/3$.
Alors $I_\chi = \mathbb{Q}e_{\mathbb{Q},\chi}(1+\tau)/2 + \mathbb{Q}(\sigma^2 - \sigma)(1+\tau)/6$, est isomorphe à $\begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q} & 0 \end{pmatrix}$;
et $I'_\chi = \mathbb{Q}(\sigma^2 - \sigma)(1-\tau)/2 + \mathbb{Q}e_{\mathbb{Q},\chi}(1-\tau)/2$, est isomorphe à $\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$.
Alors $I_\chi \oplus I'_\chi$ est isomorphe à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
D'où, $\forall x, y, x', y' \in \mathbb{Q}$,

$$Tr(xe_{\mathbb{Q},\chi}\frac{(1+\tau)}{2} + y(\sigma^2 - \sigma)\frac{(1+\tau)}{6}, x'e_{\mathbb{Q},\chi}\frac{(1+\tau)}{2} + y'(\sigma^2 - \sigma)\frac{(1+\tau)}{6})$$

$$= 2(xx' + \frac{yy'}{3}),$$

$$Tr(x(\sigma^2-\sigma)\frac{(1+\tau)}{2}+ye_{\mathbb{Q},\chi}\frac{(1-\tau)}{2},x(\sigma^2-\sigma)\frac{(1+\tau)}{2}+ye_{\mathbb{Q},\chi}\frac{(1-\tau)}{2})$$
$$=2(3xx'+yy').$$

La multiplication à droite par $\lambda=(\sigma^2-\sigma)(2-\tau)/3$ est un $\mathbb{Q}[\Gamma]$-isomorphisme de I_χ sur I'_χ. Comme $End_{\mathbb{Q}[\Gamma]}(I_\chi)=\mathbb{Q}$, tout $\mathbb{Q}[\Gamma]$-isomorphisme de I_χ sur I'_χ est de la forme $\alpha\lambda$, avec $\alpha\in\mathbb{Q}^*$. D'où

$$\forall z,z'\in I_\chi,\ Tr(z\alpha\lambda,z'\alpha\lambda)=3\alpha^3Tr(z,z').$$

Donc $[I_\chi,Tr]\neq[I'_\chi,Tr]$.

2) Si $F=\mathbb{Q}$, la forme Tr est anisotropique, donc il n'existe pas de caractères de $\mathbb{Q}$-*type* 0 ou $\mathbb{Q}$-*type* -1. Pour tout caractère irréductible χ, D_χ est égal à $F(\chi)$ ou à un corps de quaternions sur $\mathbb{Q}$.
Plus généralement, dans le cas des corps de nombres ou des corps p-adiques, les théorèmes 13.3 et 13.5 du paragraphe 8, et les théorèmes 2.2, 2.4 et 2.5 du paragraphe 10 de [Sc] donnent d'autres exemples.

4. Discriminant

I - Discriminant à valeurs dans $H^1(G_F,Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma),\overline{F}^*))$

En suivant les notations des paragraphes précédents, $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ désigne le groupe de Grothendieck classifiant les objets de la forme $((V,b),\alpha,(V',b'))$ où b et b' sont deux formes bilinéaires symétriques et α est un $F[\Gamma]$-isomorphisme de V sur V'. Ce groupe est tel que l'on ait une suite exacte :

$$\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))\to\mathcal{K}_1(F[\Gamma])\to\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))\xrightarrow{\delta}\tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))\to 0.$$

L'hypothèse faite dans l'introduction, à savoir que l'extension des scalaires de F à $\overline{F}$ induit un homomorphisme injectif de $\mathcal{K}_1(F[\Gamma])$ sur $\mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma])$, entraine qu'il en est de même pour $\mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ et $\overline{\mathcal{K}}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$.

Par le théorème 90 de Hilbert et le lemme de Shapiro, $H^1(G_F,Hom(R(\Gamma),\overline{F}^*))$ est trivial. De la suite exacte :

$$1\to Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma),\overline{F}^*)\to Hom(R(\Gamma),\overline{F}^*)\xrightarrow{Res}Hom(R^s(\Gamma),\overline{F}^*)\to 1$$

découle une suite exacte :

$$1\to Hom_{G_F}(R(\Gamma)/R^s(\Gamma),\overline{F}^*)\to Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)\xrightarrow{Res}$$
$$Hom_{G_F}(R^s(\Gamma),\overline{F}^*)\xrightarrow{\partial}H^1(G_F,Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma),\overline{F}^*))\to 1.$$

D'où le lemme :

PROPOSITION 4.1. *L'application de cobord induit un isomorphisme, encore noté ∂, de $Hom_{G_F}(R^s(\Gamma), \overline{F}^*)/Res(Hom_{G_F}(R(\Gamma), \overline{F}^*))$ dans $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*))$.*

De plus $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*))$ est isomorphe à

$$H^1(G_F, Hom(\mathcal{W}^o(\Gamma), \{\pm 1\})) \oplus H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/(R^o(\Gamma) + R^s(\Gamma)), \overline{F}^*)).$$

Soit $\mathbb{Z}[Irr^+(\Gamma)]$ le sous-groupe de $R(\Gamma)$ de base $Irr^+(\Gamma)$, le groupe $H^1(G_F, Hom(\mathcal{W}^o(\Gamma), \{\pm 1\}))$ est isomorphe à

$$Hom_{G_F}(\mathbb{Z}[Irr^+(\Gamma)], \overline{F}^*)/Hom_{G_F}(\mathbb{Z}[Irr^+(\Gamma)], \overline{F}^*)^2.$$

Le groupe $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/(R^o(\Gamma) + R^s(\Gamma)), \overline{F}^*))$ est isomorphe à

$$\oplus_\chi F_0(\chi)^*/N_{F(\chi)/F_0(\chi)}(F(\chi)^*),$$

où χ parcourt un système de représentants des orbites de l'ensemble des caractères de F-type 4 pour l'action de G_F.

Démonstration. La première affirmation découle de la décomposition de $R(\Gamma)/R^s(\Gamma)$ en sa partie de torsion et sa partie libre, rappelée dans le paragraphe 1. Par le lemme de Shapiro et le théorème 90 de Hilbert, $H^1(G_F, Hom(\mathbb{Z}[Irr^+(\Gamma)], \overline{F}^*))$ est trivial ; la suite de cohomologie déduite de la suite :

$$1 \to Hom(\mathcal{W}^o(\Gamma), \{\pm 1\} \to Hom(\mathbb{Z}[Irr^+(\Gamma)], \overline{F}^*) \\ \to Hom(\mathbb{Z}[Irr^+(\Gamma)], \overline{F}^*) \to 1.$$

donne l'isomorphisme.
La dernière affirmation se déduit du fait que l'ensemble des classes des caractères de *F-type* 0 et *F-type* 4 est une base de $R(\Gamma)/(R^o(\Gamma) + R^s(\Gamma))$. Le lemme de Shapiro et la description de l'action de G_F sur ces caractères donnée dans le paragraphe précédent permet de conclure.

On en déduit donc la définition suivante :

DÉFINITION 4.2. *L'homomorphisme, noté Disc, de $\tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$ dans $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*))$ construit de la façon décrite ci-dessous, est appelé discriminant :*

soit $x = [V', b'] - [V, b] \in \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$; les $F[\Gamma]$-modules V et V' sont donc isomorphes, soit φ un tel isomorphisme ; alors

$$Disc(x) = \partial(Pf([(V, b), \varphi, (V', b')])).$$

De la proposition 2.1 découle la description suivante : par extension des scalaires φ donne un isomorphisme de $\overline{V}$ sur $\overline{V}'$. Comme l'application ε de $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma]))$ dans $\mathcal{K}_0(\overline{F}[\Gamma])$ est injective, il existe une isométrie α de $(\overline{V}, \overline{b})$ sur $(\overline{V}', \overline{b}')$. Soit alors l'élément

$$y_x = [\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi] \text{ de } \mathcal{K}_1(\overline{F}[\Gamma]) \;;$$

$Disc(x)$ est la classe dans $H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*))$ du 1-cocycle

$$g \mapsto (\chi \mapsto c(g,\chi) = Det_\chi([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi]^{-1} g(Det_\chi([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi])).$$

Plus précisément, d'une part

$$g(Det_\chi([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi])) = Det_{g(\chi)}(g([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi]))$$

et d'autre part, si χ est le caractère d'un $\overline{F}[\Gamma]$-module W,

$$Det_{g(\chi)}(g([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi])) = det((\tilde{g} \circ \alpha^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{g}^{-1})_{{}^gW}) \;;$$

d'où

$$c(g,\chi) = det((\alpha^{-1} \circ \varphi)_W)^{-1} det((\tilde{g} \circ \alpha^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{g}^{-1})_{{}^gW}),$$

où ici $(\alpha^{-1} \circ \varphi)_W$ désigne l'automorphisme de $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W, \overline{V})$ défini par

$$f \longmapsto \alpha^{-1} \circ \varphi \circ f$$

et $(\tilde{g} \circ \alpha^{-1} \circ \varphi \circ \tilde{g}^{-1})_{{}^gW}$ désigne l'automorphisme de $Hom_{\overline{F}[\Gamma]}({}^gW, \overline{V})$ qui à f fait correspondre f' le composé des applications suivantes :

$$f' : {}^gW \xrightarrow{f} \overline{F} \otimes_F V \xrightarrow{\tilde{g}} \overline{F} \otimes_F V \xrightarrow{\alpha^{-1} \circ \varphi} \overline{F} \otimes_F V \xrightarrow{\tilde{g}^{-1}} \overline{F} \otimes_F V$$

$$\lambda \otimes v \longmapsto g^{-1}(\lambda) \otimes v, \qquad\qquad \lambda \otimes v \longmapsto g(\lambda) \otimes v.$$

Remarque. Si $\chi \in R^s(\Gamma)$, $Det_\chi([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi]) = Pf_\chi([(V,b), \varphi, (V,b)])$, d'après la proposition 2.1 ; et par suite

$$\begin{aligned} g(Det_\chi([\overline{V}, \alpha^{-1} \circ \varphi])) &= g(Pf_\chi([(V,b), \varphi, (V,b)])) \\ &= Pf_\chi([(V,b), \varphi, (V',b')]), \end{aligned}$$

car φ est un $F[G]$-isomorphisme ; d'où $c(g,\chi) = 1$.

THÉORÈME 4.3. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Det"] & \mathcal{K}_1(F[\Gamma]) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "Det"] & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Pf"] & \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \arrow[r] \arrow[d, "Disc"] & 0 \\
1 \arrow[r] & Hom_{G_F}(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & Hom_{G_F}(R(\Gamma)/, \overline{F}^*) \arrow[r] & Hom_{G_F}(R^s(\Gamma), \overline{F}^*) \arrow[r] & H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma), \overline{F}^*)) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Exemples.

1) Supposons que $\Gamma = \{1\}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(F)) & \longrightarrow & \mathcal{K}_1(F) & \xrightarrow{\delta} & \mathcal{K}_{0,rel}(\mathcal{Q}(F)) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle Det} & & \downarrow{\scriptstyle Det} & & \downarrow{\scriptstyle Pf} & & \downarrow{\scriptstyle Disc} & & \\
1 & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & \overline{F}^* & \longrightarrow & \overline{F}^* & \longrightarrow & H^1(G_F, \{\pm 1\}) & \longrightarrow & 1.
\end{array}$$

Application numérique. Soit $x = [V, b] - [V', b'] \in \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F))$; soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de V et V'. Alors $Disc(x)$ est la classe du 1-cocycle

$$g \longmapsto \sqrt{\frac{disc(b', \mathcal{B}')}{disc(b, \mathcal{B})}} \left(g(\sqrt{\frac{disc(b', \mathcal{B}')}{disc(b, \mathcal{B})}}) \right)^{-1}.$$

Si φ est l'isomorphisme de V sur V' qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$

$$Pf([(V, b), \varphi, (V', b')]) = disc(b', \mathcal{B}')/disc(b, \mathcal{B}).$$

2) Calcul du discriminant dans la situation arithmétique décrite dans l'introduction :

Démonstration du théorème A. Soit φ un $F[\Gamma]$-isomorphisme de N sur $F[Is_F(N, \overline{F})]$. D'après la description précédente :

$$Disc([N, Tr_{N/F}] - [F[Is_F(N, \overline{F})], B_{Is}])$$

est représenté par la classe du 1-cocycle

$$g \longmapsto Det(g([\overline{N}, \varphi^{-1} \circ T_{N/F}]) - [\overline{N}, \varphi^{-1} \circ T_{N/F}]).$$

De plus

$$[\overline{N}, \varphi^{-1} \circ T_{N/F}] = [\overline{F}[Is_F(N, \overline{F})], T_{N/F} \circ \varphi^{-1}]$$

et

$$g([\overline{F}[Is_F(N, \overline{F})], T_{N/F} \circ \varphi^{-1}]) = [\overline{F}[Is_F(N, \overline{F})]), \tilde{g} \circ T_{N/F} \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{g}^{-1}].$$

Soit $(v_1, \ldots, v_r)$ un système de représentants des orbites de Γ dans $Is_F(N, \overline{F})$; c'est une base du $\overline{F}[\Gamma]$-module $\overline{F}[Is_F(N, \overline{F})]$ et

$$\begin{aligned}
\tilde{g} \circ T_{N/F} \circ \varphi^{-1} \circ \tilde{g}^{-1}(\sigma_i) &= \tilde{g} \circ T_{N/F}(1 \otimes \varphi^{-1}(\sigma_i)) \\
&= \tilde{g}(\sum_{v \in Is_F(N, \overline{F})} v(\varphi^{-1}(\sigma_i))v) \\
&= \sum_{v \in Is_F(N, \overline{F})} g^{-1} \circ v \circ \varphi^{-1}(\sigma_i) v \\
&= g(T_{N/F} \circ \varphi^{-1}(\sigma_i)).
\end{aligned}$$

D'où

$$g([\overline{F}[Is_F(N,\overline{F})],T_{N/F}\circ\varphi^{-1}]) = \\ [\overline{F}[Is_F(N,\overline{F})],g]+[\overline{F}[Is_F(N,\overline{F})],T_{N/F}\circ\varphi^{-1}].$$

Démonstration du corollaire 1. L'équivalence des propriétés ii) à iv) est un résultat élémentaire de la théorie des groupes (voir par exemple [C-P] page 24). Si N/F est une extension galoisienne de groupe de Galois Γ, on note j l'homomorphisme surjectif canonique de G_F dans Γ qui à g associe sa restriction à N. Alors $Disc([N,Tr_{N/F}]-[F[Is_F(N,\overline{F})],B_{Is}])$ est représenté par la classe du 1-cocycle

$$c\ :\ g\longmapsto(\chi\longmapsto det_\chi(j(g))$$

dans $H^1(G_F,Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma),\overline{F}^*))$.
Ce 1-cocycle est un homomorphisme. Supposons que c est un 1-cobord, alors pour tout caractère orthogonal χ, $det_\chi=1$; ceci est vrai en particulier pour le caractère de permutation de Γ dans Γ/Δ pour tout sous-groupe Δ ; donc son déterminant, qui est $\varepsilon_{\Gamma/\Delta}$, est trivial. Supposons que c n'est pas un 2-cobord. S'il existe un caractère orthogonal χ tel que $det_\chi\neq 1$, le noyau de det_χ est un sous-groupe d'indice 2. S'il existe un caractère χ de F-*type* 4 tel que $det_\chi\neq1$, alors $det_\chi(j(w))\neq 1$ pour w le générateur du groupe de Galois de $F(\chi)/F(\chi)_0$; w est d'ordre 2 et $j(w)$ est différent de 1. Les extensions N et $F(\chi)$ sont linéairement disjointes sur l'extension abélienne $N\cap F(\chi)$ de F. Donc w n'opère pas trivialement sur ce corps et Γ possède un sous-groupe d'indice 2.

Démonstration du corollaire 2. Le résultat se déduit du corollaire 1 et de la structure des groupes de ramifications (voir [Se2] page 75).

Démonstration du théorème B. L'action du groupe de Galois $G_{\mathbb{Q}}$ sur les sommes de Gauss galoisienne ([F1[) montre que $\partial(\tau)$ est représenté par la classe du 1-cocycle $g\longmapsto Det([\overline{\mathbb{Q}}[Is_{\mathbb{Q}}(N,\overline{\mathbb{Q}}],g])$.

II - Discriminant à valeurs dans $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*))$

Soient $f\in Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)$, et $\overline{f}$ l'élément de $Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)$ qui à χ appartenant à $R(\Gamma)$ fait correspondre $f(\overline{\chi})$. Ceci définit ainsi une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)$.

Soit ${}^tT$ l'homomorphisme qui à $f\in Hom_{G_F}(R^s(\Gamma),\overline{F}^*)$ associe ${}^tT(f)$ appartenant à $Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)$ défini par :

$$\forall\chi\in R(\Gamma),{}^tT(f)(\chi)=f(T(\chi))=f(\chi+\overline{\chi}).$$

Lemme 4.5. *L'homorphisme* ${}^tT$ *se factorise en un homomorphisme injectif du groupe* $Hom_{G_F}(R^s(\Gamma),\overline{F}^*)/Res(Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*))$ *sur le groupe* $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*))$ *dont l'image est l'ensemble des classes des éléments* f *tels que* $f(\chi)=1$ *pour tout* χ *caractère de type* -1*. Il existe donc une suite exacte :*

$$1 \to H^1(G_F, Hom(R(\Gamma)/R^s(\Gamma),\overline{F}^*) \to \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*))$$
$$\to H^1(G_F, Hom(\mathcal{W}^s(\Gamma),\{\pm 1\})) \to 1.$$

Démonstration. Soit $g \in Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)$ tel que $g(\chi)=g(\overline{\chi})$, $\forall \chi \in R(\Gamma)$ et $g(\chi)=1$ pour tout caractère χ de *type* -1.
Soit $f \in Hom_{G_F}(R^s(\Gamma),\overline{F}^*)$ défini sur la base de $R^s(\Gamma)$ par :

$$\begin{aligned} f(2\varphi) &= g(\varphi) && \text{si } \varphi \text{ est de } \textit{type } +1,\\ f(\varphi+\overline{\varphi}) &= g(\varphi) && \text{si } \varphi \text{ est de } \textit{type } 0,\\ f(\varphi) &= 1 && \text{si } \varphi \text{ est de } \textit{type } -1. \end{aligned}$$

Alors g est égale à l'image de f par ${}^tT$.
Soit $f \in Hom_{G_F}(R^s(\Gamma),\overline{F}^*)$ tel que ${}^tT(f)=g\overline{g}$ où $g \in Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)$.
Soit $g_1 \in Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*)$ défini sur la base de $R(\Gamma)$ par $g_1(\varphi)=g(\varphi)$ si φ est de *type* 0 ou de *type* 1, et $g_1(\varphi)=f(\varphi)$ si φ est de *type* -1. La restriction à $R^s(\Gamma)$ de g_1 est égale à f.
Soit $\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)]$ le sous-groupe de $R(\Gamma)$ de base $Irr^-(\Gamma)$. L'argumentation précédente montre que la restriction à $\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)]$ donne une suite exacte :

$$1 \to \frac{Hom_{G_F}(R^s(\Gamma),\overline{F}^*)}{Res(Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*))} \to \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma),\overline{F}^*))$$
$$\to \frac{Hom_{G_F}(\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)],\overline{F}^*)}{Hom_{G_F}(\mathbb{Z}/[Irr^-(\Gamma)],\overline{F}^*)^2} \to 1.$$

Par le lemme de Shapiro et le théorème 90 de Hilbert, le groupe $H^1(G_F, Hom(\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)],\overline{F}^*))$ est trivial ; la suite de cohomologie déduite de la suite :

$$1 \to Hom(\mathcal{W}^s(\Gamma),\{\pm 1\}) \to Hom(\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)],\overline{F}^*)$$
$$\to Hom(\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)],\overline{F}^*) \to 1$$

donne un isomorphisme de

$$Hom_{G_F}(\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)],\overline{F}^*)/Hom_{G_F}(\mathbb{Z}[Irr^-(\Gamma)],\overline{F}^*)^2$$

sur
$$H^1(G_F, Hom(\mathcal{W}^s(\Gamma), \{\pm 1\})).$$

Avec les notations du début du paragraphe et en utilisant maintenant la proposition 2.1b, $Disc(x)$ est décrit de la façon suivante :
il existe $\beta \in Aut_{F[\Gamma]}(V)$ tel que

$$\forall v, v' \in V,\ b'(\varphi(v), \varphi(v')) = b(\beta(v), v')\ ;$$

soit
$$disc(x) = Det([V, \beta])$$

qui appartient à $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma), \overline{F}^*))$ et même à l'image de ${}^tT$ car pour tout caractère χ de *type* -1, $Det_\chi([V, \beta]) = Pf_\chi[V, \varphi, V])^2$.
Alors
$${}^tT(Pf(V, \varphi, V')) = Det([V, \beta]),$$
$$\partial^{-1}(Disc(x)) = {}^tT^{-1}(disc(x)).$$

Exemples.

1) Soit $[V, b]$ un module quadratique, $V \oplus V$ est muni de la forme, notée H_b, définie par $H_b((v, v'), (w, w')) = b(v, w') + b(v', w)$. C'est un module hyperbolique. L'application $\beta\ :\ (v, v') \longmapsto (v', v)$ est telle que

$$H_b(\beta((v, v')), (w, w')) = (b \oplus b)((v, v'), (w, w')) = b(v, w) + b(v', w').$$

D'où :

$$disc([V \oplus V, b \oplus b] - [V \oplus V, H_b]) = (\chi \longmapsto (-1)^{dim_\chi([V,b])}))$$

et

$$Disc([V \oplus V, b \oplus b] - [V \oplus V, H_b]) = \partial(\chi \longmapsto (-1)^{dim_\chi([V,b])/2}),$$

où $\dim_\chi([V, b]) = \dim_{\overline{F}}(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W, \overline{V}))$ pour tout $\overline{F}[\Gamma]$-module W de caractère χ.

2) Soit $d \in F[\Gamma]^*$ tel que $\overline{d} = d$; alors pour tout module quadratique $[I_\chi, Tr]$, $disc([I_\chi, Tr_d] - [I_\chi, Tr]) = Det([I_\chi, m_d])$ où m_d désigne la multiplication à droite par d.

3) *Démonstration du corollaire au théorème B.*

Comme $\partial(\tau)$ est représenté par la classe du 1-cocycle

$$g \longmapsto Det([\overline{\mathbb{Q}}[Is_{\mathbb{Q}}(N, \overline{\mathbb{Q}})], g]),$$

$disc([N, Tr_{N/\mathbb{Q}}] - [\mathbb{Q}[Is_{\mathbb{Q}}(N, \overline{\mathbb{Q}})], B_{Is}])$ est représenté par la classe de l'homomorphisme

$$\chi \longmapsto \tau(\chi')\tau(\overline{\chi}') \ ;$$

on a (voir [F1]) : $\tau(\chi')\tau(\overline{\chi}') = f(\chi')det_{\chi'}(-1)$.

5. Rang

Dans ce paragraphe, $\overline{F}$ est une extension algébriquement close de F.

L'application qui à $[V] \in \mathcal{K}_0(F[\Gamma])$ associe $f \in Hom(R(\Gamma), \mathbb{Z})$ définie par :

$$\forall \chi = [W] \in R(\Gamma),\ f(\chi) = \dim_{\overline{F}}(Hom_{\overline{F}[\Gamma]}(W, \overline{V})),$$

induit un homomorphisme injectif de $\mathcal{K}_0(F[\Gamma])$ sur $Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})$ noté dim. Son image est l'ensemble des applications f telles que $f(\chi) \in s_{F,\chi}\mathbb{Z}$, pour tout caractère irréductible χ (voir [Q1], proposition 2.6 et théorème 2.7).

La suite suivante est donc exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_0(F[\Gamma]) \xrightarrow{dim} Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}) \xrightarrow{S_F} Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où S_F est défini par $S_F(f)(\chi) = (s_{F,\chi})^{-1} f(\chi)$ pour tout caractère irréductible χ.

Pour tout $x \in \mathcal{K}_0(F[\Gamma])$ et pour tout caractère $\chi \in R(\Gamma)$, irréductible, soit

$$rg_\chi(x) = (s_{F,\chi})^{-1} \dim_\chi(x).$$

Le prolongement par linéarité à $R(\Gamma)$ de rg_χ, induit maintenant un isomorphisme de $\mathcal{K}_0(F[\Gamma])$ sur $Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})$, noté rg.

Pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])$, (resp. $\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma])$), le composé des applications ε et dim ou de ε et rg est encore noté dim ou rg.

$$\begin{aligned} dim\ &: \mathcal{K}_0(\mathcal{C}) \longrightarrow Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}), \\ rg\ &: \mathcal{K}_0(\mathcal{C}) \longrightarrow Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Soient $f \in Hom(R(\Gamma), \mathbb{Z})$, et $\overline{f}$ l'élément de $Hom(R(\Gamma), \mathbb{Z})$ qui à χ appartenant à $R(\Gamma)$ fait correspondre $f(\overline{\chi})$. Ceci définit ainsi une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $Hom(R(\Gamma), \mathbb{Z})$, qui commute avec l'action de G_F. Soit ${}^tT$

l'homomorphisme qui à $f \in Hom_{G_F}(R^s(\Gamma), \mathbb{Z})$ ou $Hom_{G_F}(R^o(\Gamma), \mathbb{Z})$ associe ${}^tT(f)$ appartenant à $Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})$ défini par :

$$\forall \chi \in R(\Gamma), {}^tT(f)(\chi) = f(T(\chi)) = f(\chi + \overline{\chi}).$$

De même, le foncteur qui à tout $F[\Gamma]$-module V associe son dual V^* définit une action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{K}_0(F[\Gamma])$. Les applications dim et rg commutent avec l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Pour $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(\overline{F}[\Gamma])$, (resp. $\mathcal{S}(\overline{F}[\Gamma])$), soit de plus rg^+, (resp. rg^-), l'homomorphisme :

$$rg_F^+ \ : \ \mathcal{K}_0(\mathcal{C}) \longrightarrow Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}),$$

$$(\text{resp. } rg_F^- \ : \ \mathcal{K}_0(\mathcal{C}) \longrightarrow Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})),$$

qui à $x \in \mathcal{C}$ associe l'homomorphisme défini sur $R(\Gamma)$ par :

$$\forall \chi \in Irr(\Gamma), rg_{F,\chi}^+(x) = (s_{F,\chi}^+)^{-1} dim_\chi(x)),$$

$$(\text{resp. } rg_{F,\chi}^-([V, b]) = (s_{F,\chi}^-)^{-1} dim_\chi(x)),$$

et prolongé par linéarité.

Exemples. En utilisant les notations du paragraphe 3 :

si φ est un caractère irréductible,
$rg_{F,\varphi}^+(I_\chi^+) = rg_{F,\varphi}^-(I_\chi^-) = 1$ s'il existe $g \in G_F$ tel que $\varphi = g(\chi)$ ou $\varphi = g(\overline{\chi})$,
$rg_{F,\varphi}^+(I_\chi^+) = rg_{F,\varphi}^-(I_\chi^-) = 0$ sinon ;

par contre, si φ est de *F-type* -1, I_φ^+ est hyperbolique, $rg_{F,\varphi}^+(I_\varphi^+) = 1$ et $rg_\varphi(I_\varphi^+) = 2$, et si φ est de *F-type* 3, I_φ^+ n'est pas hyperbolique et $rg_{F,\varphi}^+(H(I_\varphi^+)) = rg_\varphi(H(I_\varphi^+)) = 2$.

Le noyau de l'application rg est $\tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{C})$. Son image est incluse dans $Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$, ensemble des points fixes pour l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ définie ci-dessus. D'après l'exemple précédent, c'est le sous-$\mathbb{Z}$-module formé des applications f telles que pour χ de *F-type* -1, (resp. de *F-type* $+1$), $f(\chi) \in 2\mathbb{Z}$, (voir aussi [F2], proposition 7.4). De là découle la proposition suivante :

Proposition 5.1. *1) Les deux suites suivantes sont exactes :*

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \xrightarrow{rg_F^+} Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \to 0,$$

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \xrightarrow{rg_F^-} Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \to 0.$$

L'application qui à $f \in Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ associe

$$\sum_{\chi \in G_F \backslash Irr(\Gamma)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} f(\chi) I_\chi^+, \quad (resp. \sum_{\chi \in G_F \backslash Irr(\Gamma)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} f(\chi) I_\chi^-),$$

est une section de rg_F^+, (resp. rg_F^-).
2) Les deux suites suivantes sont exactes :

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \xrightarrow{dim} Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \xrightarrow{S_F^+} Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}},$$

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \xrightarrow{dim} Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \xrightarrow{S_F^-} Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}},$$

où S_F^+, (resp. S_F^-), est défini par

$$S_F^+(f)(\chi) = (s_{F,\chi}^+)^{-1} f(\chi), \ (resp.\ S_F^-(f)(\chi) = (s_{F,\chi}^-)^{-1} f(\chi)),$$

pour tout caractère irréductible χ.
L'application qui à $f \in Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ associe

$$\sum_{\chi \in G_F \backslash Irr(\Gamma)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \frac{f(\chi)}{s_{F,\chi}^+} I_\chi^+, \quad (resp. \sum_{\chi \in G_F \backslash Irr(\Gamma)/\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \frac{f(\chi)}{s_{F,\chi}^-} I_\chi^-)$$

est une section de dim sur son image.

Remarque. Si les indices $s_{F,\chi}$ sont tous égaux à 1, les deux suites exactes précédentes deviennent :

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to Hom_{G_F}(R(\Gamma),\mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \to Hom_{G_F}(\mathcal{W}^s(\Gamma),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0,$$

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \to \mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \to Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})^{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \\ \to Hom_{G_F}(\mathcal{W}^o(\Gamma), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

Proposition 5.2. *Pour* $\mathcal{C} = \mathcal{Q}(F[\Gamma])$, *(resp.* $\mathcal{S}(F[\Gamma])$*), l'application* ε *induit un homomorphisme, encore noté* ε, *de* $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ *dans* $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathcal{K}_0(F[\Gamma]))$ *tel que les suites suivantes soient exactes :*

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to \mathcal{W}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \xrightarrow{\varepsilon} \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathcal{K}_0(F[\Gamma])) \\ \xrightarrow{rg_F^+} Hom_{G_F}(\mathcal{W}^s(\Gamma), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}),$$

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \to \mathcal{W}(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \xrightarrow{\varepsilon} \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathcal{K}_0(F[\Gamma])) \\ \xrightarrow{rg_F^-} Hom_{G_F}(\mathcal{W}^o(\Gamma), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Démonstration. Le résultat découle de la propriété fonctorielle suivante : $\forall \chi \in R(\Gamma)$, $rg_\chi^-([V]) = rg_\chi([V^*])$. Par abus de notation, rg_F^+, (resp. rg_F^-), désigne l'application qui à $x \in \mathcal{K}_0(F[\Gamma])$ associe l'homomorphisme défini sur $R(\Gamma)$ par :

$$\forall \chi \in Irr(\Gamma),\ rg_{F,\chi}^+(x) = (s_{F,\chi}^+)^{-1} dim_\chi(x)),$$

$$\text{(resp. } rg_{F,\chi}^-([V,b]) = (s_{F,\chi}^-)^{-1} dim_\chi(x)).$$

et prolongé par linéarité.

Remarque.

L'application rg se factorise en un isomorphisme de $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathcal{K}_0(F[\Gamma]))$ sur $\hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}))$. L'image de rg_F^+, (resp. rg_F^-), dans la suite exacte ci-dessus est l'ensemble des applications f telles que $f(\chi)$ est égale à 1 sur les caractères de *type* -3, (resp. *type* 3). Si les indices $s_{F,\chi}$ sont égaux à 1, les deux suites suivantes sont exactes :

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to \mathcal{W}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})) \\ \to Hom_{G_F}(\mathcal{W}^s(\Gamma), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0,$$

$$0 \to \tilde{\mathcal{K}}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma])) \to \mathcal{W}(\mathcal{Q}(F[\Gamma])) \to \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z})) \\ \to Hom_{G_F}(\mathcal{W}^o(\Gamma), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

Le lemme 5.3 ci-dessous est l'analogue du lemme 4.3.

LEMME 5.3. *L'application ${}^tT$ induit deux suites exactes :*

$$0 \to \frac{Hom_{G_F}(R^s(\Gamma), \mathbb{Z})}{Res(Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}))} \to \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}))$$
$$\to Hom_{G_F}(\mathcal{W}^s(\Gamma), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0,$$

$$0 \to \frac{Hom_{G_F}(R^o(\Gamma), \mathbb{Z})}{Res(Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}))} \to \hat{H}^0(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, Hom_{G_F}(R(\Gamma), \mathbb{Z}))$$
$$\to Hom_{G_F}(\mathcal{W}^o(\Gamma), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to 0.$$

Annexe. Équivalence de Morita

L'outil fondamental dans cette théorie est donné par l'équivalence de Morita.

Dans tout ce paragraphe, soit W un $F[\Gamma]$-module simple de type fini de commutant $End_{F[\Gamma]}(W)$ isomorphe à F.

Soit V un $F[\Gamma]$-module isotypique de type W, (i. e. V est un $F[\Gamma]$-module isomorphe à W^n).

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ les deux foncteurs suivants :
- le foncteur $\mathcal{F}$ de la catégorie des $F[\Gamma]$-modules de type W dans la catégorie des F-espaces vectoriels de type fini

$$\mathcal{F} \ : \ V \longrightarrow Hom_{F[\Gamma]}(W, V),$$

- le foncteur $\mathcal{G}$ de la catégorie des F-espaces vectoriels de type fini dans la catégorie des $F[\Gamma]$-modules de type W

$$\mathcal{G} \ : \ X \longrightarrow Hom_F(W^*, X),$$

(l'ensemble $Hom_F(W^*, X)$ est muni de la structure de $F[\Gamma]$-module suivante :

$$\forall \gamma \in \Gamma, \ \forall f \in Hom_F(W^*, X), \ (\gamma f)(w^*) = f(\gamma^{-1} w^*)).$$

LEMME 2.1. *Le couple $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est une équivalence de catégorie au sens de H. Bass.*

Démonstration. D'après [Ba], chapitre 2, paragraphe 1, il suffit de démontrer que l'application ϕ

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow Hom_F(W^*, Hom_{F[\Gamma]}(W, V)) \\ v &\longmapsto (w^* \longmapsto (w \longmapsto |\Gamma|^{-1} \sum_{\gamma \in \Gamma} < \gamma^{-1} w, w^* > \gamma v)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $F[\Gamma]$-module. Le corollaire 3 du paragraphe 2.2 de [Se1] montre que l'application

$$f \longmapsto |\Gamma|^{-1} \sum_i \sum_{\gamma \in \Gamma} (\gamma f)(\gamma^{-1} w_i^*)(w_i)$$

est l'application réciproque de l'application précédente (où $(w_i)_i$ est une F-base de W et $(w_i^*)_i$ la base duale).

COROLLAIRE 2.2. *1) Soient V et V' deux $F[\Gamma]$-modules de type W, alors $[V] = [V']$ dans $\mathcal{K}_0(F[\Gamma])$ si et seulement si les F-espaces vectoriels $Hom_{F[\Gamma]}(W, V)$ et $Hom_{F[\Gamma]}(W, V')$ ont même dimension.*
Soit α un $F[\Gamma]$-automorphisme de V, alors $[V, \alpha] = 1$ dans $\mathcal{K}_1(F[\Gamma])$ si et seulement si le déterminant du F-automorphisme $f \longmapsto \alpha \circ f$ de $Hom_{F[\Gamma]}(W, V)$ est égal à 1.
2) Supposons que F est algébriquement clos, alors les homomorphismes

$$\mathcal{K}_0(F[\Gamma]) \longrightarrow Hom(\mathcal{K}_0(F[\Gamma]), \mathbb{Z})$$
$$\mathcal{K}_1(F[\Gamma]) \longrightarrow Hom(\mathcal{K}_0(F[\Gamma]), F^*)$$

sont des isomorphismes.

Supposons de plus que W est muni d'une forme bilinéaire h non dégénérée invariante par Γ (s_h est donc un isomorphisme de W sur W^*). Soit $(w_i)_i$ une F-base de W, $(w_i')_i$ est la base duale relativement à h si

$$\forall i, j,\ h(w_i, w_j') = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker) ;}$$

ce qui équivaut à $s_h(w_j') = w_j^*$.

Soit b une forme bilinéaire non dégénérée définie sur V, invariante par Γ. L'ensemble $Hom_{F[\Gamma]}(W, V)$ est muni de la forme bilinéaire b_h non dégénérée suivante :

$$\begin{aligned} \forall f, g \in Hom_{F[\Gamma]}(W, V),\ b_h(f, g) &= Tr({}^t s_h^{-1} \circ {}^t f \circ s_b \circ g) \\ &= \sum_i b(g(w'i), f(w_i)). \end{aligned}$$

Soit X un F-espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire non dégénérée B, $Hom_F(W, X)$ est muni de la forme bilinéaire B_h non dégénérée invariante par Γ suivante :

$$\begin{aligned} \forall \alpha, \beta \in Hom_F(W, X) \quad B_h(\alpha, \beta) &= \sum_{\gamma \in \Gamma} Tr({}^t s_h^{-1} \circ {}^t(\gamma\alpha) \circ s_b \circ (\gamma\beta)) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_i B(\alpha(\gamma w_i'), \beta(\gamma w_i)), \end{aligned}$$

où Tr désigne la trace d'une application linéaire.

Si h est une forme bilinéaire symétrique, soient $\mathcal{FQ}$ et $\mathcal{GQ}$ les deux foncteurs suivants :

- le foncteur $\mathcal{FQ}$ de la catégorie des $F[\Gamma]$-modules quadratiques, (resp. symplectiques), de type W dans la catégorie des F-modules quadratiques, (resp. symplectiques),

$$\mathcal{FQ} \ : \ (V,b) \longrightarrow (Hom_{F[\Gamma]}(W,V), b_h),$$

- le foncteur $\mathcal{GQ}$ de la catégorie des F-modules quadratiques, (resp. symplectiques), dans la catégorie des $F[\Gamma]$-modules quadratiques, (resp. symplectiques), de type W

$$\mathcal{GQ} \ : \ (X,B) \longrightarrow (Hom_F(W,X), B_h).$$

Si h est une forme bilinéaire antisymétrique, soient $\mathcal{FS}$ et $\mathcal{GS}$ les deux foncteurs suivants :

- le foncteur $\mathcal{FS}$ de la catégorie des $F[\Gamma]$-modules quadratiques, (resp. symplectiques), de type W dans la catégorie des F-modules symplectiques, (resp. quadratiques),

$$\mathcal{FS} \ : \ (V,b) \longrightarrow (Hom_{F[\Gamma]}(W,V), b_h),$$

- le foncteur $\mathcal{GS}$ de la catégorie des F-modules quadratiques, (resp. symplectiques), dans la catégorie des $F[\Gamma]$-modules symplectiques, (resp. quadratiques), de type W

$$\mathcal{GS} \ : \ (X,B) \longrightarrow (Hom_F(W,X), B_h).$$

LEMME 2.2. *Les couples $(\mathcal{FQ},\mathcal{GQ})$ et $(\mathcal{FS},\mathcal{GS})$ sont des équivalences de catégorie au sens de H. Bass.*

Démonstration. D'après [Ba], chapitre 2, §1, il suffit de vérifier que l'application Φ

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow Hom_F(W, Hom_{F[\Gamma]}(W,V)) \\ v &\longmapsto (w' \longmapsto (w \longmapsto |\Gamma|^{-1} \sum_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma^{-1}w, w')\gamma v \end{aligned}$$

est une isométrie.

COROLLAIRE 2.4. *Soient* (V,b) *et* (V',b') *deux* $F[\Gamma]$*-modules quadratiques, (resp. symplectiques), de type* W*, alors* $[V]=[V']$ *dans* $\mathcal{K}_0(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$*, (resp.* $\mathcal{K}_0(\mathcal{S}(F[\Gamma]))$*), si et seulement si les* F*-espaces vectoriels quadratiques, (resp. symplectiques),* $(Hom_{F[\Gamma]}(W,V,b_h)$ *et* $(Hom_{F[\Gamma]}(W,V'),b_h)$ *sont isométriques.*

Soit α un $F[\Gamma]$-automorphisme de V appartenant à $O_{F[\Gamma]}(b)$, alors : $[(V,b),\alpha]=1$ dans $\mathcal{K}_1(\mathcal{Q}(F[\Gamma]))$, (resp. $\mathcal{K}_1(\mathcal{S}(F[\Gamma]))$), si et seulement si la F-isométrie $f\longmapsto\alpha\circ f$ de $(Hom_{F[\Gamma]}(W,V),b_h)$ est un commutateur.

BIBLIOGRAPHIE

[Ba] H. Bass, *Lectures on topics in algebraic K-theory*, Tata Institute, Bombay (1967).

[Bo] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques*, fasc. 23-24, Algèbre, chap. 8-9, Hermann, 1958-1959.

[C-P] P. E. Conner and R. Perlis, *A survey of trace forms of algebraic number fields*, World Sci. Publishing, Singapour (1984).

[D] P. Deligne, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Springer Lecture Notes in Math. **349** (1974), 501–507.

[E] A. M. Mc Evett, *Forms over semisimple algebras with involution*, J. Algebra **12** (1969), 105–113.

[F1] A. Fröhlich, *Arithmetic and Galois module structure for tame extensions*, J. reine angew. Math. **286-287** (1976), 380–440.

[F2] A. Fröhlich, *Orthogonal and symplectic representation of groups*, Proc. London Math. Soc. **24/3** (1972), 450–506.

[F3] A. Fröhlich, *Symplectic local constants and Hermitian Galois module structure*, Proc. Internat. Symposium Tyoto 1976, (ed. S. Iyanaga), Japan Soc. for the Promotion of Science, Tokyo (1977), 25–42.

[F4] A. Fröhlich, *Orthogonal representations of Galois groups, Stiefel-Whitney classes and Hasse-Witt invariants*, J. reine angew. Math. **360** (1985), 84–123.

[F-McE] A. Fröhlich and A.-M. MC Evett, *The representation of Groups by Automorphismes of Forms*, J. Algebra **12** (1969), 114–133.

[H] A. Heller, *Some exact sequences in algebraic K-theory*, J. Algebra **76** (1969), 389–408.

[H-W1] D. Holland and S. M. J. Wilson, *Localization and class groups of module categories with exactness defects*, à paraître.

[H-W1] D. Holland and S. M. J. Wilson, *Factor equivalence of rings of integers and Chinburg's invariant in the defect class group*, à paraître.

[Q1] J. Queyrut, *S-groupe de classes d'un ordre arithmétique*, J. Algebra, **76** (1982), 234–260.

[Q2] J. Queyrut, *Modules radicaux sur des ordres arithmétiques*, J. Algebra, **84** (1983), 420–440.

[Q3] J. Queyrut, *Invariants équivariants de la forme trace*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1987-88), Exposé 24, 24-01–24-08.

[Sc] W. Scharlau, *Quadratic and hermitian Forms*, Springer-Verlag, 1985.

[Se1] J.-P. Serre, *Représentation des groupes finis*, Herman, 1978.

[Se2] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[T] J. Tits, *Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford*, Inventiones Math. **5** (1968), 19–41.

[Ta] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s = 0$*, Birkhäuser, Boston, 1984.

[W] C. T. C. Wall, *Graded Brauer Group*, J. reine angew. Math. **213** (1963), 187–199.

Jacques Queyrut
Centre de Recherche en Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux I
33405 Talence Cedex