Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **8** *(1996), 213–238*

Bornes effectives pour certaines fonctions concernant les nombres premiers

par Jean-Pierre MASSIAS et Guy ROBIN

Résumé. Si p_k est le $k^{ème}$ nombre premier, $\theta(p_k) = \sum_{i=1}^{k} \log p_i$ la fonction de Chebyshev. Nous obtenons de nouvelles estimations et des améliorations des bornes données par Rosser et Schoenfeld, Schoenfeld et Robin pour les fonctions

$$p_k,\ \theta(p_k),\ S_k = \sum_{i=1}^{k} p_i,\ \text{ et } S(x) = \sum_{p \le x} p.$$

Ces estimations sont obtenues en utilisant des méthodes basées sur l'intégrale de Stieltjes et par calcul direct pour les petites valeurs.

1. Introduction

Soit p_k le $k^{ème}$ nombre premier, x un nombre réel positif, j et k deux nombres entiers positifs, on note

$$\log_2 x = \log\log x,$$

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{dt}{\log t} \right),$$

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \theta(x) &= \sum_{p \le x} \log p \\ \psi(x) &= \sum_{\substack{p,\, m \\ p^m \le x}} \log p \end{aligned}\right\} \text{Fonctions de Chebyshev.}$$

Manuscrit reçu le 27 Février 1994

Recherche subventionnée par "Centre National de la Recherche Scientifique", et le P.R.C./G.D.R. "Mathématiques et Informatique".

$$S^{(j)}(x) = \sum_{p \le x} p^j, j \ge 1,$$

$$S(x) = S^{(1)}(x),$$

$$S_k^{(j)} = S^{(j)}(p_k),$$

$$S_k = S_k^{(1)}.$$

R.H. veut dire que nous supposons que l'hypothèse de Riemann est vraie, **N.R.H.** signifie que l'on ne fait pas l'hypothèse.

Le but de cet article est de fournir des bornes explicites pour quelques-unes de ces fonctions. Nous donnons d'abord leurs développements asymptotiques. Puis nous présentons les meilleurs résultats actuellement connus. Quand ceux-ci sont nouveaux, nous en donnons la démonstration.

Cette publication a été suggérée par des articles précédents des auteurs [4,5] où des bornes explicites de $S(x)$ et S_k ont été utilisées. Les résultats obtenus ici sont également utiles à l'étude de la complexité des algorithmes [14,15].

D'autres fonctions comme

$$\sum_{p \le x} p^j \ \log^k p, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z},$$

peuvent également être étudiées.

1.1 Développements asymptotiques.

Massias [2, page 15] prouve qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout nombre réel $j > -1$

$$S^{(j)}(x) = li(x^{j+1}) + O(x^{j+1} e^{-a\sqrt{\log x}}). \tag{1.1}$$

En utilisant le développement asymptotique de $\mathrm{li}(x)$,

$$li(x) \asymp \frac{x}{\log x} \sum_{n \ge 0} \frac{n!}{\log^n x},$$

nous pouvons écrire

$$S^{(j)}(x) \asymp \frac{x^{j+1}}{(j+1)\log x} \sum_{n \ge 0} \frac{n!}{(j+1)^n \log^n x}. \tag{1.2}$$

En prenant $j = 0$ dans (1.1), nous en déduisons

$$p_k = li^{-1}(k) + O\left(ke^{-c\sqrt{\log k}}\right) \text{ pour } c > 0. \tag{1.3}$$

Cipolla [1, page 140] donne les premiers termes

$$\begin{aligned} p_k =& k\left\{\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} - \frac{\log_2^2 k - 6\log_2 k + 11}{2\log^2 k}\right. \\ & \left. + O\left(\left(\frac{\log_2 k}{\log k}\right)^3\right)\right\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

A partir de (1.1) et (1.3) nous obtenons

$$S_k^{(j)} \asymp \mathrm{li}(\mathrm{li}^{-1}(k)^{j+1}) + O\left(k^{j+1}e^{-\alpha_j\sqrt{\log k}}\right), \text{ pour } \alpha_j > 0. \tag{1.5}$$

En utilisant un théorème de Robin [8, pages 20 à 22] , nous avons

$$S_k^{(j)} \asymp \frac{1}{j+1}k^{j+1}(\log k)^j\left(1 + \sum_{n\geq 1}\frac{B_{n,j}(\log_2 k)}{(\log k)^n}\right), \tag{1.6}$$

où les polynômes $B_{n,j}$ vérifient la relation suivante

$$\begin{cases} B_{0,j}(x) = 1 \\ B'_{n+1,j}(x) = B'_{n,j}(x) - (n-j)B_{n,j}(x), \text{ pour } n \geq 0. \end{cases}$$

Nous calculons également

$$S_k = S_k^{(1)} \asymp \frac{k^2}{2}\log k\left(1 + \frac{\log_2 k - \frac{3}{2}}{\log k} + \frac{\log_2 k - \frac{5}{2}}{\log^2 k}\right), \tag{1.7}$$

$$S_k^{(j)} \asymp \frac{k^{j+1}}{j+1}(\log k)^j\left(1 + j\frac{\log_2 k - \frac{j+2}{j+1}}{\log k}\right). \tag{1.8}$$

1.2 Bornes explicites.

Les théorèmes ci-dessous sont exprimés de manière aussi proche que possible des développements asymptotiques correspondants.

THÉORÈME A.

(i) $p_k \geq k \log k$ pour tout $k \geq 2$,

(ii) $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$ pour tout $k \geq 2$, sans restriction si R.H., et si N.R.H. cette inégalité n'est peut-être pas vérifiée pour $e^{598} \leq p_k \leq e^{1\,800}$,

(iii) $p_k \geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 - 0,435\,3\dfrac{\log_2 k}{\log k}\right)$ pour tout $k \geq 2$, et

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1,002\,872) \text{ pour tout } k \geq 2.$$

(iv) $p_k \leq k(\log k + \log_2 k)$ pour tout $k \geq 6$,

(v) $p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + 1,8\dfrac{\log_2 k}{\log k}\right)$ pour tout $k \geq 13$,

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0,942\,7) \text{ pour tout } k \geq 15\,985,$$

(vi) $p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \dfrac{\log_2 k - 1,8}{\log k}\right)$ pour tout $k \geq 27\,076$ si R.H.

(i) a été démontrée en 1939 par Rosser [9, page 37], (iv) par Rosser et Schoenfeld en 1962 [11, page 69].

THÉORÈME B.

(i) $\theta(p_k) \geq k \log k$ pour tout $k \geq 13$,

(ii) $\theta(p_k) \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$ pour tout $k \geq 5\,107$,

(iii) $\theta(p_k) \geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \dfrac{\log_2 k - c}{\log k}\right)$ avec

$$c = 2,145\,4 \text{ pour } k \geq 2,$$

$$c = 2,1 \text{ pour } k \geq 495\,634,$$

(iv) $\theta(p_k) \leq k(\log k + \log_2 k)$ pour tout $k \geq 3$,

(v) $\theta(p_k) \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \dfrac{\log_2 k - 2}{\log k}\right)$ pour tout $k \geq 198$,

(i) a été annoncée par Rosser et Schoenfeld [12, page 243], et démontrée ainsi que (iv) par Robin [7, page 372].

Les assertions (ii), (iii), (v), (vi) du théorème A et (ii), (iii), (v) du théorème B seront démontrées au paragraphe 3. Ce sont des améliorations des inégalités suivantes démontrées par Robin [7].

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1,007\,262\,9) \text{ pour } k \geq 2, \tag{1.9}$$

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1) \text{ pour } 3 \leq p_k \leq 10^{11}, \tag{1.10}$$

$$p_k \le k(\log k + \log_2 k - 0,938\,5) \text{ pour } k \ge 8\,602, \tag{1.11}$$

$$\theta(p_k) \ge k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,145\,4}{\log k}\right) \text{ pour } k \ge 3,$$

$$\theta(p_k) \le k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1,918\,5}{\log k}\right) \text{ pour } k \ge 126, \tag{1.13}$$

$$\theta(p_k) \le k(\log k + \log_2 k - 0,946\,5) \text{ pour } k \ge 14. \tag{1.14}$$

Théorème C.

(i) $S_k \ge \dfrac{k^2}{2}\log k$, pour tout $k \ge 1$,

(ii) $S_k \ge \dfrac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,503\,4)$, pour tout $k \ge 127\,042$,

(iii) $S_k \ge \dfrac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,5)$, $\begin{cases} \text{pour tout } k \ge 305\,494 \text{ si R.H.,} \\ \text{pour tout } 305\,494 \le k \le e^{530} \\ \qquad\qquad \text{si N.R.H.,} \end{cases}$

(iv) $S_k \ge \dfrac{k^2}{2}\left(\log k + \log_2 k - 1,5 - \dfrac{3,568}{\log k}\right)$, pour tout $k \ge 2$,

(v) $S_k \le \dfrac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k)$, pour tout $k \ge 6$,

(vi) $S_k \le \dfrac{k^2}{2}\left(\log k + \log_2 k - 1,5 + \dfrac{1,805\log_2 k}{\log k}\right)$, pour tout $k \ge 18$,

(vii) $S_k \le \dfrac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,463)$, pour tout $k \ge 779$,

(viii) $S_k \le \dfrac{k^2}{2}\left(\log k + \log_2 k - 1,5 + \dfrac{\log_2 k - 2,29}{\log k}\right)$, pour tout $k \ge 10\,134$ si R.H.

(i) et (v) se déduisent de (ii) et (vii). Les autres inégalités sont démontrées au paragraphe 4.

Théorème D.

(i) $S(x) \ge \dfrac{x^2}{2\log x}$, pour tout $x \ge 347$,

(ii) $S(x) \ge \dfrac{x^2}{2\log x}\left(1 + \dfrac{0,954}{2\log x}\right)$, pour tout $x \ge 70\,841$,

(iii) $S(x) \geq \dfrac{x^2}{2\log x}\left(1+\dfrac{c}{\log x}\right)$, pour tout $x \geq x_0$ où c et x_0 sont donnés dans la table I,

(iv) $S(x) \geq \dfrac{x^2}{2\log x}\left(1+\dfrac{1}{2\log x}\right)$, $\begin{cases} \text{pour tout } x \geq 302\,971 \text{ si R.H.,} \\ \text{pour tout } 302\,971 \leq x \leq e^{98} \\ \qquad \text{et } x \geq e^{63\,864} \text{ si N.R.H.,} \end{cases}$

(v) $S(x) \leq \dfrac{x^2}{2\log x}\left(1+\dfrac{3}{5\log x}\right)$, pour tout $x \geq 24\,281$.

Table I

c	1/30	1/10	1/4	1/3	2/5	9/19
x_0	347	569	1 433	5 381	19 373	70 117

La preuve de ce théorème se trouve au paragraphe 5.

Les formules sont vérifiées par calcul direct pour $k \leq K = 1\ 000\ 000$. Nous supposerons donc dans les preuves suivantes $k > K$ et $p_k > p_K = 15\,485\,863$.

2. Lemmes

Nous énonçons ici, quelques lemmes utiles.

Lemme 2.1.

$p_k \leq k \log p_k$, pour tout $k \geq 4$.

Lemme 2.2.

$p_k \geq k(\log p_k - 2)$ pour tout $k \geq 5$.

Lemme 2.3.

Soient $\beta < 1/2$ et u_0 tels que $\log(1+u_0) \leq u_0 - \beta u_0^2$, alors $\log(1+u) \leq u - \beta u^2$ pour $0 \leq u \leq u_0$.

Lemme 2.4.

Soient $\beta < 1$ et u_0 tels que $\log(1+u_0) \geq \beta u_0$, alors $\log(1+u) \geq \beta u$ pour $0 \leq u \leq u_0$.

Lemme 2.5.

Soit $f(x) = (\log x - a)^c/x^b$ avec $b > 0$, $c > 0$, alors nous avons

$$f'(x) = (c + ab - b\log x)(\log x - a)^{c-1}/(x^{b+1}).$$

Le maximum de $f(x)$ est obtenu pour $\log x = a + c/b$ et sa valeur est $e^{-ab}\left(\frac{c}{be}\right)^c$.

Lemme 2.6.

Soit $I_n = \int_{x_0}^{x} \frac{tdt}{\log^n t}$, avec $x_0 \leq x$. Nous avons

(i) $I_n = \frac{x^2}{2\log^n x} - \frac{x_0^2}{2\log^n x_0} + \frac{n}{2} I_{n+1}$,

(ii) $I_{n+1}\left(\log x_0 - \frac{n}{2}\right) \leq \frac{x^2}{2\log^n x} - \frac{x_0^2}{2\log^n x_0}$,

(iii) $I_{n+1}\left(\log x - \frac{n}{2}\right) \geq \frac{x^2}{2\log^n x} - \frac{x_0^2}{2\log^n x_0}$.

Lemme 2.7.

Nous avons $\mid \theta(x) - x \mid \leq cx/\log x$, pour $e^{b_0} \leq x \leq e^{b_1}$, c, b_0, b_1 étant donnés dans la table II.

Lemme 2.8.

On peut écrire

$$|p_k - \theta(p_k)| \leq 0,007\,762\,9k \text{ si } \log p_k \geq \log p_K = 16,55 \tag{2.1}$$

$$|p_k - \theta(p_k)| \leq 8,072\frac{k}{\log k} \text{ si } \log p_k \geq 1\,040 \tag{2.2}$$

$$|p_k - \theta(p_k)| \leq 5,12\frac{k}{\log k} \text{ si } \log p_k \geq 1\,800 \tag{2.3}$$

$$|p_k - \theta(p_k)| \leq 0,96\frac{k}{\log k} \text{ si } \log p_k \geq 4\,164 \tag{2.4}$$

La formule (2.2) est vraie dès que $\log p_k \geq 16,55$, mais ne devient meilleure que la formule (2.1) que pour $\log p_k \geq 1\,040$. Il en est de même des suivantes.

Preuve. Schoenfeld [13, page 360] prouve le résultat

$$|\theta(x) - x| \leq \eta_j \frac{x}{\log^j x}, \text{ pour } x > 1,04.10^7,$$

et $\eta_1 = 0,007\,762\,9,\ \eta_2 = 8,072,\ \eta_3 = 10\,644, \eta_4 = 1,657.10^7$.

On a alors

$$(2.5) \qquad |\theta(p_k) - p_k| \leq \eta_j \frac{p_k}{\log^j p_k} \leq \eta_j \frac{k}{\log^{j-1} p_k},$$

d'après le lemme 2.1.

On prend $j = 1$ pour l'inégalité (2.1), $j = 2$ pour (2.2) et $j = 4$ pour (2.3) et (2.4).

Table II

$c.10^4$	b_0	b_1
7,5	40	42
8	–	45
9	29	51
10	–	56
11	28	62
12	–	68
13	–	73
14	27	80
15	–	86
16	–	92
17	–	98
18	26	105
19	–	111
20	–	117
21	–	123
22	–	129
23	–	135
24	–	141

$c.10^4$	b_0	b_1
25	25	147
26	–	158
27	–	164
28	–	170
29	–	176
30	–	182
31	–	188
32	–	194
33	–	208
34	24	214
35	–	221
36	–	227
37	–	233
38	–	240
39	–	246
40	–	262
41	–	268
42	–	275

$c.10^4$	b_0	b_1
43	–	281
44	–	288
45	–	294
46	–	313
47	–	320
48	–	326
49	23	333
50	–	340
51	–	347
52	–	368
53	–	375
54	–	382
55	–	389
56	–	397
57	–	420
58	–	428
59	–	435
60	–	442

$c.10^4$	b_0	b_1
61	–	470
62	–	478
63	–	485
64	–	493
65	–	523
66	–	531
67	–	540
68	–	548
69	22	582
70	–	590
71	–	598
72	–	637
73	–	646
74	–	688
75	–	697
76	–	745
77	–	797
77,629	–	∞

C'est une conséquence immédiate de la table publiée par Schoenfeld [13, page 358] et du résultat du même Schoenfeld [13, page 360],

$$\text{pour tout } x > 1,04\ 10^7, \text{ on a } |\theta(x) - x| < 0,007\ 762\ 9\frac{x}{\log x}. \blacksquare$$

3. Démonstration des théorèmes A et B

(a) Assertions (ii) et (iii) du théorème A. Les quatre lemmes suivants démontrent ces deux assertions

Lemme 3.1.

Pour $3 \leq p_k \leq e^{600}$, nous avons $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$.

Preuve.

Pour $3 \le p_k \le 10^{11}$ cela est vrai d'après (1.10).

Pour $10^{11} \le p_k \le e^{600}$ on a d'après le lemme (2.7),

$$p_k > \theta(p_k) - c\frac{p_k}{\log p_k} \text{ avec } c = 0,0071.$$

Plus simplement, le lemme (2.1) nous permet d'écrire

$$p_k > \theta(p_k) - ck.$$

En utilisant l'inégalité (1.12) on en déduit

$$p_k > k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,145\,4}{\log k} - c\right).$$

La fonction $k \mapsto \dfrac{\log_2 k - 2,145\,4}{\log k}$ est décroissante. Son minimum, sur l'intervalle qui nous intéresse vaut $0,007\ 104$, il est donc supérieur à la valeur de c. ■

Lemme 3.2.

Pour $e^{598} \le p_k \le e^{1\,800}$, les inégalités du (iii) du théorème A sont vérifiées, à savoir

$$p_k \ge k\left(\log k + \log_2 k - 1 - 0,435\,3\frac{\log_2 k}{\log k}\right) \text{ pour tout } k \ge 2,$$

$$\text{et } p_k \ge k(\log k + \log_2 k - 1,002\,872) \text{ pour tout } k \ge 2.$$

Plus précisément, la table III montre que si $e^{b_0} \le p_k \le e^{b_1}$, avec $600 \le b_0 \le b_1 \le 1\,700$, alors

$$p_k \ge k\left(\log k + \log_2 k - 1 - \alpha\frac{\log_2 k}{\log k}\right),$$

$$p_k \ge k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma).$$

Table III

b_0	α	$\gamma.10^3$	b_0	α	$\gamma.10^3$	b_0	α	$\gamma.10^3$
600	0,054 3	0,585	1 000	0,413 3	2,872	1 400	0,287 4	1,494
650	0,118 5	1,191	1 050	0,426 3	2,841	1 450	0,242 6	1,223
700	0,177 8	1,677	1 100	0,435 3	2,787	1 500	0,197 8	0,969
750	0,232 4	2,067	1 150	0,428 5	2,640	1 550	0,153 4	0,730
800	0,284 1	2,391	1 200	0,414 2	2,460	1 600	0,091 1	0,422
850	0,325 8	2,603	1 250	0,396 8	2,275	1 650	0,025 6	0,116
900	0,362 5	2,757	1 300	0,376 2	2,085	1 700	0,001 0	0,010
950	0,395 2	2,870	1 350	0,332 1	1,781	1,800		

On prendra pour b_0 les valeurs successives de la table et pour b_1 les mêmes valeurs décalées d' une ligne.

Preuve. Nous procédons comme dans le lemme 1 de [7, page 373].

Nous supposons que

$$\theta(p_k) \geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - \beta_{b_0}}{\log k}\right), \text{ pour } p_k \geq e^{b_0},$$

et que $e^{b_0} \leq p_k \leq e^{b_1}$, nous pouvons utiliser [13, page 358] pour écrire

$$\theta(p_k) - p_k \ \leq \varepsilon_{b_0} p_k.$$

Nous en déduisons que

$$p_k \geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 - \alpha_{b_0}\frac{\log_2 k}{\log k}\right), \text{ avec}$$

$$\alpha_{b_0} \geq \varepsilon_{b_0}\frac{\log k}{\log_2 k}\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - \beta_{b_0}}{\log k}\right) - \frac{\log_2 k - \beta_{b_0}}{\log_2 k}.$$

Comme la fonction dans le second membre de cette inégalité est croissante, nous pouvons prendre $k = e^{b_1}$ et écrire

$$\alpha_{b_0} = \varepsilon_{b_0}\frac{b_1}{\log b_1}\left(b_1 + \log b_1 - 1 + \frac{\log b_1 - \beta_{b_0}}{b_1}\right) - \frac{\log b_1 - \beta_{b_0}}{\log b_1}. \tag{3.1}$$

Nous remarquons que $b_0 \leq \log p_k \leq b_1$ entraîne $b_0 - \log b_0 < \log k < b_1$. Nous avons donc

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma_{b_0}), \tag{3.2}$$

où nous pouvons prendre $\gamma_{b_0} = \alpha_{b_0} \dfrac{\log(b_0 - \log b_0)}{b_0 - \log b_0}$.

Avec le même argument que dans le lemme 1 de [7, page 373], nous pouvons obtenir la meilleure valeur de β_{b_0} suivante

$$\beta_{b_0} = \frac{b_0(1+\delta) - \log b_0 + 1}{b_0 - 1}, \text{ avec} \tag{3.3}$$

$$\delta = \frac{1}{2}\frac{(\log b_0 - \gamma_{b_0} - 1)^2}{b_0} + \gamma_{b_0} + 1. \tag{3.4}$$

Nous itérons les relations (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) quatre fois dans chaque intervalle $[b_0, b_1]$, b_0 et b_1 variant de 50 en 50 dans l'intervalle $[600, 1\,800]$ avec comme premier intervalle $[598, 600]$ pour faire la jonction avec le lemme 3.1 . ■

Lemme 3.3. Si $p_k \geq e^{1\,800}$, $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$.

Preuve.

En utilisant (2.3) on obtient

$$p_k \geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 7,27}{\log k}\right).$$

Pour les valeurs de k qui sont concernées, $\log_2 k > 7,49$, l'assertion est donc démontrée.■

Lemme 3.4. Sous **R.H.**, on a $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$ pour $p_k \geq 3$.

Preuve.

Schoenfeld, [13, page 337], démontre l'inégalité suivante sous **R.H.**

$$|\theta(x) - x| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\log^2 x \text{ pour } x \geq 599. \tag{3.5}$$

Pour $p_k \geq 10^{11}$, nous pouvons écrire

$$\theta(p_k) < p_k + 0,052\frac{p_k}{\log^2 p_k},$$

$$p_k > \theta(p_k) - 0,052\frac{k}{\log k},$$

$$p_k > k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,159}{\log k}\right),$$

$$p_k > k(\log k + \log_2 k - 1).$$

(b) Assertion (v) du théorème B.

Nous allons considérer plusieurs intervalles $[k_0, k_1]$ et supposer que

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 1 + \alpha \log_2 k / \log k), \text{ pour } k_0 \leq k \leq k_1.$$

Posons alors

$$u(k) = \frac{\log_2 k - 1}{\log k} + \alpha \frac{\log_2 k}{\log^2 k},$$

$$\beta = \frac{u(k_0) - \log(1 + u(k_0))}{u^2(k_0)},$$

$$s(k) = k \left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k} \right),$$

$$f(k) = s(k) - \left(\log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1}{\log k} \right).$$

De plus, pour $\beta < 1/2$, définissons les deux assertions suivantes,

$$(T_1(X)) : \beta X^2 - (2\beta + \alpha + 1)X + \beta + 2,999 \geq 0, \text{ et}$$

$$(T_2(X)) : \beta X^2 - (2\beta + \alpha)X + \beta \geq 0.$$

Notre but est de montrer que $\theta(p_k) < s(k)$, pour $k_0 \leq k \leq k_1$.

Lemme 3.5.

Si, pour $k_0 \leq k \leq k_1$, $\theta(p_{k-1}) < f(k)$ et $T_1(\log_2 k)$ est vraie alors $\theta(p_k) < f(k+1)$.

Preuve.

$f(k)$ est croissante, car

$$f'(k) = s'(k) - \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k \log k} + \frac{2 - \log_2 k}{k \log^2 k} \right)$$

$$= \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1}{\log k} + \frac{3 - \log_2 k}{\log^2 k} - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2 - \log_2 k}{\log^2 k} \right)$$

$$\geq \log k + \log_2 k - \frac{1}{k} \left(1 + \frac{1}{\log k} \right) + \frac{\log k(\log_2 k - 1) - \log_2 k}{\log^2 k} > 0.$$

A l'aide du lemme (2.3) nous pouvons affirmer que la démonstration est terminée si

$$f(k+1) - f(k) \geq \log k + \log_2 k + u(k) - \beta u^2(k).$$

Comme f' est croissante, c'est une conséquence de l'inégalité suivante

$$f'(k) > \log k + \log_2 k + u(k) - \beta u^2(k), \text{ c'est-à-dire}$$

$$\text{(3.6)} \qquad \frac{3-(\alpha+1)\log_2 k}{\log^2 k} - \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2-\log_2 k}{\log^2 k}\right) + \beta u^2(k) > 0.$$

En utilisant la définition de $u(k)$, nous allons démontrer que

(3.7)

$$\frac{3+\beta-(2\beta+\alpha+1)\log_2 k + \beta \log_2^2 k}{\log^2 k} - \frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2-\log_2 k}{\log^2 k}\right) > 0.$$

Comme $k > K = 1\ 000\ 000$, nous avons

$$\frac{1}{k}\left(1 + \frac{1}{\log k} + \frac{2-\log_2 k}{\log^2 k}\right) < \frac{2,05.10^{-4}}{\log^2 k},$$

et comme $T_1(\log_2 k)$ est vérifiée, l'inégalité (3.7) est vraie et (3.6) est vérifiée.■

Lemme 3.6.

Si $T_2(\log_2 k)$ est vraie pour $k_0 \leq k \leq k_1$ et si $\theta(p_{k-1}) < f(k)$ alors $\theta(p_k) < s(k)$.

Preuve. A l'aide des hypothèses nous écrivons

$$\theta(p_k) = \theta(p_{k-1}) + \log p_k < f(k) + \log p_k,$$

$$\theta(p_k) < s(k) + u(k) - \beta u^2(k) - \frac{\log_2 k - 1}{\log k}.$$

$$= s(k) + \frac{\alpha \log_2 k}{\log^2 k} - \beta u^2(k).$$

Comme $T_2(\log_2 k)$ est vraie,

$$\beta u^2(k) - \frac{\alpha \log_2 k}{\log^2 k} > \frac{\beta \log_2^2 k - (2\beta+\alpha)\log_2 k + \beta}{\log^2 k} > 0.$$

La démonstration est ainsi terminée.

LEMME 3.7.

Les hypothèses $T_1(\log_2 k)$ et $T_2(\log_2 k)$ sont vraies pour $K < k < e^{4\,164}$.

Preuve. La démonstration fait ici aussi appel à des calculs numériques résumés dans la table ci-dessous.

$\log k_0$	$\log k_1$	j	c	α	$u(k_0)$	β	γ	δ
13	18	1	$0,023\,99$	$0,485\,64$	$0,127\,75$	$0,461\,12$		$12,840$
18	53	1	$0,007\,77$	$0,620\,51$	$0,110\,56$	$0,465\,96$	$17,483$	$17,541$
53	153	1	$0,007\,77$	$0,854\,95$	$0,057\,25$	$0,481\,70$	$52,857$	$29,898$
153	407	1	$0,007\,77$	$1,207\,01$	$0,026\,60$	$0,491\,31$	$152,586$	$64,323$
407	745	1	$0,007\,77$	$1,585\,20$	$0,012\,36$	$0,495\,92$	$406,050$	$143,130$
745	988	1	$0,007\,77$	$1,835\,05$	$0,007\,56$	$0,497\,50$	$743,957$	$240,912$
988	1 108	1	$0,007\,77$	$1,954\,40$	$0,005\,98$	$0,98\,02$	$986,082$	$308,473$
1 108	1 211	2	$0,007\,47$	$2,004\,01$	$0,005\,44$	$0,498\,20$	$1\,107,31$	$341,77$
1 211	1 394	2	$0,006\,79$	$2,042\,38$	$0,005\,05$	$0,498\,32$	$1\,210,69$	$369,940$
1 394	1 810	3	$0,005\,63$	$2,102\,75$	$0,004\,48$	$0,498\,51$	$1392,23$	$418,97$
1 810	4 164	4	$0,002\,88$	$2,208\,73$	$0,003\,60$	$0,498\,80$	$1\,775,82$	$512,09$

LEMME 3.8. Soit $k > e^{4\,164}$, nous avons

$$p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k}{\log k}\right).$$

Preuve.

(2.4) et (1.13) démontrent ce résultat.

LEMME 3.9. Pour $k > e^{4\,164}, T1(\log_2 k)$ et $T2(\log_2 k)$ sont vérifiées.

Preuve. A l'aide du lemme (3.8) nous pouvons prendre $\alpha = 1$, ce qui entraîne $\beta = 0,499\,4$ et le résultat est démontré.

Cela termine la démonstration de l'assertion (v) du théorème B.

(c) Assertions (v) et (vi) du théorème A.

LEMME 3.10. Pour $k \geq 13$,

$$p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + 1,8\frac{\log_2 k}{\log k}\right).$$

Preuve. On subdivise en deux intervalles: $\log k \leq 1039,8$ et $\log k \geq 1039,8$.

On utilise les inégalités (2.1) et (2.2) du lemme (2.8) et l'inégalité (v) du théorème B pour obtenir

(1) pour $\log k \leq 1\,039,8$ on a

$$p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k}\right) + 0,007\,762\,9k. \tag{3.8}$$

La fonction $k \mapsto \dfrac{\log k}{\log_2 k}\left(\dfrac{\log_2 k - 2}{\log k} + 0,007\,762\,9\right)$ est croissante. Son maximum est obtenu en $\log k = 1\,039,8$ et il donne le résultat.

(2) pour $\log k \geq 1\,039,8$, on a

$$p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2}{\log k}\right) + \frac{8,072k}{\log k}.$$

La fonction $k \mapsto \dfrac{\log k}{\log_2 k}\left(\dfrac{\log_2 k + 6,072}{\log k}\right)$ est décroissante. Son maximum est obtenu en $\log k = 1\,039,8$ et il donne le résultat.

LEMME 3.11. Pour $k \geq 15\,985$,

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0,942\,7).$$

Preuve. C'est une conséquence du lemme précédent pour $\log k \geq 169$. Dans le cas contraire, d'après le lemme 2.5 et la relation (3.8) il vient, pour tout k dans l'intervalle $[K, e^{169}]$,

$$p_k \leq k(\log k + \log_2 k - 0,942\,45),$$

majoration que l'on améliore en la réinjectant dans

$$p_k \leq \theta(p_k) + 0,007\,762\,9\frac{p_k}{\log p_k},$$

et en utilisant de nouveau l'inégalité (v) du théorème B.

Ainsi, en utilisant (2.1), nous obtenons

$$p_k \leq \theta(p_k) + 0,007\,762\,9\frac{p_k}{\log k + \log_2 k},$$

$$p_k \leq \theta(p_k) + 0,007\,762\,9\frac{k(\log k + \log_2 k - 0,942\,45)}{\log k + \log_2 k}.$$

Ceci donne le résultat dans l'intervalle considéré.

Lemme 3.12. Sous **R.H.**, pour tout $k \geq 27\,075$

$$p_k \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 1,8}{\log k}\right).$$

Preuve. Pour $K < k \leq e^{24}$, c'est une conséquence du lemme précédent et pour $k > e^{24}$, on utilise (3.5).

(d) Assertions (ii) et (iii) du théorème B. Nous présentons ici une démonstration différente de celle proposée dans [7]. Pour γ réel positif, posons

$$s(k) = k\left(\log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 2,1}{\log k}\right),$$

$$h(k) = \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - \gamma}{\log k},$$

$$f(k) = s(k) - h(k).$$

On veut démontrer que $\theta(p_k) \geq s(k)$ pour $k \geq K$ sachant que cette inégalité est vraie pour $k = K$.

Remarquons que les trois inégalités $\theta(p_{k-1}) \geq f(k)$, $\log p_k \geq f(k+1) - f(k)$ et $\log p_k \geq h(k)$ entraînent $\theta(p_k) \geq f(k+1)$ et $\theta(p_k) \geq s(k)$. Il nous faut donc montrer que $\log p_k \geq f(k+1) - f(k)$ et $\log p_k \geq h(k)$ pour prouver, par récurrence le résultat.

Nous avons besoin de considérer deux intervalles.

(1) $13,81 \leq \log k \leq 25$.

Dans ce cas

$$p_k \geq \theta(p_k) \geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2,1454}{\log k}\right),$$

soit $p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 0,965\,3)$, et

$$\log p_k \geq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1,062}{\log k}.$$

(2) $\log k \geq 25$.

D'après le théorème A (iii), on peut écrire

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1,002\,872),$$

d'où

$$\log p_k \geq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - 1,095}{\log k}.$$

La condition $\log p_k \geq h(k)$ est donc vérifiée en prenant dans le premier intervalle $\gamma = 1,062$ et dans le second $\gamma = 1,095$.

Etudions maintenant l'autre condition $\log p_k \geq f(k+1) - f(k)$. Lorsque k et $k+1$ sont dans le même intervalle

$$f(k+1) - f(k) \leq s(k+1) - s(k).$$

Lorsque k est dans le premier intervalle et $k+1$ dans le second, on obtient la même inégalité mais en choisissant le γ du second intervalle.

On a

$$s'(x) = \log x + \log_2 x + \frac{\log_2 x - 1,1}{\log x} + \frac{3,1 - \log_2 x}{\log^2 x},$$

$$s''(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{\log x} + \frac{2,1 - \log_2 x}{\log^2 x} - \frac{7,2 - 2\log_2 x}{\log^3 x}\right),$$

$s(k+1) - s(k) = s'(k) + s''(x_0)$ avec $k < x_0 < k+1$, soit $s(k+1) - s(k) \leq s'(k) + \frac{2}{k}$.

On sera sûr de l'inégalité $f(k+1) - f(k) \leq \log p_k$ si

$$s'(k) + \frac{2}{k} \leq \log k + \log_2 k + \frac{\log_2 k - \gamma}{\log k},$$

$$\text{soit } 1,1 - \gamma \geq \frac{3,1 - \log_2 k}{\log k} + \frac{2\log k}{k},$$

ce qui est vérifié sur chacun des intervalles.

Les deux conditions sont toujours vérifiées et l'assertion est ainsi démontrée.■

4. Démonstration du théorème C

a) Assertions (ii), (iii) and (iv).

Soient ε et b deux nombres réels positifs, $s(k)$ et $f(k)$ les fonctions définies par

$$s(k) = \frac{k^2}{2}\left(\log k + \log_2 k - \frac{3}{2} - \varepsilon - \frac{b}{\log k}\right),$$

$$f(k) = s(k) - k\log k.$$

LEMME 4.1. k étant un nombre entier positif,

$$f(k+1) - f(k) \leq k\left(\log k + \log_2 k - 1 - \varepsilon + \frac{\frac{1}{2} - b}{\log k} + \frac{b}{2\log^2 k} + \frac{\log k}{k}\right).$$

Preuve. Calculons les deux premières dérivées de f, nous obtenons

$$f'(x) = x\left(\log x + \log_2 x - 1 - \varepsilon + \frac{\frac{1}{2} - b}{\log x} + \frac{b}{2\log^2 x}\right) - \log x - 1,$$

$$f''(x) = \log x + \log_2 x - \varepsilon + \frac{\frac{3}{2} - b}{\log x} + \frac{3b - 1}{2\log^2 x} - \frac{b}{\log^3 x} - \frac{1}{x}.$$

Nous appliquons alors la formule de Taylor, $f(k+1)-f(k) = f'(k)+f''(k_1)$, avec $k < k_1 < k+1$. Comme f'' est croissante, nous obtenons

$$f(k+1) - f(k) \leq f'(k) + f''(k+1) \leq f'(k) + 2\log k.$$

LEMME 4.2.

$$S_k \geq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1{,}503\,4), \text{ pour tout } k \geq 127\,042,$$

$$S_k \geq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1{,}5), \text{pour tout } 305\,494 \leq k \leq e^{541}.$$

Preuve.

a) Considérons d'abord que $k \leq e^{530}$ et prenons $\varepsilon = b = 0$ dans les définitions de s et f.

Supposons maintenant que $k \geq K$. Si

$$S_{k-1} \geq f(k), \tag{4.1}$$

nous pouvons déduire, en utilisant l'assertion (i) du théorème A que $S_k \geq s(k)$. Il ne reste plus qu'à démontrer que (4.1) est vérifiée pour tout $K \leq k \leq e^{530}$. Nous utiliserons un raisonnement par récurrence.

Pour $k = K$, on vérifie que (4.1) est valide.

Montrons que $p_k \geq f(k+1) - f(k)$ ce qui revient à dire $S_k \geq f(k+1)$.

Pour $k \leq \pi(10^{11})$, nous utilisons le théorème B, assertion(iii), ainsi que l'inégalité

$x \geq \theta(x)$, (cf Schoenfeld [13, p.360]), ce qui s'écrit

$$p_k \geq \theta(p_k) \geq k\left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{\log_2 k - 2{,}1}{\log k}\right). \tag{4.2}$$

Remarquons que

$$\frac{\log_2 k - 2{,}1}{\log k} \geq \frac{1}{2\log k} + \frac{\log k}{k}.$$

Le lemme 4.1 donne le résultat. Pour $\pi(10^{11}) \leq k \leq e^{530}$, nous raisonnons de même, mais en prenant comme minoration de p_k une borne issue du lemme 2.7, c'est à dire

$$p_k + 69 \cdot 10^{-4}\frac{p_k}{\log p_k} \geq \theta(p_k).$$

A l'aide du lemme 2.1, nous obtenons le résultat.

b) Pour $e^{530} \leq k \leq e^{1\,800}$ nous prenons $\varepsilon = 0{,}003\,4$ et $b = 0$ dans les définitions de f et s et nous utilisons les bornes trouvées dans la table III.

$$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma).$$

Nous vérifions alors l'inégalité suivante

$$k(\log k + \log_2 k - 1 - \gamma) \geq f(k+1) - f(k).$$

La valeur de k permettant d'obtenir la constante ε se trouve dans l'intervalle $[e^{950}, e^{1\,000}]$.

c) Pour $k \geq e^{1\,800}$, nous utilisons le théorème A, assertion (ii), c'est-à-dire l'inégalité

$p_k \geq k(\log k + \log_2 k - 1)$, et il ne reste plus qu'à vérifier

$$\frac{1}{2\log k} + \frac{\log k}{k} \leq 0{,}003\,4.$$

Lemme 4.3. Si **R.H.**

$$S_k \geq \frac{k^2}{2}(\log k + \log_2 k - 1,5), \text{ pour tout } k \geq 305\,494.$$

Preuve.

Comme dans le lemme 4.2, il nous faut montrer que $p_k \geq f(k+1) - f(k)$ avec $\varepsilon = 0$ et $b = 0$. Avec le lemme 4.1, la relation (3.5) et l'assertion (iii) du théorème B, il reste à démontrer que

$$\frac{\log_2 k - 2,1}{\log k} - \frac{\sqrt{p_k}\log^2 p_k}{8\pi k} \geq \frac{1}{2\log k} + \frac{\log k}{k},$$

ce qui est vérifié car $p_k \leq \frac{3}{2}k\log k$.

Lemme 4.4.

$$S_k \geq \frac{k^2}{2}\left(\log k + \log_2 k - 1,5 - \frac{3,568}{\log k}\right), \text{ pour tout } k \geq 2.$$

Preuve. Jusqu'à $\log k = 1\,000$, c'est une conséquence du lemme 4.2. Pour les valeurs plus grandes de k nous utilisons le lemme 4.1 avec $\varepsilon = 0$ et $b = 3,568$. Il ne reste plus à démontrer, comme au lemme 4.2, que

$$\frac{\alpha \log_2 k}{\log k} \leq \frac{b - \frac{1}{2}}{\log k} - \frac{b}{2\log^2 k} - \frac{\log k}{k}.$$

La signification de α et ses valeurs sont données au lemme (3.2).

b) Assertions (vi), (vii) et (viii). Soient ε, b, μ trois nombres réels positifs, posons

$$s(k) = \frac{k^2}{2}\left(\log k + \log_2 k - \frac{3}{2} + \varepsilon + \frac{b\log_2 k - \mu}{\log k}\right),$$

$$f(k) = s(k) - k(\log k + \log_2 k).$$

Lemme 4.5. Pour $k \geq K$, nous avons

$$f(k+1) - f(k) \geq k \left(\log k + \log_2 k - 1 + \varepsilon + \frac{b \log_2 k - \mu + \frac{1}{2} + \nu(k)}{\log k} \right),$$

$$\text{avec } \nu(k) = \frac{b(1 - \log_2 k) + \mu - 7\ 10^{-3}}{2 \log k}.$$

Preuve.

$$f'(x) = x \left(\log x + \log_2 x - 1 + \varepsilon + \frac{b \log_2 x - \mu + \frac{1}{2}}{\log x} + \frac{b(1 - \log_2 x) + \mu}{2 \log^2 x} \right) - \log x - \log_2 x - 1 - \frac{1}{\log x},$$

$$f''(x) = \log x + \log_2 x + \varepsilon - \frac{1}{x} + \frac{1}{\log x} \left(b \log_2 x - \mu + \frac{3}{2} - \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{2 \log^2 x} \left(3b \log_2 x - 3b - 3\mu + 1 - \frac{2}{x} \right) + \frac{1}{\log^3 x} \left(b \log_2 x - \mu - \frac{3b}{2} \right).$$

Comme f'' est positive dans l'intervalle que nous considérons, nous pouvons en déduire, en utilisant le théorème des accroissements finis, que $f(k+1) - f(k) > f'(k)$. Comme, pour $x > K$, nous avons

$$\log x + \log_2 x + 1 + \frac{1}{\log x} < 7\ 10^{-3} \frac{x}{2 \log^2 x},$$

la démonstration est achevée.

Lemme 4.6.

$$S_k \leq \frac{k^2}{2} \left(\log k + \log_2 k - 1,5 + \frac{1,805 \log_2 k}{\log k} \right), \text{ pour tout } k \geq 18 \tag{4.3}$$

$$S_k \leq \frac{k^2}{2} (\log k + \log_2 k - 1,463), \text{ pour tout } k \geq 779. \tag{4.4}$$

Preuve. Les preuves de ce lemme et du suivant se font par récurrence. On montre que $S_{k-1} < f(k)$ entraîne $S_k < f(k+1)$. Pour cela il faut que l'inégalité suivante soit vérifiée

$$p_k < f(k+1) - f(k). \tag{4.5}$$

On utilise pour cette comparaison une minoration du deuxième membre obtenue au lemme 4.5 et une majoration de p_k obtenue au théorème A. La démonstration est réalisée en considérant plusieurs intervalles.

Le nombre k_0 défini par

$$\frac{1,805 \log_2 k_0}{\log k_0} = 1,463,$$

vérifie $250 \leq \log k_0 \leq 300$.

Le lemme sera démontré en prouvant (4.4) pour $\log k \leq 300$ et (4.3) pour $\log k \geq 250$.

a) Pour $\log k \leq 300$ nous prenons $b = \mu = 0$ et $\varepsilon = 0,037$, dans $s(k)$ et $f(k)$.

Pour obtenir l'inégalité (4.5), montrons que

$$p_k \leq k \left(\log k + \log_2 k - 1 + \varepsilon + \frac{1/2 + \nu}{\log k} \right), \text{ avec } \nu = \nu(k) = -\frac{7.10^{-3}}{2 \log k}.$$

Pour $13 < \log k < 24$, nous utilisons l'assertion (v) du théorème A pour majorer p_k. Nous obtenons alors l'inégalité

$$\varepsilon + \frac{1/2 + \nu}{\log k} > 1 - 0,942\,7.$$

Pour $24 \leq \log k \leq 300$, nous écrivons, d'après le lemme 2.7, l'inégalité suivante

$$p_k \leq \theta(p_k) + ck, \text{ avec } c = 0,004\,8.$$

En utilisant le théorème B(v), il ne nous reste plus qu'à prouver

$$\varepsilon + \frac{1/2 + \nu}{\log k} > \frac{\log_2 k - 2}{\log k} + 0,004\,8.$$

Or, d'après le lemme 2.5, la fonction $x \mapsto \dfrac{\log_2 x - 5/2}{\log x}$ atteint son maximum $0,030\,19$. (4.4) est prouvé.

b) Pour $\log k \geq 250$, prenons $b = 1,805$, $\mu = 0$ et $\varepsilon = 0$. Comme $\nu(k) > -2 \cdot 10^{-4}$, nous devons démontrer l'inégalité suivante

$$p_k \leq k \left(\log k + \log_2 k - 1 + \frac{1,805 \log_2 k + 0,483\,5}{\log k} \right).$$

Pour $250 \leq \log k \leq 1\ 093$, nous utilisons le théorème A(v) et c'est alors une conséquence de l'inégalité

$$1,874\,1 \log_2 k \leq 1,805 \log_2 k + 0,483\,5.$$

Pour $1\ 093 < \log k$, nous utilisons (2.5) et obtenons

$$p_k \leq \theta(p_k) + 8,072 \frac{p_k}{\log^2 p_k} \leq \theta(p_k) + 8,072 \frac{k}{\log p_k} \leq \theta(p_k) + 8,072 \frac{k}{\log k}.$$

Le théorème B(v) permet de conclure car

$$\log_2 k + 6,072 \leq 1,805 \log_2 k + 0,483\,5. \blacksquare$$

Lemme 4.7. L'assertion $S_k \leq \dfrac{k^2}{2}\left(\log k + \log_2 k - 1,5 + \dfrac{\log_2 k - 2,29}{\log k}\right)$ pour tout $k \geq 10\ 134$ est vérifiée sous l'hypothèse R.H.

Preuve. Prenons, dans le lemme 4.5, $\varepsilon = 0, b = 1, \mu = 2,29$, alors $\nu(k) \geq -0,006\,9$. La majoration du théorème A (vi) nous permet d'obtenir le résultat. $\blacksquare$

5. Démonstration du théorème D

Supposons que, pour tout $t \leq x$, $\theta(t) < t(1 + c_1/\log t)$ et $\theta(x) > x(1 - c_2/\log x)$. Ecrivons ensuite

$$\sum_{2<p\leq x} p = \int_e^x \frac{t}{\log t} d\theta(t).$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\sum_{2<p\leq x} p = \left[\frac{t\theta(t)}{\log t}\right]_e^x - \int_e^x \frac{\log t - 1}{\log^2 t}\theta(t)dt.$$

Utilisons le lemme 2.6

$$S(x) \geq \frac{x^2}{2\log x} + \left(\frac{1}{4} - \frac{c_1}{2} - c_2\right)\frac{x^2}{\log^2 x} + \frac{x^2}{4\log^3 x}.$$

Le lemme 2.7 nous indique que nous pouvons prendre les valeurs suivantes pour c_1 et c_2

pour $p_K \leq x \leq 10^{11},\ c_1 = 0,\ c_2 = 0{,}007\,762\,9$,

pour $e^{25} \leq x \leq e^{66{,}66},\ c_1 = c_2 = 0{,}002\,5$,

pour $e^{66{,}66} \leq x \leq e^{98},\ c_1 = c_2 = 0{,}001\,7$,

pour $e^{98} \leq x \leq e^{1\,040},\ c_1 = c_2 = 0{,}007\,762\,9$,

pour $e^{1\,040} \leq x,\ c_1 = c_2 = 8{,}072/\log x$,

pour $e^{1\,319} \leq x,\ c_1 = c_2 = 10\,644/\log^2 x$.

Sous R.H. nous utilisons (3.5) pour $x \geq e^{98}$.

Ceci nous permet de démontrer les formules (i), (ii), (iii), et (iv) du théorème D.

Etudions maintenant la formule (v). Comme précédemment, écrivons la somme

$$\sum_{x_0 \leq p \leq x} p = \int_{x_0^-}^{x} \frac{t d\theta(t)}{\log t}.$$

Avec une intégration par parties, on obtient

$$\sum_{x_0 \leq p \leq x} p = \frac{x\theta(x)}{\log x} - \frac{x_0\theta(x_0)}{\log x_0} - \int_{x_0}^{x} \frac{\log t - 1}{\log^2 t}\theta(t) dt.$$

Supposons que $\theta(x) \leq x(1+c_1/\log x)$ et que, pour tout $t \in [x_0, x]$, $\theta(t) \geq t(1 - c_2/\log t)$, on a alors

$$\sum_{x_0 \leq p \leq x} p \leq \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{c_1}{\log x}\right) - \frac{x_0^2}{2}\left(1 - \frac{c_2}{\log x_0}\right) - \int_{x_0}^{x} \frac{\log t - 1}{\log^2 t} t dt$$
$$+ c_2 \int_{x_0}^{x} \frac{\log t - 1}{\log^3 t} t dt.$$

Posons $a = 2c_1 + \dfrac{1}{2} + c_2 + \dfrac{1}{2(\log x_0 - 1)}$ et $b = \dfrac{1}{2} - c_2 + \dfrac{1}{2(\log x_0 - 1)}$. Le lemme 2.6 entraîne

$$\sum_{x_0 \leq p \leq x} p \leq f_a(x) - f_b(x_0) \text{ avec } f_\alpha(x) = \frac{x^2}{2\log x}\left(1 + \frac{\alpha}{\log x}\right).$$

Si $S(x_0) \leq f_\alpha(x_0)$, nous avons $S(x) \leq f_\beta(x)$ quand le couple (α, β) vérifie

$$\frac{x^2}{\log^2 x}(\beta - a) \geq \frac{x_0^2}{\log^2 x_0}(\alpha - b).$$

(1) Si $x < 10^{11}$ et $x_0 \geq p_K$, nous pouvons prendre $c_1 = 0$, $c_2 = 1/41$, $\alpha = 0,6$; nous avons alors $a = 0,564\,26\ldots$, $b = 0,515\,48\ldots$ et nous pouvons prendre $\beta = 0,6$.
(2) Pour $x = 10^{11}$, nous pouvons prendre $\beta = 0,565$.
(3) Si $x \geq 10^{11}$ et $x_0 = 10^{11}$, nous pouvons prendre $c_1 = c_2 = 0,007\ 762\ 9$, $\alpha = 0,565$; on a alors $a = 0,543\ 859\ldots$, $b = 0,512\,81\ldots$ et la valeur $\beta = 0,6$ convient. ■.

Bibliographie

[1] M. Cipolla, *La determinazione assintotica dell nimo numero primo*, Rend. Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Ser. 3, **8** (1902), 132–166.

[2] J.-P. Massias, *Ordre maximum d'un élément du groupe symétrique et applications* (1985), Thèse de 3ème cycle, Limoges, France.

[3] J.-P. Massias, *Majoration explicite de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **6** (1984), 269–280.

[4] J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, *Evaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Acta Arithmetica **L** (1988), 221–242.

[5] J.-P. Massias, J.-L. Nicolas, G. Robin, *Effective Bounds for the maximal order of an element in the symmetric group*, Math. of Comp. **53** (1989), 665–678.

[6] C.Pereira, *Estimates for the Chebyshev Function* $\psi(x) - \theta(x)$, Math of Comp **44** (1985), 211–221.

[7] G. Robin, *Estimation de la fonction de Tchebycheff* θ *sur le k-ième nombre premier et grandes valeurs de la fonction* $\omega(n)$, *nombre de diviseurs premiers de* n, Acta Arithmetica **XLII** (1983), 367–389.

[8] G. Robin, *Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques*, Pub. Inst. Math. Beograd tome 43, (57), (1988), 17–25.

[9] J.B. Rosser, *The n-th prime is greather than* $n \log n$, Proc. London Math. Soc. (2) **45** (1939), 21–44.

[10] J.B. Rosser, *Explicit bounds for some functions of prime numbers*, Amer. J. Math. **63** (1941), 211–232.

[11] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois Journ. Math. **6** (1962), 64–94.

[12] J.B. Rosser, L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$, Math. of Comp. **29** (1975), 243–269.

[13] L. Schoenfeld, *Sharper bounds for the Chebyshev functions* $\theta(x)$ *and* $\psi(x)$*, II*, Math. of Comp. **30** (1976), 337–360.

[14] L.G. Valiant, M.S. Paterson, *Deterministic one counter automata*, Journal of Computer and System Sciences **10** (1975), 340–350.

[15] P.M.B. Vitanyi, *On the size of DOL languages. L. Systems*, Third Open House, Comput. Sci. Dept. Aarhus Univ., Aarhus, 1974 **15** (1974), Springer, Berlin, 78–92,

327–338. Lectures Notes in Computer Science.

Jean-Pierre Massias et Guy Robin
LACO CNRS
Faculté des Sciences,
123, avenue A. Thomas
87060 LIMOGES Cedex
e-mail : massias@cict.fr, robin@cict.fr