Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **18** (2006), 59–72

A system of simultaneous congruences arising from trinomial exponential sums

par Todd COCHRANE, Jeremy COFFELT et Christopher PINNER

Résumé. Pour p un nombre premier et $\ell < k < h < p$ des entiers positifs avec $d = (h, k, \ell, p-1)$, nous montrons que M, le nombre de solutions simultanées x, y, z, w dans $\mathbb{Z}_p^*$ de $x^h + y^h = z^h + w^h$, $x^k + y^k = z^k + w^k$, $x^\ell + y^\ell = z^\ell + w^\ell$, satisfait à

$$M \leq 3d^2(p-1)^2 + 25hk\ell(p-1).$$

Quand $hk\ell = o(pd^2)$, nous obtenons un comptage asymptotique précis de M. Cela conduit à une nouvelle borne explicite pour des sommes d'exponentielles tordues

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) e^{2\pi i f(x)/p}\right| \leq 3^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{2}} p^{\frac{7}{8}} + \sqrt{5}(hk\ell)^{\frac{1}{4}} p^{\frac{5}{8}},$$

pour des trinômes $f = ax^h + bx^k + cx^\ell$, et à des résultats sur la valeur moyenne de telles sommes.

Abstract. For a prime p and positive integers $\ell < k < h < p$ with $d = (h, k, \ell, p-1)$, we show that M, the number of simultaneous solutions x, y, z, w in $\mathbb{Z}_p^*$ to $x^h + y^h = z^h + w^h$, $x^k + y^k = z^k + w^k$, $x^\ell + y^\ell = z^\ell + w^\ell$, satisfies

$$M \leq 3d^2(p-1)^2 + 25hk\ell(p-1).$$

When $hk\ell = o(pd^2)$ we obtain a precise asymptotic count on M. This leads to the new twisted exponential sum bound

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} \chi(x) e^{2\pi i f(x)/p}\right| \leq 3^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{2}} p^{\frac{7}{8}} + \sqrt{5}(hk\ell)^{\frac{1}{4}} p^{\frac{5}{8}},$$

for trinomials $f = ax^h + bx^k + cx^\ell$, and to results on the average size of such sums.

Manuscrit reçu le 30 mars 2004.

Todd Cochrane
Department of Mathematics
Kansas State University
Manhattan, KS 66506, USA
E-mail : cochrane@math.ksu.edu
URL: http://www.math.ksu.edu/~cochrane

Jeremy Coffelt
Department of Mathematics
Kansas State University
Manhattan, KS 66506, USA
E-mail : jcoffelt@math.ksu.edu

Christopher Pinner
Department of Mathematics
Kansas State University
Manhattan, KS 66506, USA
E-mail : pinner@math.ksu.edu
URL: http://www.math.ksu.edu/~pinner/