Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **17** (2005), 527–553

Généralisation d'un théorème d'Iwasawa

par Jean-François JAULENT

A Georges Gras, à l'occasion de son soixantième anniversaire

Résumé. Nous généralisons à certains quotients finis d'un Λ-module noethérien non nécessairement de torsion le classique théorème d'Iwasawa sur l'expression asymptotique du ℓ-nombre de classes dans les $\mathbb{Z}_\ell$-extensions. Puis nous illustrons les résultats obtenus en déterminant explicitement les caractères invariants attachés aux ℓ-groupes de S-classes T-infinitésimales dans une tour cyclotomique à partir de quelques paramètres référents et de données galoisiennes simples des extensions considérées. Un outil fondamental de cette étude est l'identité du miroir établie par Georges Gras, qui permet par dualité d'exprimer des conditions de ramification (sauvages ou modérées) dans une extension en termes de décomposition dans une autre extension. Les résultats obtenus précisent et complètent ceux établis dans un travail antérieur en collaboration avec Christian Maire (cf. [12]). L'étude approfondie des contributions sauvages repose sur une généralisation d'un résultat de R. Greenberg (cf. [3]).

Abstract. We extend to convenient finite quotients of a noetherian Λ-module the classical result of K. Iwasawa giving the asymptotic expression of the ℓ-part of the number of ideal class groups in $\mathbb{Z}_\ell$-extensions of number fields. Then, in the arithmetic context, we compute the three characters associated by this way to the ℓ-groups of T-infinitesimal S-classes in the cyclotomic tower and relate them to the classical invariants and the decomposition characters associated to the finite sets of places S and T. A main tool in this study is the so-called Spiegelungssatz of Georges Gras, which exchanges (wild or tame) ramification and decomposition. The main results of this arithmetical part extend those we obtained with Christian Maire in a previous article (cf. [12]). The most intricate study of the wild contribution of the sets S and T involves a generalization of a classical result of R. Greenberg on the genus theory of cyclotomic towers (cf. [3]).

Manuscrit reçu le 26 mai 2004.

[3] R. GREENBERG, *On a certain ℓ-adic representation*. Invent. Math. **21** (1973), 117–124.

[12] J.-F. JAULENT & C. MAIRE, *Sur les invariants d'Iwasawa des tours cyclotomiques*. Canadian Math. Bull. **46** (2003), 178–190.

Jean-François JAULENT
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux 1
351, cours de la libération
33405 Bordeaux Cedex, France
E-mail : jaulent@math.u-bordeaux1.fr