Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **12** (2000), 127–132

Minorations pour les mesures de Mahler de certains polynômes particuliers

par Laurenţiu PANAITOPOL

Résumé. Dans cet article nous donnons des minorations de la mesure de Mahler des polynômes totalement positifs et totalement réels. Ces résultats sont supérieurs à ceux obtenus par A. Schinzel, M. J. Bertin et V. Flammang.

Abstract. In this note, we give lower bounds of the Mahler measure of totally positive and totally real polynomials. These bounds supersed previous results due to A. Schinzel, M. J. Bertin and V. Flammang.

1. Introduction

Soit $P = a_0x^d + \cdots + a_d = a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_d)$, $a_0a_d \neq 0$, $P \neq x$ un polynôme à coefficients complexes. La mesure de Mahler de P se définit par :

$$M(P) = |a_0| \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha_i|).$$

La mesure de Mahler d'un nombre algébrique α non nul est la mesure de Mahler de son polynôme minimal P dans $\mathbb{Z}[X]$.

Dans cet article nous ferons référence aux polynômes totalement positifs (i.e. dont toutes les racines sont réelles positives) et totalement réels (i.e. dont toutes les racines sont réelles).

Dans [2], V. Flammang démontre les résultats suivants :

Théorème 1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement positif, non divisible par x et $x-1$ et tel que $|P(1)| \geq 1$. Alors*

$$M(P)^{\frac{1}{d}} \geq \frac{1 + \sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}} + 1}}{2}.$$

Manuscrit reçu le 15 février 1999.

Théorème 2. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $d \geq 1$, unitaire, totalement réel, non divisible par $x, x-1, x+1$ et tel que $|P(\pm 1)| \geq 1$. Alors*

$$M(P)^{\frac{2}{d}} \geq \frac{1+\sqrt{4|P(0)|^{\frac{2}{d}}+1}}{2}.$$

V. Flammang montre que ces résultats obtenus sont meilleurs que ceux prouvés par A. Schinzel et M. J. Bertin dans [1]. Pour un entier algébrique α , V. Flammang prouve que

$$\frac{1+\sqrt{4|P(0)|^{\frac{1}{d}}+1}}{2} \geq |N(\alpha)|^{\frac{1}{2d}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{|N(\alpha)|^{\frac{1}{2d}}}} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Des inégalités similaires ont toujours lieu pour un entier algébrique α totalement réel ($\alpha \neq 0, 1, -1$). Dans ce quit suit, nous donnerons une démonstration plus simple pour les théorèmes de V. Flammang et nous obtiendrons d'autres résultats.

Toutes nos démonstrations s'appuient sur une inégalité qui sera appliquée pour différentes valeurs données aux variables.

Proposition. *Si $a_i, b_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ alors*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \tag{1}$$

Ce résultat s'obtient en appliquant l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique aux nombres $\frac{a_i}{a_i+b_i}, \frac{b_i}{a_i+b_i}, i = 1, 2, \ldots, n$.

L'égalité a lieu dans le cas $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$.

Pour simplifier l'écriture, on va noter :

$$|a_0| = a \neq 0,\ |a_d| = b \neq 0,\ |P(1)| = p,\ |P(-1)| = q,\ |P(i)| = r,\ M(P) = M.$$

Nous allons prouver :

Théorème 3. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \geq 1$, totalement positif, $b > 0, p > 0$ et soit k le nombre des racines de P supérieures à 1. Alors, pour tout $k, 1 \leq k \leq d-1$ on a l'inégalité :*

$$p \leq M\left(1-\left(\frac{a}{M}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^k \left(1-\left(\frac{b}{M}\right)^{\frac{1}{d-k}}\right)^{d-k}.$$

Nous déduisons tout de suite :

Conséquence. On a :

$$M^{\frac{1}{k}} > a^{\frac{1}{k}} + p^{\frac{1}{k}} \quad \text{et} \quad M^{\frac{1}{d-k}} > b^{\frac{1}{d-k}} + p^{\frac{1}{d-k}}$$

pour tout $1 \leq k \leq d-1$.

Théorème 4. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $d \geq 1$, totalement réel, $b, p, q > 0$ et k le nombre des racines ayant un module supérieur à 1. Alors pour tout $1 \leq k \leq d-1$ on a :*

$$pq \leq M^2 \left(1 - \left(\frac{a}{M}\right)^{\frac{2}{k}}\right)^k \left(1 - \left(\frac{b}{M^2}\right)^{\frac{2}{d-k}}\right)^{d-k}.$$

D'ici il vient :

Conséquence On a :

$$M^{\frac{2}{k}} \geq a^{\frac{2}{k}} + (pq)^{\frac{1}{k}} \quad \text{et} \quad M^{\frac{2}{d-k}} \geq \left(\frac{b}{M^2}\right)^{\frac{2}{d-k}} + (pq)^{\frac{1}{d-k}}.$$

Théorème 5. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $d \geq 1$ totalement positif et tel que $b, p > 0$. Alors*

$$M^{\frac{1}{d}} \geq \frac{p^{\frac{1}{d}} + q^{\frac{1}{d}}}{2}.$$

Théorème 6. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $d \geq 1$ totalement réel tel que $b, p, q, r > 0$. Alors*

$$M^{\frac{2}{d}} \geq \frac{(pq)^{\frac{1}{d}} + r^{\frac{2}{d}}}{2}.$$

2. Démonstrations des théorèmes 1, 2, 3 et 4

2.1 Soit P un polynôme totalement positif. On a :

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k > 1 > \alpha_{k+1} \geq \cdots > \alpha_d.$$

Il s'ensuit que

$$M = a\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k, \qquad p = a(\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_k - 1)(1 - \alpha_{k+1}) \cdots (1 - \alpha_d),$$

$$p = M\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right)(1 - \alpha_{k+1}) \cdots (1 - \alpha_d). \tag{2}$$

Nous appliquons l'inégalité (1) pour

$$a_i = 1 - \frac{1}{\alpha_i},\ i = 1, 2, \ldots, k; \qquad a_i = 1 - \alpha_i,\ i = k+1, k+2, \ldots, d$$

$$\text{et} \quad b_i = 1 - a_i,\ i = 1, 2, \ldots, d.$$

En tenant toujours compte de (2) nous obtenons

$$\left(\frac{p}{M}\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\frac{\alpha_{k+1} \ldots \alpha_d}{\alpha_1 \ldots \alpha_k}\right)^{\frac{1}{d}} \leq 1,$$

donc

$$\left(\frac{p}{M}\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\frac{ab}{M^2}\right)^{\frac{1}{d}} \leq 1$$

et

$$M^{\frac{1}{d}} \geq \frac{p^{\frac{1}{d}} + \sqrt{p^{\frac{2}{d}} + 4(ab)^{\frac{1}{d}}}}{2}, \tag{3}$$

ce qui justifie l'énoncé du théorème 1.

En appliquant encore une fois l'inégalité (1) pour les valeurs $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ nous obtenons

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right) \leq \left(1 - \left(\frac{a}{M}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^k$$

alors que pour les valeurs $a_{k+1}, \dots, a_d, b_{k+1}, \dots, b_d$ nous obtenons

$$\prod_{i=k+1}^{d} (1 - \alpha_i) \leq \left(1 - \left(\frac{b}{M}\right)^{\frac{1}{d-k}}\right)^{d-k}.$$

En tenant compte de (2) le théorème 3 se déduit immédiatement.

2.2 Soit P un polynôme totalement réel. On a :

$$|\alpha_1| \geq \dots |\alpha_k| > 1 \geq |\alpha_{k+1}| \geq \cdots > |\alpha_d|$$

Soit $Q = b_0 x^d + \ldots + b_d$ tel que $Q(x^2) = P(x)P(-x)$. Ce polynôme a les racines $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_d^2$, donc il est totalement positif. On déduit : $|b_0| = a^2$, $|a_d| = b^2$, $|Q(1)| = pq$, $M(Q) = M^2$, et la relation (3) devient :

$$M^{\frac{2}{d}} \geq \frac{(pq)^{\frac{1}{d}} + \sqrt{(pq)^{\frac{2}{d}} + 4(ab)^{\frac{2}{d}}}}{2} \tag{4}$$

ce qui justifie l'énoncé du théorème 2.

En appliquant le théorème 3 au polynôme Q on obtient la conclusion du théorème 4.

3. Démonstrations des théorèmes 5 et 6

3.1 On a $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_k > 1 > \alpha_{k+1} \geq \alpha_d$. Dans l'inégalité (1) nous mettons

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{1+\alpha_i}{\alpha_i}, \quad b_i = \tfrac{\alpha_i - 1}{\alpha_i} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, k \\ a_i &= 1 + \alpha_i, \quad b_i = 1 - \alpha_i \quad \text{pour } i = k+1, k+2, \dots, d \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\left(\frac{(1+\alpha_1)\cdots(1+\alpha_k)(1+\alpha_{k+1})\cdots(1+\alpha_d)}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\frac{(\alpha_1-1)\cdots(\alpha_k-1)(1-\alpha_{k+1})\cdots(1-\alpha_d)}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}\right)^{\frac{1}{d}} \leq 2$$

et, par conséquent,

$$p^{\frac{1}{d}} + q^{\frac{1}{d}} \leq 2M^{\frac{1}{d}}. \tag{5}$$

3.2 On a $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \cdots \geq |\alpha_k| > 1 > |\alpha_{k+1}| \geq \cdots \geq |\alpha_d|$.

Utilisant le polynôme Q défini auparavant, on obtient :

$$|Q(-1)| = |P(i)P(-i)| = r^2.$$

En appliquant le théorème 5 au polynôme Q on obtient

$$r^{\frac{2}{d}} + (pq)^{\frac{1}{d}} \leq 2M^{\frac{2}{d}}\ , \tag{6}$$

qui est la conclusion du théorème 6.

4. Comparaison des résultats obtenus

Nous ferons référence seulement aux polynômes totalement positifs car dans le cas de ceux totalement réels, le raisonnement est analogue.

4.1 Nous montrerons que le théorème 1 peut être déduit du théorème 3. Tout d'abord, soit $1 \leq k \leq d-1$.

On pose $a_i = 1 - \left(\frac{a}{M}\right)^{\frac{1}{k}}$pour $i = 1,\ldots,k$, $a_i = 1 - \left(\frac{b}{M}\right)^{\frac{1}{d-k}}$ pour $i = k+1,\ldots,d$, et $b_i = 1 - a_i$ pour $i = 1,\ldots,d$. On applique l'inégalité (1) et on obtient

$$\left(1 - \left(\frac{a}{M}\right)^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{k}{d}} \cdot \left(1 - \left(\frac{b}{M}\right)^{\frac{1}{d-k}}\right)^{\frac{d-k}{d}} + \left(\frac{ab}{M^2}\right)^{\frac{1}{d}} \leq 1$$

ce qui, en conjonction avec le théorème 3 donne l'inégalité

$$p \leq M\left(1 - \left(\frac{ab}{M^2}\right)^{\frac{1}{d}}\right)^d$$

d'où la conclusion du théorème 1 pour $1 \leq k \leq d-1$. Le cas $k = 0$ est impossible. Lorsque $k = d$ on a $M = b$ et on déduit de (1) que $b^{1/d} \geq 1 + p^{1/d} \geq 2$, ce qui entraîne l'inégalité $b^{1/d} \geq \frac{1+\sqrt{4b^{1/d}+1}}{2}$. Ainsi, le théorème 1 est completement prouvé.

4.2 Nous montrerons que le résultat du théorème 5 est supérieur à celui du théorème 1 ce qui revient à

$$\frac{p^{\frac{1}{d}}+q^{\frac{1}{d}}}{2} \geq \frac{p^{\frac{1}{d}}+\sqrt{p^{\frac{2}{d}}+4(ab)^{\frac{1}{d}}}}{2}$$

c'est à dire :

$$q^{\frac{2}{d}} \geq p^{\frac{2}{d}}+4(ab)^{\frac{1}{d}}$$

ou encore

$$\left(\prod_{i=1}^{d}(1-\alpha_i)^2\right)^{\frac{1}{d}}+\left(\prod_{i=1}^{d}(4\alpha_i)\right)^{\frac{1}{d}} \leq \left(\prod_{i=1}^{d}(1+\alpha_i)^2\right)^{\frac{1}{d}}$$

ce qui provient de l'inégalité (1) en posant $a_i=(1-\alpha_i)^2$ et $b_i=4\alpha_i$ pour $i=1,2,\ldots,d$.

4.3 Deux exemples vont nous montrer que les théorèmes sont, suivant les circonstances, l'un supérieur à l'autre.

Pour $a>0$ nous considerons le polynôme : $f(x)=(x-a)^k(x-\frac{1}{a})^{d-k}$. Dans ce cas le théorème 5 nous donne une minoration optimale, car

$$M=\frac{p^{\frac{1}{d}}+q^{\frac{1}{d}}}{2}.$$

Pour $f(x)=(x-2)^9(x-\frac{1}{10})$ la conséquence du théorème 3 nous donne la minoration $M>485,8$ pendant que du théorème 5 nous obtenons un résultat plus faible, notamment $M>473,5$.

Bibliographie

[1] M. J. Bertin, *Exposé au Cinquième Congrès de L'Association Canadienne de Théorie des Nombres.* Ottawa, août 1996.
[2] V. Flammang, *Inégalités sur la mesure de Mahler d'un polynôme.* Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **9** (1997), 69–74.
[3] A. Schinzel, *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic.* Acta Arith. **24** (1973), 385–399.

Laurenţiu Panaitopol
Département de Mathématiques
Université de Bucarest
14, Academiei
RO-70109 Bucarest
E-mail : pan@al.math.unibuc.ro