Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **10** (1998), 135–162

Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy

par Ali MESSAOUDI

Résumé. Dans ce travail, nous construisons explicitement deux isomorphismes métriques partout continus. L'un entre le système dynamique symbolique associé à la substitution $\sigma : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 02,\ 2 \mapsto 0$ et une rotation sur le tore $\mathbb{T}^2$; l'autre, entre le système adique stationnaire [33] associé à la matrice de la substitution et la même rotation. Pour cela, nous étudions les propriétés arithmétiques de la frontière d'un ensemble compact de $\mathbb{C}$ appelé "fractal de Rauzy". Les constructions se généralisent aux substitutions de la forme $\sigma_k : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 02, \cdots k-1 \mapsto 0k,\ k \mapsto 0$ où $k > 2$.

Abstract. Here we construct explicitly two metrical isomorphisms everywhere continuous. One between the symbolic dynamical system associated to the substitution $\sigma : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 02,\ 2 \mapsto 0$ and a rotation of the torus $\mathbb{T}^2$; the other is between the adic stationary system associated to the matrix of the substitution and the same rotation. For this we study the arithmetical properties of the boundary of a compact subset of $\mathbb{C}$ namely the "Rauzy fractal". The constructions are generalised to substitutions $\sigma_k : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 02, \cdots k-1 \mapsto 0k,\ k \mapsto 0$ où $k > 2$.

1. Introduction

Depuis quelques années, des connections ont été établies entre les systèmes dynamiques symboliques, les automorphismes du tore et les systèmes de numération. L'exemple le plus connu est lié au nombre d'or $\beta = (1+\sqrt{5})/2$ et au système dynamique symbolique associé à la substitution de Fibonacci $\tau : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 0$. Ce dernier [25] est métriquement isomorphe à la rotation d'angle β sur le tore $\mathbb{T}^1$. D'autre part il existe une application ϕ qui est un isomorphisme métrique entre le système adique stationnaire associé à la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la rotation d'angle $\beta = (1+\sqrt{5})/2$ sur le tore $\mathbb{T}^1$ (voir [33]). L'ensemble des points où ϕ n'est pas injective est

Manuscrit reçu le 31 juillet 1997.

dénombrable, il correspond à l'image réciproque par ϕ de l'orbite négative de 0 sous la rotation. Par ailleurs, le système markovien associé à la matrice L est métriquement isomorphe à la multiplication par $1/\beta$ dans le tore $\mathbb{T}^1$, et son extension naturelle s'interprète comme un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^2$ (voir aussi [2] et [20]).

Dans ce papier, nous étendons ces résultats aux substitutions de la forme σ_k où $k > 2$, définie par $\sigma_k : 0 \mapsto 01,\ 1 \mapsto 02, \cdots,\ k-1 \mapsto 0k,\ k \mapsto 0$ où $k > 2$.

En utilisant des méthodes spectrales, B. Solomyak a étudié (voir [31]) le système adique associé à ces substitutions. Toutefois son approche ne permet pas d'expliciter l'isomorphisme métrique. Dans ce papier nous explicitons les isomorphismes et nous mettons en évidence les propriétés arithmétiques des points où ils ne sont pas injectifs. Cela est lié à un système de numération complexe.

Nous étudierons essentiellement le cas $k = 2$ et nous noterons σ la substitution σ_2. Le cas $\sigma_k,\ k > 2$ se traite de la même façon, nous avons un système de numération dans $\mathbb{R}^k$. Nous verrons (section 4) que le système dynamique symbolique associé à la substitution σ est lié à un compact de $\mathbb{C}$ appelé "fractal de Rauzy".

La section 3 sera donc consacrée à l'étude des propriétés arithmétiques du fractal de Rauzy.
Le fractal de Rauzy est l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{\sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \forall i \geq 3, \varepsilon_i \in \{0,1\}; \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0\}$$

où α est l'une des deux racines complexes du polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ et $|\alpha| < 1$. Introduit par G. Rauzy [28], le fractal de Rauzy a de nombreuses propriétés : c'est un compact connexe de $\mathbb{C}$, à frontière fractale et à intérieur simplement connexe et il induit un pavage périodique du plan complexe. Il est partagé en trois régions qui induisent un autre pavage non périodique et auto-similaire du plan. Ces régions sont : $\mathcal{E}_0 = \alpha\mathcal{E},\ \mathcal{E}_1 = \alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}$. Le fractal de Rauzy a été aussi étudié par S. Ito et M. Kimura . Ils ont montré [32] que sa frontière est une courbe de Jordan générée par la méthode de Dekking pour la construction d'objets fractals (pour la méthode de Dekking, voir [3]). Pour plus de renseignements sur le fractal de Rauzy, on reffère à [22], [29] et [30]. Par ailleurs, pour tout nombre complexe z il existe un entier l tel que $z = \sum_{i=l}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i$ où $\varepsilon_i = 0$ ou 1 et $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0$. La suite des chiffres $(\varepsilon_i)_{i \geq l}$ est appelée α-développement de z. Nous montrerons que les points où les isomorphismes métriques ne sont pas injectifs correspondent aux nombres complexes qui ont plusieurs α-développements. Ainsi dans la section 3, en étudiant la frontière de $\mathcal{E}$, nous construirons un automate fini qui reconnait les α-développements multiples des nombres complexes. Cela donne des renseignements sur la frontière de $\mathcal{E}$, entre autre elle est de mesure nulle.

Dans la section 4, nous munirons le fractal de Rauzy d'une dynamique qui correspond à un échange adéquat des trois régions $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$. Nous expliciterons ainsi un isomorphisme métrique continu entre le système dynamique symbolique (Ω, T, m) associé à la substitution σ où T est le décalage et m est l'unique mesure ergodique sur Ω, et une rotation sur le tore $\mathbb{T}^2$. Un autre isomorphisme métrique sera établi entre le système adique stationnaire associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et la même rotation sur le tore $\mathbb{T}^2$.

Enfin, dans la section 5, en utilisant le fractal de Rauzy, nous donnerons explicitement un codage markovien de l'automorphisme hyperbolique M du tore $\mathbb{T}^3$. Le domaine fondamental du tore que l'on choisira est l'union de trois cylindres de bases respectives $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ et de hauteurs distinctes. Ce résultat rejoint un travail fait indépendamment dans [19] et [17], où l'on construit un codage sofique pour tout automorphisme hyperbolique du tore. Néanmoins ce codage ne permet pas de déterminer les points où il n'est pas injectif. L'avantage de l'exemple que l'on étudie est que notre codage permet de caractériser ces points (l'ensemble de ces points est de mesure nulle) et de décrire explicitement la partition markovienne.

2. Notations et définitions.

Soit A un alphabet fini, nous appelons mot, un élément du monoïde libre sur A noté A^*, $A^* = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A^k$ où $A^0 = \{\emptyset\}$, $\emptyset$ étant le mot vide. Un élément $u = u_0 \cdots u_n \cdots$ de $A^{\mathbb{N}}$ est appelé mot infini. Soit $u = u_0 u_1 \cdots$ un mot infini, un mot v est un facteur de u s'il existe un entier k tel que $v = u_k u_{k+1} \cdots u_{|v|+k-1}$. L'ensemble des facteurs de longueur n de u se note $L_n(u)$.

Soit $v \in L_n(u)$, nous disons que v est prolongeable à droite s'il existe $a \in A$, tel que $va \in L_{n+1}(u)$. Dans le cas où il existe trois éléments distincts a, b et c de A tels que va, vb et $vc \in L_{n+1}(u)$, v est dit tri-prolongeable à droite (pour ces définitions, voir par exemple [6]).

Notons $\mathcal{N}$ L'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartenant à $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ dans lesquelles ne figurent pas trois "1" consécutifs, et telles qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$, tel que pour tout entier $n \leq k$, $a_n = 0$.

Nous parlerons indifféremment d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartenant à $\mathcal{N}$ telle que $a_n = 0$ pour tout $n \leq k$ et de la suite $(a_n)_{n\geq k}$. Soit $(a_n)_{n\geq k}$ un élément de $\mathcal{N}$, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \geq p$, $a_n = 0$. Cette suite sera notée $(a_n)_{k\leq n\leq p}$ et l'ensemble de telles suites, $\mathcal{N}_f$.

Nous disons qu'une suite $(a_n)_{k\leq n\leq p}$ est supérieure lexicographiquement à $(b_n)_{k'\leq n\leq p'}$ s'il existe un entier $s\in\mathbb{Z}$, tel que pour tout $n>s$, $a_n=b_n$ et $a_s>b_s$.
Soit $\gamma\in\mathbb{C}$, nous posons $\mathbb{Z}^+[\gamma]=\{\sum_{i=0}^N a_i\gamma^i \mid \forall i\in\{0,\cdots N\}, a_i\in\mathbb{N}\}$ et $\mathbb{Z}^-[\gamma]=\{-x \mid x\in\mathbb{Z}^+[\gamma]\}$. Soit $z\in\mathbb{C}$ et $A\subset\mathbb{C}$, nous posons $A+z=\{x+z \mid x\in A\}$ et $zA=\{zx \mid x\in A\}$.
Nous notons $\mathrm{int}(A)$ l'intérieur de A, $\mathrm{Fr}(A)$ la frontière de A et $\overline{A}$ l'adhérence de A.

3. Caractérisation et propriétés de la frontière de $\mathcal{E}$

Historiquement, le fractal de Rauzy a été défini par G. Rauzy [28] comme un sous-ensemble $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$ où $\mathcal{F}=\{\sum_{i=0}^\infty \varepsilon_i B^i Z,\ (\varepsilon_i)\in\mathcal{N}\}$ tel que

$$B=\begin{pmatrix} -\theta & -\theta \\ 1-\theta^2 & -\theta^2 \end{pmatrix},\ Z=\begin{pmatrix} \theta-1 \\ \theta^2 \end{pmatrix},$$

et $\frac{1}{\theta}$ est la racine réelle du polynôme $P(x)=x^3-x^2-x-1$.
La matrice B a pour polynôme minimal $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$. Nous en déduisons l'existence de deux nombres complexes a et b tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N}, B^nZ=\begin{pmatrix} a\alpha^n+\overline{a\alpha^n} \\ b\alpha^n+\overline{b\alpha^n} \end{pmatrix}.$$

Il existe donc une application ψ linéaire bijective continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\psi(\mathcal{F})=\mathcal{E}$. En particulier $\psi(B^nZ)=\alpha^{n+3}$ pour tout entier n.

Proposition 1. *L'ensemble $\mathcal{E}$ induit un pavage de* $\mathbb{C}$ modulo $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha$*, c'est-à-dire $\mathcal{E}$ vérifie les propriétés suivantes:*

- $\overline{\mathrm{int}(\mathcal{E})}=\mathcal{E}$.
- $\mathbb{C}=\bigcup_{z\in\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}}(\mathcal{E}+z)$.
- $\forall z,z'\in\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}, z\neq z' \Rightarrow (\mathcal{E}+z)\cap\mathrm{int}(\mathcal{E}+z')=\emptyset$.

Preuve. L'ensemble $\mathcal{F}$ induit un pavage de $\mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$ (voir [28], [32]). Puisque $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{F}$ par l'application ψ, il suffit de montrer que $\psi(\mathbb{Z}^2)=\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$.

Or un calcul simple montre que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}=B^{-2}Z=\psi^{-1}(\alpha)$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}=B^{-3}Z=\psi^{-1}(1)$. D'où le résultat. □

3.1. Caractérisation de la frontière de $\mathcal{E}$. La frontière de $\mathcal{E}$ est l'union de six arcs de la forme $\mathcal{E}\cap(\mathcal{E}+u)$ où $u\in\{1,\alpha,1+\alpha,-1,-\alpha,-1-\alpha\}$ (voir figure 2). En plus si $u\in(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha)-\{0\}$ alors $\mathcal{E}\cap(\mathcal{E}+u)\neq\emptyset$ si et seulement si $u\in\{1,\alpha,1+\alpha,-1,-\alpha,-1-\alpha\}$.

Nous allons énoncer une proposition qui nous sera utile pour caractériser la frontière de $\mathcal{E}$.

Proposition 2. *Soit* $(\varepsilon_i)_{-k\leq i\leq 2}$ *un élément de* $\mathcal{N}_f$ *tel que* $\varepsilon_{-k} = 1$. *Si* $-k < 0$, *alors*

$$\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \sum_{i=-k}^{2} \varepsilon_i \alpha^i) = \emptyset.$$

figure 1 : Le fractal de Rauzy

figure 2 : Pavage périodique du plan par le fractal de Rauzy

Pour la preuve, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1. *Les relations suivantes sont vérifiées :*

1. $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - 1) = \mathcal{E} \cap (\alpha + \alpha^2 + \alpha^2\mathcal{E})$.
2. $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} - 1 - \alpha) = \mathcal{E} \cap ((\alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}) \bigcup (\alpha^2 + \alpha^2\mathcal{E}))$.
3. $\mathcal{E} \bigcap (\mathcal{E} - \alpha) = \mathcal{E} \bigcap ((\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^3\mathcal{E}) \bigcup (1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}))$.

Preuve. Les figures (2) et (3) illustrent cette preuve.
1) Rappelons que $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha + 1$. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) = (\mathcal{E} + 1) \cap (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E})$. À l'aide de calculs élémentaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\alpha - \alpha^2 &= \alpha^3 + \sum_{i\geq 1}^{\infty}(\alpha^{3i+2} + \alpha^{3i+3}) = -\alpha + \sum_{i\geq 1}^{\infty}(\alpha^{3i} + \alpha^{3i+1}) \\ &= 1 + \sum_{i\geq 1}^{\infty}(\alpha^{3i+1} + \alpha^{3i+2}). \end{aligned}$$

Donc, $-\alpha - \alpha^2 \in (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} - \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1)$. De même,

$$\frac{\alpha^3}{1 - \alpha^3} = \sum_{i\geq 1}^{\infty} \alpha^{3i} = 1 + \alpha + \sum_{i\geq 1}^{\infty} \alpha^{3i+2} = 1 + \sum_{i\geq 1}^{\infty} \alpha^{3i+1};$$

d'où $\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}$ est un élément de $(\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha) \cap (\mathcal{E} + 1)$.
Par ailleurs, l'ensemble $\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$ est contenu dans $\mathcal{E}$, d'où $-\alpha - \alpha^2$ et $\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}$ sont les deux extrémités de l'arc $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1)$. D'autre part, $-\alpha - \alpha^2$ et $\frac{\alpha^3}{1-\alpha^3}$ appartiennent à $(\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} + 1)$ qui est simplement connexe et inclus dans $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1)$. Il en résulte que

$$\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) = (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} + 1).$$

Les deux autres relations se montrent de façon similaire. □

Preuve de la proposition 2. Nous avons $k > 0$, donc

$$\alpha^k(\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \sum_{i=-k}^{2} \varepsilon_i\alpha^i)) \subset \alpha\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \varepsilon_{-k+2}\alpha^2 + \varepsilon_{-k+1}\alpha + 1).$$

En vertu du lemme 1, nous avons $\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) = (\mathcal{E} + 1) \cap (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E})$, ce qui implique

$$\alpha\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1) = \alpha\mathcal{E} \cap (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} + 1).$$

Or, nous pouvons montrer que $\alpha\mathcal{E} \cap (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E})$ est un arc de $\mathcal{E}$, d'extrémités $-\alpha^4$ et $w = \frac{\alpha^6}{1-\alpha^3}$ telles que $\alpha\mathcal{E} \cap (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) - \{-\alpha^4\} \subset \mathrm{int}(\mathcal{E})$.
Puisque $-\alpha^4 \notin (\mathcal{E} + 1)$, nous avons

$$\alpha\mathcal{E} \cap (\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} + 1) \subset \mathrm{int}(\mathcal{E}) \cap (\mathcal{E} + 1) = \emptyset.$$

D'où, $\alpha\mathcal{E} \cap (\mathcal{E}+1) = \emptyset$. De la même façon, nous montrons que $\alpha\mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + 1 + \alpha) = \emptyset$ et $\alpha\mathcal{E} \cap (\mathcal{E}+1+\alpha^2) = \emptyset$. $\square$

Dans tout ce qui suit, nous notons l'ensemble $\alpha\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}_0$, l'ensemble $\alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}_1$ et $\alpha^3+\alpha^4+\alpha^3\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}_2$.

figure 3 : Le fractal de Rauzy

3.2. **Lien avec les développements impropres en base α.** Comme le module de α est inférieur à 1 et 0 est contenu dans l'intérieur de $\mathcal{E}$, pour tout nombre complexe z, il existe un entier k tel que $\alpha^k z \in \mathcal{E}$. Par conséquent tout nombre complexe z s'écrit en base α comme $z = \sum_{i=l}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i$, où $l \in \mathbb{Z}$ et $(\varepsilon_i)_{i \geq l} \in \mathcal{N}$. La suite $(\varepsilon_i)_{i \geq l}$ sera appelée un α-développement de z. En vertu du lemme 1, un point de la frontière de $\mathcal{E}$ a au moins deux α-développements. Par ailleurs, un nombre complexe z ayant au moins deux α-développements distincts peut s'écrire comme $z = \sum_{i=k}^{L} a_i \alpha^i + \alpha^N x$ où $(a_i) \in \mathcal{N}_f$ est le début commun des deux α-développements de z et N entier relatif choisi de telle manière que $x \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + v)$ où $v \in \{1, \alpha, \alpha^2, 1+\alpha, 1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$. D'où $x \in \mathrm{Fr}(\mathcal{E})$. Par conséquent, le problème de la frontière de $\mathcal{E}$ est équivalent au problème des nombres complexes ayant plusieurs α-développements.

Théorème 1. *Soient $x = \sum_{i=-L}^{\infty} a_i \alpha^i$ et $y = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i \alpha^i$ où les suites $(a_i)_{i \geq -L}$ et $(b_i)_{i \geq -L}$ appartiennent à $\mathcal{N}$, alors $x = y$ si et seulement si pour tout $k \geq -L$, nous avons*

$$x(k) - y(k) \in S = \{0,\ \pm 1,\ \pm\alpha,\ \pm(1+\alpha),\ \pm(1+\alpha^2),\ \pm(\alpha+\alpha^2),\ \pm\alpha^2\},$$

où $x(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=-L}^{k} a_i \alpha^i$ et $y(k) = \alpha^{-k+2} \sum_{i=-L}^{k} b_i \alpha^i$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, nous allons donner quelques propriétés du α-développement.

Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $T_0 = T_1 = 0$, $T_2 = 1$, $T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n$, $\forall n \geq 0$.

Lemme 2. *Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\alpha^n = T_n \alpha^2 + (T_{n-1} + T_{n-2})\alpha + T_{n-1}$.*

Preuve. La preuve, par récurrence sur n, est laissée au lecteur. □

Le lemme suivant est une compilation de quatre résultats connus (voir [7], [8], [22]).

Lemme 3. *Nous avons les résultats suivants :*

1. *Soient $(a_i)_{3 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{3 \leq i \leq n}$ deux éléments de $\mathcal{N}_f$. Si (a_i) est supérieure lexicographiquement à (b_i), alors $\sum_{i=3}^{n} a_i T_i > \sum_{i=3}^{n} b_i T_i$.*
2. *Soient $(a_i)_{-L \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{-L' \leq i \leq m}$ deux éléments de $\mathcal{N}_f$ tels que $a_{-L} = b_{-L'} = 1$. Si $\sum_{i=-L}^{n} a_i \alpha^i = \sum_{i=-L'}^{m} b_i \alpha^i$, alors $L = L'$ et $a_i = b_i, \forall i \geq -L$.*
3. *Si x est un élément de $\mathbb{Z}^+[\alpha]$, alors il existe L et n entiers tels que $x = \sum_{i=-L}^{n} a_i \alpha^i$, où $(a_i)_{-L \leq i \leq n} \in \mathcal{N}_f$.*
4. *Soient x et y deux éléments de $\mathbb{Z}[\alpha]$ tels que $x = \sum_{i=-L}^{n} a_i \alpha^i$ et $y = \sum_{i=-L}^{m} b_i \alpha^i$ où (a_i) et (b_i) éléments de $\mathcal{N}_f$ et $a_n = a_m = 1$, alors il*

existe deux entiers L' et r, $r \geq max(m,n)$ tels que $x+y = \sum_{i=-L'}^{r} c_i\alpha^i$ où $(c_i) \in \mathcal{N}_f$.

Preuve du théorème 1. Nous avons $\alpha^{k-2}(x(k)-y(k)) = \sum_{i=-L}^{k} a_i\alpha^i - \sum_{i=-L}^{k} b_i\alpha^i$. Puisque le module de α est inférieur à 1, si $x(k) - y(k) \in S$, alors $\lim_{k\to\infty} \alpha^{k-2}(x(k) - y(k)) = 0 = x - y$.

Prouvons l'implication directe. Soient $x = \sum_{i=-L}^{\infty} a_i\alpha^i$ et $y = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i\alpha^i$. Supposons que $x = y$ donc $\alpha^{-k+2}x = \alpha^{-k+2}y$, nous en déduisons que

$$x(k) - y(k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (b_i - a_i)\alpha^{i-k+2} = \sum_{i=3}^{\infty}(b_{i+k-2} - a_{i+k-2})\alpha^i.$$

D'autre part $x(k) - y(k) = \sum_{i=-L}^{k}(a_i - b_i)\alpha^{i-k+2} = \alpha^{-L-k-1}\sum_{i=3}^{L+k+3} c_i\alpha^i$ où $c_i = a_{i-L-3} - b_{i-L-3}$. En outre, le lemme 2 implique que $x(k) - y(k) = \alpha^{-L-k-1}(n\alpha^2 + (p+q)\alpha + p)$ où

$$n = \sum_{i=3}^{L+k+3} c_iT_i,\ p = \sum_{i=3}^{L+k+3} c_iT_{i-1},\ q = \sum_{i=3}^{L+k+3} c_iT_{i-2}.$$

Supposons que $c_{L+k+3} = 1$, donc $a_k = 1$ et $b_k = 0$. La suite $(a_i)_{-L\leq i\leq k}$ est supérieure lexicographiquement à la suite $(b_i)_{-L\leq i\leq k}$. Par conséquent d'après le lemme 3, nous avons n, p et q sont positifs, d'où $x(k) - y(k) \in \mathbb{Z}^+[\alpha]$. De même, $x(k) - y(k) \in \mathbb{Z}^-[\alpha]$ si $c_{L+k+3} = -1$. Il découle du lemme 3 que

$$x(k) - y(k) = \pm \sum_{i=-s}^{m} \varepsilon_i\alpha^i \text{ où } (\varepsilon_i)_{-s\leq i\leq m} \in \mathcal{N}_f.$$

Supposons que $x(k) = y(k) + \sum_{i=-s}^{m} \varepsilon_i\alpha^i$. D'après le lemme 3,

$$x(k) = \sum_{i=-s'}^{m'} \varepsilon_i'\alpha^i \text{ où } (\varepsilon_i') \in \mathcal{N}_f \text{ et } m' \geq m.$$

Comme $x(k) = \alpha^{-k+2}\sum_{i=-L}^{k} a_i\alpha^i$, le lemme 3 implique que $m' = 2$, d'où $m \leq 2$.
Par conséquent

$$\sum_{i=3}^{\infty}(b_{i+k-2} - a_{i+k-2})\alpha^i = \pm \sum_{i=-s}^{m} \varepsilon_i\alpha^i, -s \leq m \leq 2.$$

Supposons que $\sum_{i=3}^{\infty} a_{i+k-2}\alpha^i = \sum_{i=3}^{\infty} b_{i+k-2}\alpha^i + \sum_{i=-s}^{m} \varepsilon_i\alpha^i$, alors

$$\sum_{i=3}^{\infty} a_{i+k-2}\alpha^i \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E} + \sum_{i=-s}^{m} \varepsilon_i\alpha^i) \text{ où } -s \leq m \leq 2.$$

En vertu de la proposition 2, $-s \geq 0$. Ce qui achève la preuve. □

3.2.1. *Construction algorithmique des nombres complexes doubles.*

Définition 1. *Un nombre complexe est dit double s'il a au moins deux α-développements distincts. L'ensemble des nombres complexes doubles est noté $\mathcal{D}$.*

Soient $x = \sum_{i=-L}^{\infty} a_i\alpha^i$ et $y = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i\alpha^i$. Supposons que $x = y$ et posons pour tout $k \geq -L$, $A_k = x(k) - y(k)$. Donc

$$A_{k+1} = \frac{A_k}{\alpha} + (a_{k+1} - b_{k+1})\alpha^2 \qquad (1)$$

Soit s le plus petit entier tel que $a_s \neq b_s$. D'où $A_i = 0$ pour tout i dans $\{-L, \cdots, s-1\}$ supposons que $(a_s,\ b_s) = (1,\ 0)$, alors $A_s = \alpha^2$. Compte tenu de (1), nous avons

$$A_{s+1} = \alpha + (a_{s+1} - b_{s+1})\alpha^2 = \begin{cases} \alpha + \alpha^2 & \text{si } (a_{s+1}, b_{s+1}) = (1,0), \\ \alpha & \text{si } (a_{s+1}, b_{s+1}) = (0,0) \text{ ou } (1,1). \end{cases}$$

Nous construisons un automate $\mathcal{B}$ dont les états sont les éléments de S. Soient V et W deux éléments de S. Nous mettons une flèche étiquetée par $(x, y) \in \{0,1\}^2$ et allant de V à W si et seulement si $W = \frac{V}{\alpha} + (x-y)\alpha^2$. Nous prenons 0 pour état initial de l'automate $\mathcal{B}$. C'est l'état où les deux α-développements ne sont pas encore distincts.
L'état initial est donc lié à l'état α^2 par une flèche d'étiquette $(1,0)$. L'état α^2 est lié à l'état $\alpha + \alpha^2$ par une flèche d'étiquette $(1,0)$ et à l'état α par deux flèches, une d'étiquette $(0,0)$ et l'autre d'étiquette $(1,1)$. Comme l'ensemble des états S est fini, nous obtenons un automate fini (fig 4) (pour tous les états, voir [22]).

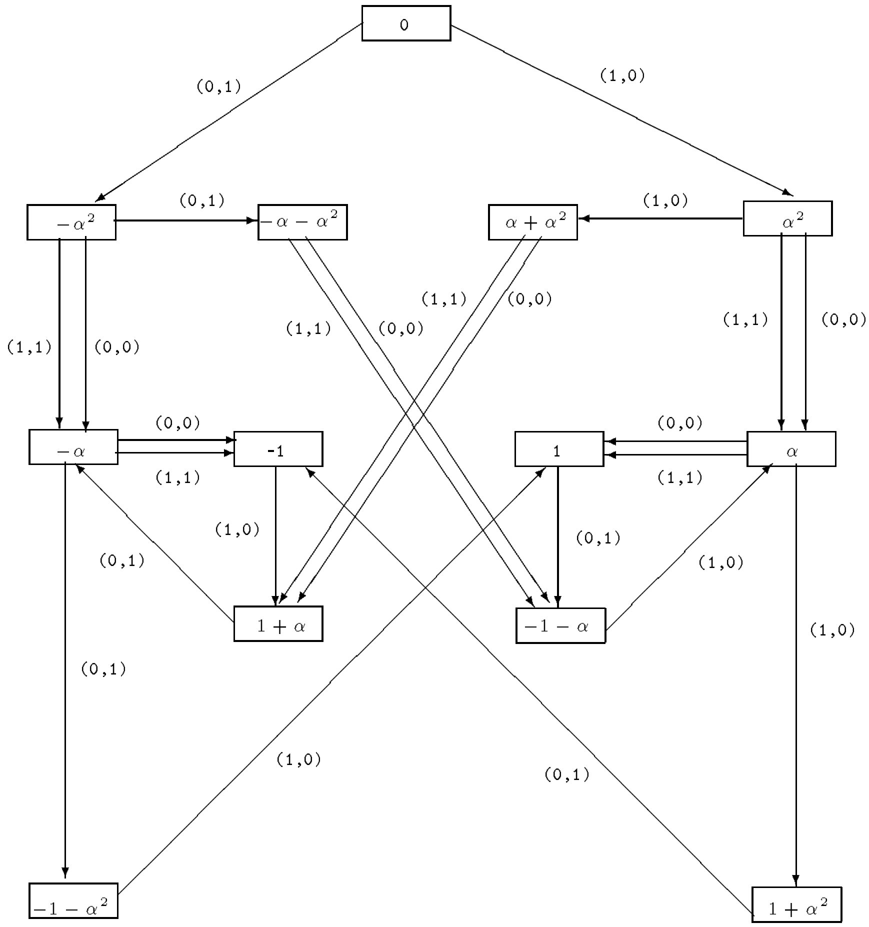

figure 4

Une conséquence immédiate du théorème 1 est le théorème suivant.

Théorème 2. *Soient* $(a_i)_{i\geq -L}$ *et* $(b_i)_{i\geq -L}$ *deux éléments distincts de* $\mathcal{N}$*, alors* $\sum_{i=-L}^{\infty} a_i\alpha^i = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i\alpha^i$ *si et seulement si la suite* $((a_i,b_i))_{i\geq -L}$ *est reconnaissable par l'automate* $\mathcal{B}$*.*

Il existe des suites $((a_i,b_i))_i$ reconnaissables par l'automate $\mathcal{B}$ telles que $(a_i)_i$ ou $(b_i)_i$ n'appartient pas à $\mathcal{N}$ ($(a_i)_i$ ou $(b_i)_i$ contient trois "1" consécutifs). En enlevant ces suites, on obtient l'automate des nombres complexes doubles (figure 5).

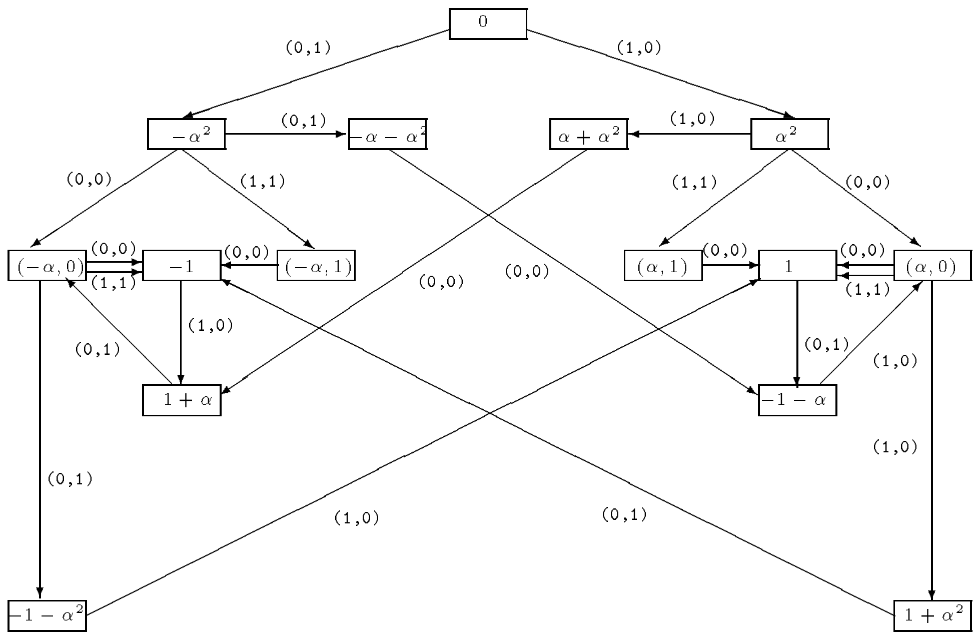

figure 5

3.2.2. *Nombres complexes triples.*

Définition 2. *Un nombre complexe est dit triple si et seulement s'il a trois α-développements différents.*

Soient $x = \sum_{i=-L}^{\infty} a_i\alpha^i$, $y = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i\alpha^i$ et $z = \sum_{i=-L}^{\infty} c_i\alpha^i$. Supposons que $x = y = z$, puis, posons pour tout entier k supérieur ou égal à $-L$,

$$A_k = x(k) - y(k), B_k = y(k) - z(k), C_k = z(k) - x(k)$$

et

$$S_k = (A_k,\ B_k,\ C_k).$$

En vertu du théorème 1, pour tout $k \geq -L,\ S_k \in S^3$.
Nous définissons un automate $\mathcal{C}$ dont les états sont les S_k. Deux états S_k et S_{k+1} sont liés par des flèches étiquetées par $(a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1})$. Nous prenons pour état initial du graphe l'état $(0,0,0)$. En étudiant tous les cas (voir [22]), nous obtenons un automate $\mathcal{C}$ (voir figure 6) et nous avons le théorème suivant :

Théorème 3. *Soient* $(a_i)_{i\geq -L}, (b_i)_{i\geq -L}$ *et* $(c_i)_{i\geq -L}$ *trois éléments distincts de* $\mathcal{N}$; *alors*

$$\sum_{i=-L}^{\infty} a_i\alpha^i = \sum_{i=-L}^{\infty} b_i\alpha^i = \sum_{i=-L}^{\infty} c_i\alpha^i$$

si et seulement si la suite $((a_i, b_i, c_i))_{i\geq -L}$ *est reconnaissable par l'automate* $\mathcal{C}$ *(quitte à permuter les suites* $(a_i), (b_i)$ *et* (c_i)*).*

Remarque. L'automate $\mathcal{C}$ est constitué d'une partie centrale qui coïncide avec l'automate $\mathcal{B}$ (automate des nombres complexes doubles) et de deux cycles. Par conséquent, si $x = \sum_{i=-L}^{\infty} a_i\alpha^i$ est triple alors la suite $(a_i)_{i\geq -L}$ est ultimement périodique de période 001 ou 110. Nous en déduisons que l'ensemble des nombres complexes triples est dénombrable et dense dans $\mathbb{C}$, et qu'un nombre complexe ne peut pas avoir plus de trois α-développements.

Corollaire 1. *L'ensemble* $\mathcal{D}$ *des nombres complexes doubles est mesurable de mesure nulle.*

Preuve. Il suffit de montrer que l'ensemble $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ est de mesure nulle. D'après l'automate $\mathcal{B}$, si z appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ alors il existe deux entiers n et N, et un nombre complexe z' appartenant à $\mathrm{Fr}(\mathcal{E})$ tels que , $z = \alpha^n z' + \sum_{i=3}^{N} a_i\alpha^i$ où $(a_i)_{3\leq i\leq N} \in \mathcal{N}_f$. Par conséquent,

$$\mathcal{D} \cap \mathcal{E} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\alpha^n \mathrm{Fr}(\mathcal{E})) + \mathbb{Z}[\alpha].$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Fr}(\mathcal{E})$ est de mesure nulle.
D'après le lemme 1, $\mathrm{Fr}(\mathcal{E})$ est l'union de trois ensembles $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ où

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{E} \cap ((\mathcal{E}+1) \cup (\mathcal{E}+1+\alpha) \cup (1+\alpha^2+\alpha^4+\alpha^3\mathcal{E})),$$
$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{E} \cap ((\mathcal{E}+\alpha) \cup (\alpha+\alpha^2+\alpha^2\mathcal{E}))$$

et

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{E} \cap ((\alpha^2+\alpha^2\mathcal{E}) \cup (\alpha^2+\alpha^4+\alpha^3\mathcal{E}) \cup (\alpha^2+\alpha^3+\alpha^3\mathcal{E})).$$

Par conséquent

$$\alpha^3\mathcal{A}_0 \cup \alpha^2\mathcal{A}_1 \cup \alpha\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{I} \text{ où } \mathcal{I} = (\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_1) \cup (\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_2) \cup (\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2).$$

Or $\lambda(\mathcal{E}_i) = |\alpha^{2(i+1)}|\lambda(\mathcal{E})$ et $|\alpha^2| + |\alpha^4| + |\alpha^6| = 1$, donc

$$\lambda(\mathcal{E}_0) + \lambda(\mathcal{E}_1) + \lambda(\mathcal{E}_2) = \lambda(\mathcal{E}) = \lambda(\mathcal{E}_0 \cup \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2),$$

il s'en suit que $\lambda(\mathcal{E}_i \cap \mathcal{E}_j) = 0$ pour $i \neq j$, d'où $\lambda(I) = 0$, ce qui implique que pour tout i dans $\{0,1,2\}$, $\lambda(\mathcal{A}_i) = 0$, ou encore $\lambda(\mathrm{Fr}(\mathcal{E})) = 0$. D'où le résultat. $\square$

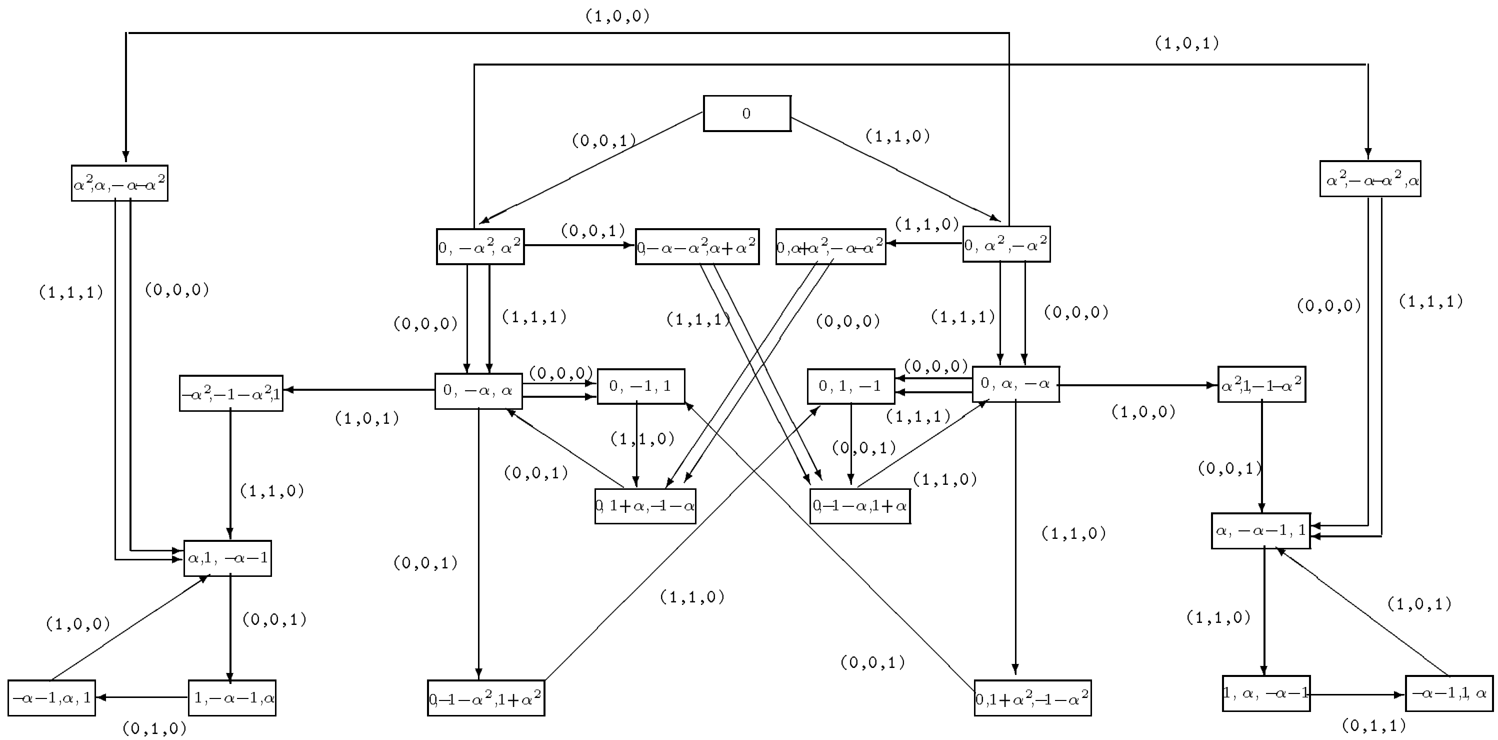
(1,0,0)
(1,0,1)
0
(0,0,1)
(1,1,0)
$\alpha^2,\alpha,-\alpha-\alpha^2$
$\alpha^2,-\alpha-\alpha^2,\alpha$
(0,0,1)
(1,1,0)
$0,-\alpha^2,\alpha^2$
$0,-\alpha-\alpha^2,\alpha+\alpha^2$
$0,\alpha+\alpha^2,-\alpha-\alpha^2$
$0,\alpha^2,-\alpha^2$
(1,1,1)
(0,0,0)
(0,0,0)
(1,1,1)
(1,1,1)
(0,0,0)
(1,1,1)
(0,0,0)
(0,0,0)
(1,1,1)
$-\alpha^2,-1-\alpha^2,1$
$0,-\alpha,\alpha$
(0,0,0)
$0,-1,1$
$0,1,-1$
(0,0,0)
$0,\alpha,-\alpha$
$\alpha^2,1,-1-\alpha^2$
(1,0,1)
(1,1,1)
(1,0,0)
(1,1,0)
(0,0,1)
(0,0,1)
(1,1,0)
(0,0,1)
$0,1+\alpha,-1-\alpha$
$0,-1-\alpha,1+\alpha$
(1,1,0)
(1,1,0)
$\alpha,1,-\alpha-1$
$\alpha,-\alpha-1,1$
(0,0,1)
(1,1,0)
(1,0,0)
(0,0,1)
(1,1,0)
(1,0,1)
(0,0,1)
$-\alpha-1,\alpha,1$
$1,-\alpha-1,\alpha$
$0,-1-\alpha^2,1+\alpha^2$
$0,1+\alpha^2,-1-\alpha^2$
$1,\alpha,-\alpha-1$
$-\alpha-1,1,\alpha$
(0,1,0)
(0,1,1)

figure 6

L'idée de la caractérisation des nombres complexes doubles et triples m'a été suggérée par la lecture de [12] où W.J. Gilbert a étudié le fractal du dragon, c'est-à-dire l'ensemble $\{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n/(-1+i)^n \mid \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \{0,1\}\}$ (voir aussi [13], [14]).
Une étude plus détaillée de la frontière du fractal de Rauzy (entre autre le calcul de sa dimension de Hausdorff) se trouve dans [23].

4. Système dynamique

4.1. **Système dynamique symbolique.** Nous notons A l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2\}$. Soit $\sigma : A \to A^*$ l'application (substitution) définie par:

$$\sigma(0) = 01,\ \sigma(1) = 02,\ \sigma(2) = 0.$$

Nous étendons σ en une application de $A^{\mathbb{N}}$ dans $A^{\mathbb{N}}$ par concaténation, c'est-à-dire, pour tout $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$, $\sigma(a_0 a_1 \cdots a_n \cdots) = \sigma(a_0)\sigma(a_1)\cdots\sigma(a_n)\cdots$
Nous pouvons montrer que σ est contractante pour la métrique naturelle sur $A^{\mathbb{N}}$. Elle a donc un seul point fixe que l'on notera $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Nous notons Ω l'adhérence de l'orbite de u par le décalage $T : A^{\mathbb{N}} \to A^{\mathbb{N}}$ qui à (x_n) associe (y_n) définie par $y_n = x_{n+1}$. Le triplet $(\Omega,\ \sigma,\ T)$ est appelé système dynamique symbolique associé à la substitution σ (voir [27]).
Soit $v \in L_n(u)$, nous appelons cylindre l'ensemble $[v] = \{(a_n)_n \in \Omega, v = a_0 \cdots a_{n-1}\}$.

D'autre part, en utilisant l'algorithme glouton, nous montrons que tout entier naturel n, s'écrit d'une façon unique comme $n = \sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i T_i$ où $(\varepsilon_i)_{3\le i\le N} \in \mathcal{N}_f$ (voir par exemple [7] et [10]). Nous construisons une application f de Ω dans $\mathcal{E}$ de la façon suivante :
Si x est un élément de l'orbite de u, $x = T^n u$, nous lui associons le nombre complexe $\sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i \alpha^i$ où $n = \sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i T_i$, puis nous étendons f à Ω de la manière suivante : Si x est un élément de Ω, il existe une suite d'entiers n_i telle que $T^{n_i} u$ converge vers x quand i tend vers l'infini, et par un raisonnement utilisant la reconnaissabilité de la substitution σ (voir [24]), nous pouvons montrer que $f(T^{n_i} u)$ converge dans $\mathcal{E}$ vers un complexe que l'on prend comme image de x, le même raisonnement montre que f est continue.

Le lemme suivant [28] donne le lien entre la suite (T_n) et la substitution σ. Pour un cadre plus général, on reffère à [4] et [5].

Lemme 4. *Soit n un entier naturel tel que $n = \sum_{i=1}^{k} T_{n_i+3}$ où $(n_i)_{1\le i\le k}$ une suite d'entiers naturels strictement croissante ne contenant pas trois nombres consécutifs , alors*

$$u = \sigma^{n_k}(0)\sigma^{n_{k-1}}(0)\cdots\sigma^{n_1}(0)T^n u.$$

En particulier $\begin{cases} u_n = 0 & \Longleftrightarrow n_1 \neq 0, \\ u_n = 1 & \Longleftrightarrow n_1 = 0 \textit{ et } n_2 > 1, \\ u_n = 2 & \Longleftrightarrow n_1 = 0 \textit{ et } n_2 = 1. \end{cases}$

Proposition 3. *Pour tout x élément de Ω, nous avons $f(\sigma(x)) = \alpha f(x)$ et*

$$f(Tx) = \begin{cases} f(x) + \alpha^3 & \textit{si } x \in [0], \\ f(x) + \alpha + \alpha^2 & \textit{si } x \in [1], \\ f(x) + \alpha^2 & \textit{si } x \in [2]. \end{cases}$$

Preuve. Puisque f est continue et l'orbite de u est dense dans Ω, il suffit de montrer le résultat pour un point de l'orbite de u.

D'après le lemme 4, $u = \sigma^{n_k}(0) \cdots \sigma^{n_1}(0) T^n u$ où $n = \sum_{i=1}^k T_{n_i+3}$, donc

$$\sigma(u) = u = \sigma^{n_k+1}(0)\sigma^{n_{k-1}+1}(0) \cdots \sigma^{n_1+1}(0)\sigma(T^n u);$$

d'où $f(\sigma(T^n u)) = \alpha f(T^n u)$. D'autre part : $f(T^n u) = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i \alpha^i = n\alpha^2 + (p_n + q_n)\alpha + p_n$ où $n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_i$, $p_n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_{i-1}$ et $q_n = \sum_{i=3}^N \varepsilon_i T_{i-2}$. De même $f(T^{n+1}u) = (n+1)\alpha^2 + (p_{n+1} + q_{n+1})\alpha + p_{n+1}$, nous devons donc étudier les cas suivants :

1. Si $T^n u \in [0]$, alors, d'après le lemme 4, $n = \sum_{i=4}^N \varepsilon_i T_i$. Donc $n + 1 = T_3 + \sum_{i=4}^N \varepsilon_i T_i$.
   - Si $\varepsilon_4 \varepsilon_5 = 0$ alors $p_{n+1} = p_n + 1$ et $q_{n+1} = q_n$.
   - Si $\varepsilon_4 \varepsilon_5 = 1$, alors il existe un entier $k \geq 2$ tel que $n = \sum_{i=2}^k (T_{3i-2} + T_{3i-1}) + \sum_{i=3k+1}^N \varepsilon_i T_i$ où $\varepsilon_{3k+1}\varepsilon_{3k+2} = 0$. Donc $n + 1 = T_{3k} + \sum_{i=3k+1}^N \varepsilon_i T_i$, d'où $p_{n+1} = p_n + 1$ et $q_{n+1} = q_n$.

   D' où $f(T^{n+1}u) = f(T^n u) + \alpha^3$.
2. Si $T^n u \in [1]$, alors $p_{n+1} = p_n$ et $q_{n+1} = q_n + 1$, d'où $f(T^{n+1}u) = f(T^n u) + \alpha + \alpha^2$.
3. Si $T^n u \in [2]$, alors $p_{n+1} = p_n$ et $q_{n+1} = q_n$. Par conséquent $f(T^{n+1}u) = f(T^n u) + \alpha^2$.

Ce qui achève la preuve. $\square$

Échange de morceaux. Soit R_α l'échange de trois morceaux sur $\bigcup_{i=0,1,2} \mathrm{int}(\mathcal{E}_i)$ défini par $R_\alpha(z) = z + \alpha^2$ modulo $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha)$, c'est-à-dire

$$R_\alpha(z) = \begin{cases} z + \alpha^3 & \text{si } z \in \mathrm{int}(\mathcal{E}_0), \\ z + \alpha + \alpha^2 & \text{si } z \in \mathrm{int}(\mathcal{E}_1), \\ z + \alpha^2 & \text{si } z \in \mathrm{int}(\mathcal{E}_2). \end{cases}$$

Alors pour tout $x \in \Omega$, tel que $f(x) \in \bigcup_{i=0,1,2} \mathrm{int}(\mathcal{E}_i)$, nous avons :

$$f(Tx) = R_\alpha \circ f(x).$$

L'application f ne peut pas être injective, car sinon, f serait un isomorphisme topologique. Ce qui est impossible, car Ω est un compact totalement discontinu, par contre $\mathcal{E}$ est un compact connexe. On peut donc se demander quels sont les points où f n'est pas injective. Pour répondre à cette question, nous avons besoin du lemme 5.

Remarque (voir [1]): La suite $u = (u_n)$ vérifie la propriété suivante : pour tout entier n, tout mot $v \in L_n(u)$ est prolongeable d'une façon unique à droite sauf un seul mot qui est tri-prolongeable à droite.

Lemme 5. *Soit $v_1 \cdots v_n$ un élément de $L_n(u)$ tri-prolongeable à droite, alors il existe $w_1 \cdots w_s$ un élément de $L_s(u)$ tri-prolongeable à droite tel que*

$$[v_1 \cdots v_n i] = G_{v_1}([w_1 \cdots w_s x_i])$$

où $G_0 = \sigma$, $G_1 = T\sigma^2$, $G_2 = T\sigma T\sigma^2$, $i \in \{0,1,2\}$, et les x_i sont trois éléments distincts de A.

Ce lemme a été initialemment prouvé dans [29], mais pour plus de clarté, nous allons donner la démonstration.

Preuve. Nous avons trois cas à étudier :
Cas 1. $v_1 = 0$.
Puisque u est le point fixe de σ et $\sigma(a)$ commence par 0, pour tout $a \in \{0,1,2\}$, il existe $w_1 \cdots w_s$ un élément de $L_s(u)$ tri-prolongeable à droite tel que $0v_2 \cdots v_n 1 = \sigma(w_1 \cdots w_s 0), 0v_2 \cdots v_n 2 = \sigma(w_1 \cdots w_s 1)$ $0v_2 \cdots v_n 0 = \sigma(w_1 \cdots w_s 2)0$. Cela implique que $[0v_2 \cdots v_n 1] = \sigma([w_1 \cdots w_s 0])$, $[0v_2 \cdots v_n 2] = \sigma([w_1 \cdots w_s 1])$ et $[0v_2 \cdots v_n 0] = \sigma([w_1 \cdots w_s 2])$. □

Nous considérons les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par : $f_0 : z \mapsto \alpha z$, $f_1 : z \mapsto \alpha^3 + \alpha^2 z$ et $f_2 : z \mapsto \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z$. Nous avons $f_i(\mathcal{E}) = f([i])$ pour tout $i \in \{0,1,2\}$. Plus généralement, en utilisant la proposition 3 et le lemme 5, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 2. *Soit $v_1 \cdots v_n$ un élément de $L_n(u)$. Il existe $i_1, ..., i_r$ des éléments de $\{0,1,2\}$ où $r < n$, tels que $f([v_1 \cdots v_n]) = f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_r}(\mathcal{E})$. Si, de plus, $v_1 \cdots v_n$ est tri-prolongeable à droite, alors pour tout $j \in \{0,1,2\}, f([v_1 \cdots v_n j]) = f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_r} \circ f_{n_j}(\mathcal{E})$, où $n_j \in \{0,1,2\}$ et $n_j \neq n_i$ si $i \neq j$.*

Définition Soit z un nombre complexe. Nous dirons que z a un α-développement dans $\mathcal{E}$ s'il existe une suite $(a_i)_{i \geq 3} \in \mathcal{N}$ tel que $z = \sum_{i=3}^{\infty} a_i \alpha^i$.

Remarque. Un nombre complexe, ayant au moins deux α-développements distincts dans $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$. Un nombre complexe appartenant à $\mathcal{D} \cap \operatorname{int}(\mathcal{E})$ a au moins deux α-développements distincts dans $\mathcal{E}$. Par contre un élément de $\mathrm{Fr}(\mathcal{E})$ n'a pas nécessairement deux α-développements distincts dans $\mathcal{E}$. Exemple : $-\alpha^2$, car $-\alpha^2 \in \mathcal{E} \cap (\mathcal{E}+\alpha) \cap (\mathcal{E}+1+\alpha)$.

Proposition 4. *L'application f est injective sauf sur l'image réciproque des nombres complexes ayant au moins deux α-développements dans $\mathcal{E}$.*

Preuve. Soient V et W deux éléments distincts de Ω tels que $f(V) = f(W)$. Soit v le plus grand préfixe commun de V et W (v est éventuellement le mot vide). Nous avons donc

$$f(V) \in f([va]) \cap f([vb])$$

où $a, b \in \{0,1,2\}$ et $a \neq b$. En utilisant le corollaire précédent, nous déduisons que $f(V)$ a au moins deux α-développements distincts dans $\mathcal{E}$.
Par ailleurs, soit z un nombre complexe ayant au moins deux α-développements dans $\mathcal{E}$, alors il existe $i_1, ..., i_r, n_1$ et n_2 dans $\{0,1,2\}$, $n_1 \neq n_2$ tels que

$$z \in f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_r} \circ f_{n_1}(\mathcal{E}) \cap f_{i_1} \circ \cdots \circ f_{i_r} \circ f_{n_2}(\mathcal{E})$$

ou encore

$$z \in f(G_{i_1} \circ \cdots G_{i_r} \circ G_{n_1}(\Omega)) \cap f(G_{i_1} \circ \cdots G_{i_r} \circ G_{n_2}(\Omega)),$$

où les G_i sont les trois applications définies dans le lemme 5. Par conséquent, il existe V et W deux éléments distincts de Ω tels que $f(V) = f(W) = z$. □

Proposition 5. *L'image réciproque par f de l'ensemble des nombres complexes ayant au moins deux α-développements distincts dans $\mathcal{E}$ est de mesure nulle.*

Preuve. il suffit de montrer que $m(f^{-1}(\mathcal{D} \cap \mathcal{E})) = 0$, où m est la seule mesure invariante de Ω (mesure des fréquences des mots).
Nous allons montrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $m(f^{-1}(B)) = k \times \lambda(B)$ pour tout $B \subset \mathcal{E}$ mesurable, λ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.
Pour cela, il suffit de le prouver pour les cylindres. Puisque σ est primitive, d'après [27] (page 100), $\begin{pmatrix} m([0]) \\ m([1]) \\ m([2]) \end{pmatrix}$ est le vecteur propre normalisé associé à la valeur propre dominante de la matrice de la substitution σ, c'est-à-dire $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme la valeur propre dominante de M est $\frac{1}{\theta}$, nous déduisons que $m([i]) = \theta^{i+1}$, pour tout $i \in \{0,1,2\}$. En outre, $\theta = |\alpha^2|$ et pour tout $i \in \{0,1,2\}, f([i]) = \mathcal{E}_i$. Par conséquent $\lambda(f([i])) = k \times m([i])$ où $k = \lambda(\mathcal{E})$.
Prouvons par récurrence sur n que pour tout $v_1 \cdots v_n \in L_n(u)$,

$$\lambda(f([v_1 \cdots v_n])) = k \times m([v_1 \cdots v_n]).$$

Supposons la propriété vraie à l'ordre n.

Nous pouvons supposer que $[v_1 \cdots v_{n+1}] \neq [v_1 \cdots v_n]$. D'après le lemme 5, nous avons trois cas à étudier :

1- Si $[v_1 \cdots v_{n+1}] = \sigma([w_1 \cdots w_s])$ alors d'après [27] (proposition VI.9), nous avons

$$m([v_1 \cdots v_{n+1}]) = \theta \times m([w_1 \cdots w_s]),$$

d'où $m([v_1 \cdots v_{n+1}]) = \frac{|\alpha^2|}{k} \times \lambda(f([w_1 \cdots w_s])) = \frac{1}{k} \times \lambda(f([v_1 \cdots v_{n+1}]))$. De même, nous montrons le résultat dans les cas où $[v_1 \cdots v_{n+1}] = G_{v_1}([w_1 \cdots w_s])$, $G_{v_1} = T\sigma^2$ ou $T\sigma T\sigma^2$. $\square$

Notons par p la projection de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha \approx \mathbb{T}^2$ et R la rotation d'angle α^2 sur le tore $\mathbb{T}^2$.

Proposition 6. *L'application $p \circ f$ est une semi-conjugaison topologique entre le système dynamique symbolique (Ω, T) et le système dynamique $(\mathbb{T}^2, R)$.*

Remarque. Ce résultat a été prouvé par G. Rauzy (voir [28]). Ce qui est nouveau est que nous avons caractérisé les points où l'application $p \circ f$ n'est pas injective (nous pouvons facilement montrer que c'est l'image réciproque de $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$) , ce qui nous permet d'obtenir la proposition suivante.

Proposition 7. *L'application $p \circ f$ est un isomorphisme métrique entre le système dynamique mesurable (Ω, T, m) et le système dynamique $(\mathbb{T}^2, R, \lambda)$; et elle vérifie*

$$\mathrm{Card}(p \circ f)^{-1}(x) \leq 3$$

pour tout élément x de $\mathbb{T}^2$.

4.2. **Système adique.** Les systèmes adiques ont été introduits par A.M. Vershik (voir [34]) pour donner une représentation des $\mathbb{C}^*$-algèbres. Ils sont aussi liés aux représentations symboliques des systèmes dynamiques.

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis et ordonnés, $A_i = \{a_{i1}, \cdots a_{in_i}\}$ et soit $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices d'ordre $n_i \times n_{i+1}$ formées de 0 et 1, $M_i = (m^i_{jk}), 1 \leq j \leq n_i$ et $1 \leq k \leq n_{i+1}$. Nous notons par Σ l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ telles que $x_i = a_{ij}$ et $x_{i+1} = a_{i+1,k} \Longrightarrow m^i_{jk} = 1$. En munissant $\prod_{i \in \mathbb{N}} A_i$ de la topologie produit des topologies discrètes, Σ est un compact appelé "Markov compactum". Nous définissons un ordre partiel $\prec$ sur Σ de la manière suivante :

$$(x_n) \prec (y_n) \Longleftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}, x_{n_0} < y_{n_0} \text{ et } \forall n > n_0,\ x_n = y_n.$$

Nous appelons transformation adique la fonction S qui à (x_n) associe son successeur par $\prec$ s'il existe. Le couple (Σ, S) est appelé système adique.

Remarques. La fonction S est définie sur $\Sigma - \mathcal{M}$ où $\mathcal{M}$ est l'ensemble des éléments maximaux de Σ pour la relation $\prec$. Nous prolongons S à Σ, en posant $S(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{M}$.

Il existe un lien étroit avec la notion de G-adic Machine que l'on appelle aussi G-odométre (introduite dans [11] pour comprendre les propriétés dynamiques de G), où $G = (G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels.

Quand pour tout entier n, $A_n = A$ et $M_n = M$, le couple (Σ, S) est dit système adique stationnaire. Dans le cas où $M = (M_{ij})_{0\leq i,j\leq n-1}$ est primitive, il existe une unique mesure de probabilité $\mu_{P,N}$ invariante par la transformation adique ; $\mu_{P,N}$ est la mesure markovienne où $P = (P_i)_{0\leq i\leq n-1}$ est le vecteur propre normalisé associé à la valeur propre dominante γ de la matrice M et $N = (c_{ij})_{0\leq i,j\leq n-1}$ où $c_{ij} = \frac{M_{ij}\times P_j}{\gamma\times P_i}$ (voir [34], lemme 1.1). Cette mesure est équivalente à la mesure d'entropie maximale du système markovien (Σ, T).
Un lien avec les substitutions est donné par un théorème de A. N. Livshits (voir [21]) qui dit que tout système adique stationnaire est métriquement isomorphe à un système de substitution primitive.

L'un des premiers exemples connus est le système adique stationnaire associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il correspond au groupe additif $(\mathbb{Z}_2, +)$ des entiers 2-adiques. La transformation adique correspond à l'addition de 1 dans $\mathbb{Z}_2$ (odomètre).
Un autre exemple est le système adique stationnaire associé à la matrice carrée d'ordre n,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans [31], B. Solomyak a étudié le spectre de l'opérateur unitaire associé à la transformation adique associée à ce système adique. Il a montré que le spectre est un groupe purement discret, plus précisément de la forme $exp(2i\pi G)$ où G est le sous-groupe libre de $\mathbb{R}$ engendré par les $(\theta_k)^i$, $i \in \{0, \cdots k\}$ où $1/\theta_k$ est la racine réelle supérieure à 1 (nombre de Pisot réel) du polynôme $x^{k+1} - x^k - \cdots - x - 1$. Or d'après le théorème de J. Von Neumann (voir [15], page 46), deux automorphismes, avec le même spectre purement discret, sont métriquement isomorphes. Par conséquent, le système adique stationnaire qui provient de la matrice définie ci-dessus est métriquement isomorphe à la translation de vecteur $\begin{pmatrix} \theta_k \\ (\theta_k)^2 \\ \vdots \\ (\theta_k)^k \end{pmatrix}$ sur le tore $\mathbb{T}^k$. Néanmoins, la méthode spectrale ne donne pas explicitement l'isomorphisme.

Dans cette partie, nous nous proposons de donner une autre démonstration du résultat de B. Solomyak. Dans cette preuve, nous construirons explicitement l'isomorphisme, ce qui nous permettra de généraliser le résultat de Vershik, cité précédemment.

4.3. **Construction de l'isomorphisme métrique.** Nous allons donner la preuve dans le cas $k = 3$. Posons pour tout entier i, $A_i = A = \{0, 1, 2\}$ et $M_i = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le Markov compactum associé est l'ensemble Σ des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ éléments de $\{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}}$ tels que $x_k x_{k+1} \notin \{20, 11, 12, 22\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Nous munissons Σ de la mesure markovienne $\mu_{P,N}$ où $P = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \theta & \theta^2 & \theta^3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est la seule mesure sur Σ invariante par la transformation adique [34].

Topologie sur $\mathbb{N}$. Soit n un entier naturel, l'écriture de n en base (T_k) comme $n = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon_i T_{i+3}$, où $(\varepsilon_i) \in \mathcal{N}_f$, induit une injection naturelle notée i de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ par $i(n) = \varepsilon_0 \cdots \varepsilon_N 0^\infty$. Définissons la distance d sur $\mathbb{N}$ par : si $n = \sum_{i=0}^{N} \varepsilon_i T_{i+3}$, $m = \sum_{i=0}^{M} \varepsilon_i' T_{i+3}$ où (ε_i), $(\varepsilon_i') \in \mathcal{N}_f$ alors

$$d(n, m) = \begin{cases} e^{-\min\{k\in\mathbb{N} \mid \varepsilon_k \neq \varepsilon_k'\}} & \text{si } n \neq m, \\ 0 & \text{sinon }. \end{cases}$$

Soit $\overline{\mathbb{N}}$ le complété de $\mathbb{N}$ pour la topologie associée à la distance d.

$$\overline{\mathbb{N}} = \{\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_i T_{i+3} \mid (\varepsilon_i) \in \mathcal{N}\}.$$

Munissons $\overline{\mathbb{N}}$ de l'ordre partiel $\prec'$ défini par :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_i T_{i+3} \prec' \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_i' T_{i+3} \iff \exists k \in \mathbb{N}, \varepsilon_k < \varepsilon_k' \text{ et } \forall i > k,\ \varepsilon_i = \varepsilon_i'.$$

Nous considérons l'application s de $\overline{\mathbb{N}}$ qui à un élément de $\overline{\mathbb{N}}$ associe son successeur s'il existe, et l'entier 0 sinon.
Remarque. L'application s est une extension de l'application sur $\mathbb{N}$, qui à un entier n, associe l'entier $n+1$.

Soit g l'application de Σ dans $\overline{\mathbb{N}}$, qui à la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ associe $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}$ définie par $\varepsilon_n = 1$ si $x_n = 1$ ou 2 et $\varepsilon_n = 0$ si $x_n = 0$, alors, nous avons le lemme suivant.

Lemme 6. *L'application g de $(\Sigma, \prec)$ dans $(\overline{\mathbb{N}}, \prec')$ est bijective et conserve l'ordre.*

Preuve. Soient (x_n) et (y_n) deux éléments distincts de Σ tels que $g((x_n)) = g((y_n))$. Soit $k = \min\{n \in \mathbb{N}, x_n \neq y_n\}$. Nous pouvons supposer que $x_k = 1$ et $y_k = 2$. Donc d'après la définition de Σ, $x_{k+1} = 0$, d'où $y_{k+1} = 0$. Par conséquent $y_k y_{k+1} = 20$, ce qui est impossible. D'où g est injective.

Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}$ appartenant à $\overline{\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l' élément de $A^{\mathbb{N}}$ défini par :

$$\begin{cases} a_n = 0 & \text{si } \varepsilon_n = 0, \\ a_n = 1 & \text{si } \varepsilon_n = 1 \text{ et } \varepsilon_{n+1} = 0, \\ a_n = 2 & \text{si } \varepsilon_n = 1 \text{ et } \varepsilon_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Dans $(a_n)_n$, "2" est toujours suivi de "1" et "1" de "0" d'où $(a_n)_n \in \Sigma$ et $g((a_n)_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}$. Donc g est surjective.

L'application g conserve l'ordre car si $(x_n) \prec (y_n)$ alors il existe $k \in \mathbb{N}, x_k < y_k$ et pour tout $n > k$, $x_n = y_n$. Donc, si $x_k = 0$ alors $g(x_n) \prec' g(y_n)$, et si $x_k = 1$ et $y_k = 2$, alors $x_{k+1} = y_{k+1} = 0$, donc $y_k y_{k+1} = 20$, ce qui est impossible. □

Remarque: Le système $(\overline{\mathbb{N}}, \prec')$ a trois points maximaux de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}$ où (ε_n) appartient à l'ensemble $\{(110)^\infty, (101)^\infty, (011)^\infty\}$, nous en déduisons que $(\Sigma, \prec)$ a aussi trois points maximaux qui sont : $(210)^\infty, (102)^\infty, (021)^\infty$.

Nous considérons l'application h de $\overline{\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{E}$ telle que $h(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n \alpha^{n+3}$. D'après ce qui précéde, la restriction de h à $\overline{\mathbb{N}} - h^{-1}(\mathcal{D} \cap \mathcal{E})$ est injective ($\mathcal{D}$ étant l'ensemble des nombres complexes doubles de $\mathbb{C}$).
D'autre part, la relation

$$h \circ s(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}) = R_\alpha \circ h(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}) \qquad (1)$$

est vraie sauf si $h(\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n T_{n+3}) \in \bigcup_{i=0,1,2} \mathrm{Fr}(\mathcal{E}_i)$.

En effet, en vertu de la proposition 3, la relation est vraie si $(\varepsilon_n) \in i(\mathbb{N})$. Comme h et s sont des applications continues et R_α est continue sur $\mathcal{E} - \bigcup_{i=0,1,2} \mathrm{Fr}(\mathcal{E}_i)$, nous avons le résultat.

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 4. *Le système adique* $(\Sigma, S, \mu_{P,N})$ *est métriquement isomorphe au système dynamique* $(\mathbb{T}^2, R, \lambda)$.

Preuve. Soit p la projection de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{T}^2$. L'application $p \circ h \circ g$ de $\Sigma - (p \circ h \circ g)^{-1}(p(\mathcal{D} \cap \mathcal{E}))$ dans $\mathbb{T}^2 - p(\mathcal{D} \cap \mathcal{E})$ est bijective. En outre

$$\mu_{P,N}((p \circ h \circ g)^{-1}(p(\mathcal{D} \cap \mathcal{E}))) = 0$$

car $\mu_{P,N}$ est proportionnelle à la mesure préimage de la mesure de Lebesgue par l'application $p \circ h \circ g$.

En utilisant la relation (1) et le lemme 6, la relation $p \circ h \circ g(S(x_n)) = R(p \circ h \circ g(x_n))$ est vraie pour tout (x_n) élément de Σ (R étant la rotation d'angle α^2 sur le tore $\mathbb{T}^2$). $\square$

Espace quotient. Considérons la relation d'équivalence sur Σ définie par :

$$(x_n) \sim (y_n) \Longleftrightarrow p \circ h \circ g((x_n)) = p \circ h \circ g((y_n)).$$

La relation $\sim$ étant stable par l'application S, nous pouvons définir un système dynamique topologique $(\Sigma/\sim, \overline{S})$ par : $\overline{S}(\overline{(x_n)}) = \overline{S((x_n))}$ où $\overline{(x_n)}_n$ est la classe d'équivalence de $(x_n)_n$. Définissons l'application f' de $\Sigma/\sim$ dans $\mathbb{T}^2$ par :

$$f'(\overline{(x_n)}) = p \circ h \circ g((x_n)).$$

Puisque l'application f' est bijective, continue et $\Sigma/\sim$ est compact pour la topologie quotient, nous avons le théorème suivant.

Théorème 5. *Le système dynamique* $(\Sigma/\sim, \overline{S})$ *est topologiquement isomorphe au système dynamique* $(\mathbb{T}^2, R)$.

Généralisation. Une généralisation directe du fractal de Rauzy aux dimensions supérieures est le k-fractal de Rauzy, noté $\mathcal{E}_{(k)}$ où $k > 2$.

Nous avons $\mathcal{E}_{(k)} = \{\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon_i B_k^i Z_0^{(k)} \mid \forall i \in \mathbb{N}, \varepsilon_i \in \{0,1\}, \varepsilon_i \cdots \varepsilon_{i+k} = 0\}$, où $Z_0^k = \begin{pmatrix} \theta_k - 1 \\ \theta_k^2 \\ \vdots \\ \theta_k^k \end{pmatrix}$ et $B_k = (b_{ij})_{0 \le i,j \le k-1}$ la matrice carrée d'ordre k, définie par $b_{i+1,i} = 1 - \theta^{i+2}$ et $b_{ij} = -\theta^{i+1}$ si $j \neq i+1$.

L'ensemble $\mathcal{E}_{(k)}$ a la propriété d'être un compact connexe de $\mathbb{R}^k$, à interieur simplement connexe et à frontière fractale. Il induit un pavage périodique de $\mathbb{R}^k$ modulo $\mathbb{Z}^k$.

Nous pouvons montrer que le système dynamique symbolique $(\Omega(k), \sigma_k, T)$ associé à la substitution de la forme σ_k, $k > 2$, définie par : $\sigma_k(0) = 01$, $\sigma_k(1) = 02, \cdots, \sigma_k(k-1) = 0k$ et $\sigma_k(k) = 0$ est métriquement isomorphe (par une application ϕ) à la translation de vecteur $\begin{pmatrix} \theta_k \\ (\theta_k)^2 \\ \vdots \\ (\theta_k)^k \end{pmatrix}$ sur le tore $\mathbb{T}^k$. L'application ϕ est injective sur $\Omega(k) - \phi^{-1}(\mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est l'ensemble des points de $\mathcal{E}_{(k)}$ ayant des développements impropres en base $B_k Z_0^{(k)}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ est de mesure nulle, car les régions $\phi([i])$, $i \in \{0, \cdots k-1\}$, induisent un pavage auto-similaire de $\mathbb{R}^k$ (par construction) et dans ce cas, d'après une proposition de B. Praggastis (voir [26] , prop 1-6), nous avons $\lambda(\bigcup_{i=0,\cdots,k-1}(\mathrm{Fr}(\phi([i])))) = 0$ ou encore $\lambda(\phi([i]) \cap \phi([j])) = 0$ pour $i \neq j$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^k$.

D'autre part, soit M_k la matrice carrée d'ordre k définie par

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $(\Sigma_{(k)}, S_{(k)}, \mu_{P_k,N_k})$ le système adique stationnaire associé, alors il est métriquement isomorphe à la translation de vecteur $\begin{pmatrix} \theta_k \\ (\theta_k)^2 \\ \vdots \\ (\theta_k)^k \end{pmatrix}$ sur le tore $\mathbb{T}^k$.

L'isomorphisme métrique étant l'application qui à une suite $(a_n) \in \Sigma_{(k)}$ associe le point $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n B_n^i Z_0^{(k)}$ où $\varepsilon_n = 0$ si $a_n = 0$ et $\varepsilon_n = 1$ si $a_n \neq 0$.

5. Extension naturelle et partitions de Markov.

Dans cette section, nous allons donner un codage markovien pour l'automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^3$ associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{Z}$ l'ensemble des suites $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ telles que pour tout entier i on a $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{(\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_{-i}\alpha^{i+3}, \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i\beta^{-i+3}) \mid (\varepsilon_i) \in \mathcal{Z}\}.$$

En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}$ est considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, et nous avons la proposition suivante.

Proposition 8. *L'ensemble $\mathcal{C}$ est l'union des trois cylindres $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de base $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ et de hauteurs β^3, $\beta^2+\beta$ et β^2.*

Preuve. Soit $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{Z}$. Supposons que $\varepsilon_0 = 0$, alors $\varepsilon_1 \in \{0,1\}$, d'où la suite $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ est un élément arbitraire de l'ensemble $\mathcal{N}$ (défini ultérieurement). Or, nous avons

$$\{\sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i\beta^{-i+3} \mid (\varepsilon_i) \in \mathcal{N}\} = [0, \beta^3].$$

Nous obtenons dans ce cas, le cylindre $\mathcal{C}_0$ de base $\mathcal{E}_0 = \alpha\mathcal{E}$ et de hauteur β^3.
De même, suivant que $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_{-1} = 0$ ou $\varepsilon_0 = \varepsilon_{-1} = 1$, nous obtenons respectivement les deux cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. $\square$

Proposition 9. *L'ensemble $\mathcal{C}$ induit un pavage périodique de* $\mathbb{R}^3$ modulo *le réseau de base $e_0 = (-\alpha^3, \beta^3)$, $e_1 = (-\alpha-\alpha^2, \beta+\beta^2)$ et $e_2 = (-\alpha^2, \beta^2)$.*

Preuve. Posons $\alpha = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Le volume de la maille du réseau est $\det(e_0, e_1, e_2)$. En développant les calculs, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\det(e_0,e_1,e_2) &= \det((-\alpha^3,\beta^3),(-\alpha,\beta),(-\alpha^2,\beta^2)) \\
&= \det((-1,0,1),(-a,-b,\beta),(-\mathrm{reel}(\alpha^2),-\mathrm{Im}(\alpha^2),\beta^2)) \\
&= b\beta^2 - 2ab\beta + a^2b + b^3.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, le volume du cylindre $\mathcal{C}$ est $\beta^3 b|\alpha^2| + (\beta^2+\beta)b|\alpha^4| + \beta^2 b|\alpha^6|$. Comme $|\alpha^2| = 1/\beta$, le volume de $\mathcal{C}$ est $b\beta^2 + b + 2b/\beta$. Nous pouvons montrer assez facilement que le volume de $\mathcal{C}$ est égal au volume de la maille du réseau. Pour avoir la proposition, il suffit donc de montrer que $\mathrm{int}(\mathcal{C})$ est disjoint avec ses translatés par les vecteurs du réseau.
Or, cela est vrai car $\mathcal{E}_0$ est l'intersection de $\mathcal{E}$ par son translaté par $-\alpha^3$, de même $\mathcal{E}_1$ pour $-\alpha-\alpha^2$ et $\mathcal{E}_2$ pour $-\alpha^2$. $\square$

Application de la matrice M. Soit l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la base (e_0, e_1, e_2) et h' l'application linéaire définie par $h'(e_0) = e_0 + e_1$, $h'(e_1) = e_0 + e_2$ et $h'(e_2) = e_0$. La matrice associée à h' est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a donc,

$Me_0 = (-\alpha^4, \beta^4)$, $Me_1 = (-\alpha^3 - \alpha^2, \beta^2 + \beta^3)$ et $Me_2 = (-\alpha^3, \beta^3)$. Nous en déduisons que pour tout $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{Z}$, on a

$$M(\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_{-i}\alpha^{i+3}, \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i \beta^{-i+3}) = (\alpha \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_{-i}\alpha^{i+3}, \beta \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i \beta^{-i+3}).$$

Par conséquent, le cylindre $\mathcal{C}_0$ est remplacé par le cylindre de base $\alpha^2\mathcal{E}$ et de hauteur β^4, le cylindre $\mathcal{C}_1$, par le cylindre de base $\alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}$ et de hauteur $\beta^3 + \beta^2$ et le cylindre $\mathcal{C}_2$, par le cylindre de base $\alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^4\mathcal{E}$ et de hauteur β^3. Ce qui implique que la multiplication par la matrice M consiste à poser les cylindres $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, avec les identifications naturelles au-dessus du cylindre $\mathcal{C}_0$. Le nouvel ensemble obtenu, c'est-à-dire $M\mathcal{C}$ induit un pavage périodique de $\mathbb{R}^3$. L'application linéaire h' conserve le réseau de base (e_0, e_1, e_2), donc en passant au quotient, la matrice M induit un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbb{T}^3$. Nous pouvons montrer que les cylindres $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ constituent les partitions de Markov pour cet automorphisme.

Munissons, maintenant l'ensemble $\mathcal{Z} = \{(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mid \forall k \in \mathbb{Z}, (\varepsilon_i) \in \mathcal{N}\}$ du shift T défini par : $T(x_i) = (x_{i+1})$ pour tout (x_i) dans $\mathcal{Z}$ et de l'unique mesure d'entropie maximale, μ', alors nous avons le théorème suivant.

Théorème 6. *Le système dynamique $(\mathbb{T}^3, M, \lambda)$ (λ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^3$) est métriquement isomorphe au système dynamique symbolique $(\mathcal{Z}, T, \mu')$ par l'application*
$\eta : \mathcal{Z} \mapsto \mathbb{T}^3$, $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_{-i}\alpha^{i+3}, \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i\beta^{-i+3})$. *En plus η est continue.*

Preuve. Pour tout $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathcal{Z}$, nous avons

$$\begin{aligned} \eta(T(\varepsilon_i)) &= \eta((\varepsilon_{i+1})) = (\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_{-i+1}\alpha^{i+3}, \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_{i+1}\beta^{-i+3}) \\ &= -\varepsilon_1(-\alpha^3, \eta^3) + M(\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon_{-i}\alpha^{i+3}, \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon_i\beta^{-i+3}). \end{aligned}$$

Puisque $(-\alpha^3, \beta^3)$ est un vecteur du réseau, sur le tore $\mathbb{T}^3$, nous avons

$$\eta(T(\varepsilon_i)) = M \circ \eta((\varepsilon_i)).$$

Par ailleurs, η est surjective et continue par construction, et nous pouvons montrer que la mesure λ est l'image par η de la mesure d'entropie maximale μ'.

D'autre part, l'application η est injective sur l'image réciproque (par η) de l'ensemble $\mathbb{T}^3 - ((\mathcal{D} \cap \mathcal{E}) \times \mathrm{Fin}(\beta))$ ($\mathrm{Fin}(\beta)$ étant l'ensemble des réels ayant un β-développement fini). L'ensemble $\mathrm{Fin}(\beta)$ est dénombrable, et l'ensemble $\mathcal{D} \cap \mathcal{E}$ est de mesure nulle. Par conséquent η est injective sauf sur un ensemble de mesure nulle. □

Bibliographie

[1] P. Arnoux, G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité 2n +1*, Bull. Soc. math. France, **119**, 1991, p.101-117.

[2] A. Bertrand-Mathis, *Développement en base θ, répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langages codés et θ-shift*. Bulletin de la société mathématique de France 114(1986), 271-323.

[3] F. M. Dekking, *Recurrent Sets*, Advances in mathematics **44**. 78-104 (1982).

[4] J. M. Dumont, A. Thomas, *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theor. Comput. Sci. **65**. 153-169 (1989).

[5] J. M. Dumont, A. Thomas, *Digital sum problems and substitution on a finite alphabet*, Preprint de l'institut de mathématiques de Luminy.

[6] S. Eilenberg, *Automata, Languages, and Machines*, Academic Press, 1974.

[7] A. S. Fraenkel, *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly 92 (1985), 105-114.

[8] C. Frougny, B. Solomyak, *Finite Beta-expansions*, Ergod. Th. and Dynam.Systems 12 (1992), **4**, p. 713-723.

[9] *Groupe de travail de l'équipe "systèmes dynamiques discrets"*, Institut de mathématiques de Luminy, Marseille.

[10] P.J. Grabner, R. Tichy, *α-Expansions, Linear Recurrences, and the Som-of-Digits Function*, manuscripta math. **70**, 311-324, 1991.

[11] P.J. Grabner, P. Liardet, R. Tichy, *Odometers and systems of numeration*, Acta Arithmetica, LXX.2 (1995), 103-122.

[12] W. J. Gilbert, *Complex numbers with three radix expansions*, Can. J. Math. XXXIV (1982) 1335-48.

[13] W. J. Gilbert, *Fractal geometry derived from complex bases*, The math. Intelligencer, **4** (1982), 78-86.

[14] W. J. Gilbert, *Fractal dimension of sets derived from complex bases*, Can. Math. Bull XXX, **29** (1986) 495-500.

[15] P. R. Halmos, *lectures on ergodic theory*, The Mathematical Soc. of Japan, Tokyo 1956.

[16] B. Host, *Valeurs propres des systèmes dynamiques définis par des substitutions de longueur variable*, Ergod. Th. and Dynam.Sys. (1986), **6**, p. 529-540.

[17] R. Kenyon, A. M. Vershik, *Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms*. Prépublication de l'Umpa - ENS Lyon, (1996), numéro 0178.

[18] D. E. Knuth, *The art of computer Programming*, Vol 2. Seminumerical Algorithms, Addison- Wesley, Reading MA, 1981.

[19] S. Le borgne, *Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore*, Séminaire de probabilités de Rennes (1995). 35p, Pub. Inst Rech Math Rennes, 1995.

[20] N. Loraud, *β-shift, systèmes de numération et automates*, J. Theor. Nombres Bordeaux, **7**, 473-498, 1995.

[21] A. N. Livshits, *A sufficient condition for weak mixing of substitutions and stationary adic transformations*, Mat. Zametki 44 (1988), 785-793, translated in Math. Notes 44 (1988), 920-925.

[22] A. Messaoudi, *Autour du fractal de Rauzy*, Thèse d'Université, 96.

[23] A. Messaoudi, *Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe*, Preprint de l'institut de mathématiques de Luminy.

[24] B. Mossé, *Notions de reconnaissabilité pour les substitutions et complexité des suites automatiques,* Bull. Soc. math. France **124** (1996) 101-108.

[25] M. Morse, G.A. Hedlund, *Symbolic dynamics II: sturmian trajectories,* Amer. J. Math. 62 (1940), 1-42.

[26] B. Praggastis *Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms*, Ph.d. Thesis, Univ of Washington, 1992.

[27] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems- Spectral Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, Vol **1294**, Springer-Verlag, 1987, Berlin.

[28] G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions* , Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147-178.
[29] V. Sirvent, *Properties of geometrical realisations of substitutions associated to a family of pisot numbers*, Thèse, Mars 93.
[30] V. Sirvent, *On some dynamical subsets of the Rauzy fractal*, Theor. Computer. Sci., 180, 363-370, 1997.
[31] B. Solomyak, *On the Spectral Theory of Adic Transformations*, Advances in Soviet Mathematics Volume **9** (1992), 217-230.
[32] S. Ito, M. Kimura, *On the Rauzy Fractal*, Japan J. Indust. Appl. Math. **8** (1991), 461-486.
[33] A. M. Vershik, *Fibadic expansions of real numbers and adic transformation*, Prep. report. inst. Mittag Leffler,**4**, 1991-1992, p. 1-9.
[34] A. M. Vershik, A. N. Livshits, *Adic Models of Ergodic Transformations, Spectral Theory, Substitutions, and Related Topics*, Advances in Soviet Mathematics Volume **9** (1992).
[35] E. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. liège **41** (1972), 179-182.

Ali Messaoudi
Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS-UPR 9016
Case 907, 163, avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9, France
E-mail : `messaoud@iml.univ-mrs.fr`