LAGUERRESCHE DIFFERENTIALGEOMETRIE UND KINEMATIK

Zdeněk Jankovský, Praha

(Eingegangen am 28. April 1993)

Summary. In this paper the plane Laguerre's geometry in the augmented plane of dual numbers is presented. Basic integral and differential invariants of $\mathcal{L}$-curves in the plane are deduced, i.e. the $\mathcal{L}$-curve arc, $\mathcal{L}$-curvature, $\mathcal{L}$-minimal curves, $\mathcal{L}$-circle. Furthermore the contact of $\mathcal{L}$-curves, $\mathcal{L}$-osculating circle, $\mathcal{L}$-evolute of a curve and some special $\mathcal{L}$-motions are studied from the point of view of $\mathcal{L}$-Differential geometry.

Keywords: Laguerre geometries

MSC 1991: 51B15

1. Grundbegriffe

Es seien $\mathbb{R}$ der Körper der reellen Zahlen und Δ der Ring aller dualen Zahlen

$$a = a_1 + \varepsilon a_2; \quad \varepsilon^2 = 0;\, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Der Ring Δ hat eigene Nullteiler. Die Menge aller Nullteiler ist

$$\mathfrak{A} \equiv \mathbb{R}\varepsilon \equiv \{x\varepsilon \mid x \in \mathbb{R};\, \varepsilon^2 = 0\}$$

Wir erweitern den Ring Δ auf die erweiterte duale Ebene $\overline{\Delta}$:

$$\overline{\Delta} \equiv \left\{z \mid z \in \Delta \vee z = \text{“}1/0\text{”} = \infty \vee z = c\text{“}\tfrac{1}{\varepsilon}\text{”} = c\omega; c \in \mathbb{R} - \{0\}; \varepsilon^2 = 0\right\}.$$

$\overline{\Delta}$ ist ein Modell der Laguerreschen Ebene L ($\mathcal{L}$-Ebene), s. [7]. Die fundamentale Bewegungsgruppe, die auf diesem Modell der $\mathcal{L}$-Ebene operiert, ist die Gruppe der direkten linearen gebrochenen Transformationen im dualen Gebiet ($\mathcal{L}$-Transformationen)

$$\mathcal{L}(\xi) = z = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}; \quad \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \notin \mathfrak{A}, \tag{1}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Delta$; $z, \xi \in \overline{\Delta}$ sind.

Die $\mathcal{L}$-Gruppe (1) wird linear durch die spezielle lineare Gruppe $SL(2, \Delta)$ repräsentiert.

Auf der $\mathcal{L}$-Gruppe als einer Bewegungsgruppe kann man die Laguerresche Geometrie und die $\mathcal{L}$-Kinematik analogisch zur klassischen Gruppen aufbauen, s. [1], [2], [5], [7], [8]. Der Grundbegriff der kinematischen Geometrie ist der Begriff der Bewegung.

Definition 1. Eine $\mathcal{L}$-Bewegung $\mathcal{L}(\Lambda/L)$ der $\mathcal{L}$-Ebene Λ in der $\mathcal{L}$-Ebene L ist das 1-parametrige System der $\mathcal{L}$-Transformationen

$$z = \frac{\alpha(t)\xi + \beta(t)}{\gamma(t)\xi + \delta(t)}; \quad \alpha(t)\delta(t) - \beta(t)\gamma(t) \notin \mathfrak{A}$$

auf $\mathcal{I}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^n(\mathcal{I})$; $C^n(\mathcal{I})$ ist der Δ-Modul aller n-mal stetig differenzierbaren dualen Funktionen der reellen Veränderlichen t auf dem Intervall $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\xi, z \in \overline{\Delta}$; Λ, bzw. L nennen wir *die Gangebene*, bzw. *die Rastebene*.

2. Schwarzsche Ableitung und $\mathcal{L}$-Bogen

Sei

$$\mathcal{C} \equiv z = z(t); \quad z \in C^3(\mathcal{I}) \tag{2}$$

eine parametrische Darstellung der Kurve $\mathcal{C}$ in der $\mathcal{L}$-Ebene L, d. h. $z = z(t)$ ist eine duale Funktion der reellen Veränderlichen t.

$$I(t) = \{z, t\} = \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^{\cdot} - \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2 = \frac{\dddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2$$

nennen wir die *Schwarzsche Ableitung* der dualen Funktion $z \in C^3(\mathcal{I})$. Es gilt:

Satz 1. *Die Schwarzsche Ableitung ist eine $\mathcal{L}$-Invariante, d. h. sie ist invariant bez glich der $\mathcal{L}$-Gruppe* (1).

B e w e i s. Transformieren wir die L-Ebene $\overline{\Delta}$ durch die $\mathcal{L}$-Transformation

$$\grave{z} = \frac{c_1 z + c_2}{c_3 z + c_4}; \quad |\mathbf{C}| = c_1 c_4 - c_2 c_3 \notin \mathfrak{A}; \quad c_i \in \Delta, \text{konst.},$$

bekommen wir für die Ableitungen:

$$(\grave{z})^{\cdot} = \frac{|\mathbf{C}|}{(c_3 z + c_4)^2}\dot{z}; \qquad (\grave{z})^{\cdot\cdot} = \frac{\ddot{z}(c_3 z + c_4) - 2c_3 \dot{z}^2}{(c_3 z + c_4)^3}|\mathbf{C}|;$$

und weiter

$$
\begin{aligned}
\{`z, t\} = \left\{ \frac{c_1 z + c_2}{c_3 z + c_4}, t \right\} &= \left( \frac{`\ddot{z}}{`\dot{z}} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{1}{2} \left( \frac{`\ddot{z}}{`\dot{z}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\ddot{z}(c_3 z + c_4) - 2c_3 \dot{z}^2}{(c_3 z + c_4)\dot{z}} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{z}(c_3 z + c_4) - 2c_3 \dot{z}^2}{(c_3 z + c_4)\dot{z}} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}} \right)^2 = \{z, t\},
\end{aligned}
$$

qed. □

B e m e r k u n g. Für $(c_3 z + c_4) \in \mathfrak{A}$ erweitern wir die Ableitung ähnlich wie für „∞“ in der Gaussschen Ebene.

Sei

$$\Theta\colon `\mathcal{I} \to \mathcal{I}\colon t = \Theta(`t), \tag{3}$$

wo $\Theta = \overline{\Theta} \in C^1(\mathcal{I})$ und $\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}`t} \neq 0$ auf $`\mathcal{I}$, eine zulässige Transformation Θ des Parameters t. Für diese Θ-Transformation gilt die Cayleysche Formel:

$$\{z, t\} = \{z, \Theta\} \cdot \dot{\Theta}^2 + \{\Theta, t\}. \tag{4}$$

In allgemeinen ist $\{\Theta, t\} \neq 0$ und $\dot{\Theta}^2 \neq 1$; daraus folgt:

B e m e r k u n g 1. Die Schwarzsche Ableitung ist keine Invariante bezüglich der Transformation Θ.

B e m e r k u n g 2. Die Schwarzsche Ableitung $I(t)$ charakterisiert eine Klasse der mit der $\mathcal{L}$-Kurve (2) $\mathcal{L}$-äquivalenten $\mathcal{L}$-Kurven, denn (2) ist eine Lösung der Schwarzschen Differentialgleichung der 3. Ordnung

$$\{z, t\} - I(t) = 0. \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung $z(t)$ der Gleichung (5) können wir angesichts Satz 1 (S1) durch eine beliebige partikulare Lösung $\hat{z}(t)$ in den Form

$$z(t) = \frac{c_1 \hat{z}(t) + c_2}{c_3 \hat{z}(t) + c_4}; \quad |\mathbf{C}| \notin \mathfrak{A},\ c_i \in \Delta, \text{ konst.}$$

darstellen.

Die Schwarzsche Ableitung ist eine duale Funktion

$$I(t) = I_1(t) + \varepsilon I_2(t);\ \varepsilon^2 = 0. \tag{6}$$

Nach S1 ist $I(t)$ $\mathcal{L}$-invariant und aus (6) folgt, daß $I_1(t)$ und $I_2(t)$ auch $\mathcal{L}$-invariant sind. Transformieren wir den Parameter t der $\mathcal{L}$-Kurve (2) durch

$$\omega = \omega(t); \quad \dot{\omega} \neq 0 \text{ auf } \mathcal{I}.$$

Wir bekommen bezüglich (4)

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} I_1(t) = I_1(\omega) \cdot \dot{\omega}^2 + \{\omega, t\}, \\ I_2(t) = I_2(\omega) \cdot \dot{\omega}^2 \end{cases}$$

Aus der $\mathcal{L}$-Invarianz I_2 und aus (7_2) folgt:

B e m e r k u n g 3. $\operatorname{sgn}(I_2(t))$ ist $\mathcal{L}$-invariant und ω-invariant.

Definition 2. Die Invariante $\operatorname{sgn}(I_2(t))$ nennen wir die *$\mathcal{L}$-Signatur* der $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}$; wir bezeichnen sie „$\operatorname{sgn}\mathcal{C}$“. Die Punkte der $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}$, für welche $I_2(t) = 0$ ist, nennen wir die *minimalen Punkte*. Wenn alle Punkte der $\mathcal{L}$-Kurve die minimale Punkte sind, nennen wir diese $\mathcal{L}$-Kurve *eine minimale $\mathcal{L}$-Kurve*.

B e i s p i e l 1. Suchen wir die minimalen Punkte der $\mathcal{L}$-Kurve

$$\mathcal{C} \equiv z = \frac{\varepsilon - t}{1 + \varepsilon t}; \quad \varepsilon^2 = 0; \; t \in \mathbb{R}.$$

L ö s u n g . Die Kurve $\mathcal{C}$ hat die Darstellung:

$$z = \frac{(\varepsilon - t)(1 - \varepsilon t)}{(1 + \varepsilon t)(1 - \varepsilon t)} = (\varepsilon - t)(1 - \varepsilon t) = -t + \varepsilon(1 + t^2)$$
$$z(t) = \mathcal{R}z(t) + \varepsilon \mathcal{D}z(t) = z_1(t) + \varepsilon z_2(t),$$

wo $z_1(t) = -t$; $z_2 = 1 + t^2$;

$\dot{z} = -1 + 2t\varepsilon$; $\ddot{z} = 2\varepsilon$; $\dddot{z} = 0$, die Schwarzsche Ableitung unserer Kurve $\mathcal{C}$ ist:

$$\{z, t\} = \frac{\dddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{-1 + 2t\varepsilon}\right)^2 = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt: Alle Punkte der Kurve $\mathcal{C}$ sind minimale Punkte, d. h. die Kurve $\mathcal{C}$ ist eine die minimale $\mathcal{L}$-Kurve. Unsere Kurve $\mathcal{C}$ ist ein isotroper Kreis (Parabel), d. h. $\mathcal{C}$ ist ein geometrisches Grundobjekt der $\mathcal{L}$-Geometrie, s.z. B. [7], S. 239, 244.

Untersuchen wir jetzt nur $\mathcal{L}$-Kurven ohne minimale Punkte. Wählen wir

$$I_i(\omega) \in C^0(`\mathcal{I}), \quad i = 1, 2$$

fest, dann ist (7_1), bzw. (7_2) eine Differentialgleichung für $\omega(t)$ der dritten, bzw. ersten Ordnung. Wählen wir speziell

$$I_2(\omega) = \operatorname{sgn} I_2(t) \quad \text{auf } \mathcal{I}. \tag{8}$$

Aus (7_2) und (8) folgt

$$\omega(t) = \pm \int (\operatorname{sgn} I_2(t) \cdot I_2(t))^{1/2}\, \mathrm{d}t; \quad t \in \mathcal{I}. \tag{9}$$

Satz 2. (9) *ist eine integrale Invariante der $\mathcal{L}$-Kurve* (2).

B e w e i s. Die $\mathcal{L}$-Invarianz von (9) folgt aus der $\mathcal{L}$-Invarianz von I_2; die Θ-Invarianz aus (3) und (7_2). □

Definition 3. Die integrale Invariante ω der $\mathcal{L}$-Kurve (2) nennen wir *der $\mathcal{L}$-nat rliche Parameter* oder *der $\mathcal{L}$-Bogen* der $\mathcal{L}$-Kurve.

B e m e r k u n g 4. Durch die Wahl einer Integralkonstante in (9) wählen wir der Anfang der natürlichen Parametrisation und durch die Auswahl des Vorzeichens wird eine Orientation der $\mathcal{L}$-Kurve angegeben.

3. $\mathcal{L}$-Krümmung

Parametrisieren wir die $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}$ durch den $\mathcal{L}$-natürlichen Parameter ω:

$$\mathcal{C} \equiv z = z(\omega); \quad \omega \in {}^{\omega}\mathcal{I}. \tag{10}$$

Für die Schwarzsche Ableitung der $\mathcal{L}$-Kurve (10) bezüglich (8) gilt

$$\{z, \omega\} = I(\omega) = I_1(\omega) + \varepsilon \operatorname{sgn} \mathcal{C}. \tag{11}$$

Aus der Cayleyschen Formel und aus (11) und (9) folgt

$$I_1(t) + \varepsilon I_2(t) = (I_1(\omega) + \varepsilon \operatorname{sgn} I_2(t)) \cdot \operatorname{sgn}(I_2(t)) \cdot I_2(t) + \{\omega, t\}$$

und daraus folgt weiter

$$I_1(\omega) = \frac{I_1(t) - \{\omega, t\}}{\operatorname{sgn}(I_2(t)) \cdot I_2(t)}. \tag{12}$$

Aus (9) ergibt sich

$$\dot{\omega} = \pm (I_2(\omega) \cdot I_2(t))^{1/2}; \quad \ddot{\omega} = \pm \frac{I_2(\omega) \cdot \dot{I}_2(t)}{2(I_2(\omega) \cdot I_2(t))^{1/2}}$$

und deswegen ist

$$\{\omega, t\} = \Big(\frac{\dot I_2(t)}{2I_2(t)}\Big)^{\cdot} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\dot I_2(t)}{2I_2(t)}\Big)^2 = \frac{4I_2(t)\cdot \ddot I(t) - 5(\dot I_2(t))^2}{8(I_2(t))^2}. \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt schließlich

$$\Omega = I_1(\omega) = \frac{8I_1(t)\cdot (I_2(t))^2 - 4I_2(t)\ddot I_2(t) + 5(\dot I_2(t))^2}{8(I_2(t))^3\cdot \operatorname{sgn}(I_2(t))}. \tag{14}$$

Satz 3. *Ω ist eine Differentialinvariante des niedrigsten Ranges (der 5. Rang) der $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}$.*

Beweis. Die $\mathcal{L}$-Invarianz von (14) folgt aus der $\mathcal{L}$-Invarianz von $I_1(t), I_2(t)$; die Θ-Invarianz folgt durch direkte Berechnung. Der niedrigste Rang Ω (5. Rang) folgt aus der Gruppentheorie der Differentialinvarianten für die 6-parametrige Gruppe (1), aus (14) und aus der Schwarzschen Ableitung. □

Definition 4. Die Differentialinvariante Ω nennen wir die $\mathcal{L}$-Krümmung der $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}$.

Bemerkung 3. Die Ableitung und die Form der fundamentalen Integral- und Differentialinvariante sind ähnlich wie bei der Möbiusschen Geometrie, s. [10].

Beispiel 2. Suchen wir die $\mathcal{L}$-Krümmung der $\mathcal{L}$-Kurve

$$\mathcal{C} \equiv z = 1 + \exp((1+\varepsilon)t)$$

Lösung. Wir stellen dar:

$$\begin{aligned} z &= 1 + \mathrm{e}^t + \varepsilon t\mathrm{e}^t = z_1 + \varepsilon z_2,\\ z' &= \frac{\dot z_2}{\dot z_1} = t+1, \ \text{ d. h. } z' = 0 \ \text{ für } t = -1; \end{aligned}$$

für

$$\begin{aligned} t \to -\infty \quad &\text{ist } z \to 1,\\ t \to +\infty \quad &\text{ist } z \to \infty. \end{aligned}$$

S. Abb. 1.

Ferner ist

$$\dot z = \mathrm{e}^t(1+\varepsilon(t+1)), \quad \ddot z = \mathrm{e}^t(1+\varepsilon(t+2)), \quad \dddot z = \mathrm{e}^t(1+\varepsilon(t+3)).$$

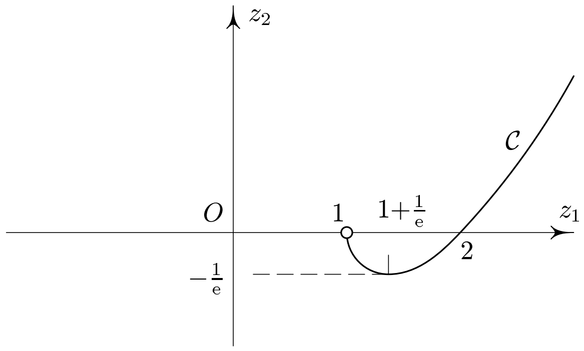

Abb. 1.

Die Schwarzsche Ableitung ist der Form

$$\{z,t\} = \frac{\dddot{z}}{\dot{z}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)^2 = \frac{1+\varepsilon(t+3)}{1+\varepsilon(t+1)} - \frac{3}{2}\left(\frac{1+\varepsilon(t+2)}{1+\varepsilon(t+1)}\right)^2$$
$$= [1+\varepsilon(t+3)]\cdot[1-\varepsilon(t+1)] - \frac{3}{2}\frac{1+2\varepsilon(t+2)}{1+2\varepsilon(t+1)}$$
$$= 1+2\varepsilon - \frac{3}{2}(1+2\varepsilon) = -\frac{1}{2} - \varepsilon = I_1 + \varepsilon I_2 = \text{konst.}$$

Also ist $I_2(t) = -1$ und nach (9) ist $\omega = t + c$, $c \in \mathbb{R}$, konst. Die $\mathcal{L}$-Krümmung nach (14) ist $\Omega = -\frac{1}{2}$ und unsere Kurve $\mathcal{C}$ ist der $\mathcal{L}$-Kreis, vgl. den nächsten Absatz.

4. $\mathcal{L}$-minimale Kurven, $\mathcal{L}$-Kreise

Die minimalen $\mathcal{L}$-Kurven (2) erfüllen die Schwarzsche Differentialgleichung

$$\{z,t\} - I_1(t) = 0. \tag{15}$$

Satz 4. *Minimale $\mathcal{L}$-Kurven sind B gen der isotropen Kreise (der isotrope Kreis vgl.* [7], [8]*).*

B e w e i s. 1. Wir beweisen den Satz zuerst für den speziellen Fall $I_1(t) = 0$. Integrieren wir (15) für $I_1(t) = 0$ auf $\mathcal{I}$, bekommen wir

$$z(t) = \frac{a+bt}{c+dt}; \quad a,b,c,d \in \Delta; \quad ad - bc \notin \mathfrak{A} \tag{16}$$

(16) ist die parametrische Darstellung eines Bogens des isotropen Kreises, s. [8].

2.

$$z(t)=\frac{a+b\Theta(t)}{c+d\Theta(t)};\quad a,b,c,d\in\Delta;\ ad-bc\notin\mathfrak{A} \tag{17}$$

ist die parametrische Darstellung eines isotropen Kreises; aus (17) folgt

$$\{z,\Theta\}=0$$

und bezüglich (4) gilt

$$\{z,t\}=\{\Theta,t\}=I(t)=I_1(t),\quad t\in\mathcal{I},$$

qed. □

B e m e r k u n g 4. Die isotropen Kreise sind die geometrischen Grundobjekte der $\mathcal{L}$-Geometrie.

Definition 5. Die $\mathcal{L}$-Kurven (2) nennen wir die $\mathcal{L}$-Kreise, wenn $\Omega=\Omega_0$ konstant ist.

Suchen wir die $\mathcal{L}$-Kreise. Die $\mathcal{L}$-Kreise erfüllen die Schwarzsche Differentialgleichung

$$\{z,\omega\}-I_0=0, \tag{18}$$

wo $I_0=\Omega_0+\varepsilon\operatorname{sgn}\mathcal{C}$, $\operatorname{sgn}\mathcal{C}\neq 0$ ist. Wir transformieren (18) durch

$$\dot z=\frac{1}{\mathfrak{z}^2};\qquad \mathfrak{z}\notin\mathfrak{A}\ \text{ auf }\ \mathcal{I},$$

in die lineare Differentialgleichung der 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\ddot{\mathfrak{z}}+\frac{1}{2}I_0\mathfrak{z}=0. \tag{19}$$

(19) ist ein spezieller Fall der linearen Differentialgleichung mit dualen Koeffizienten

$$\ddot{\mathfrak{z}}-q_1\dot{\mathfrak{z}}+q_0\mathfrak{z}=0;\qquad (q_0,q_1)\notin\mathfrak{A}^2. \tag{20}$$

(20) ist mit zwei linearen Differentialgleichungen im reellen Gebiet ($\mathfrak{z}=\mathfrak{z}_1+\varepsilon\mathfrak{z}_2$; $\dot{\mathfrak{z}}=\dot{\mathfrak{z}}_1+\varepsilon\dot{\mathfrak{z}}_2$; …) äquivalent:

$$\begin{cases}\ddot{\mathfrak{z}}_1-(\mathcal{R}q_1)\dot{\mathfrak{z}}_1+(\mathcal{R}q_0)\mathfrak{z}_1=0\\ \ddot{\mathfrak{z}}_2-(\mathcal{R}q_1)\dot{\mathfrak{z}}_2+(\mathcal{R}q_0)\mathfrak{z}_2=(\mathcal{D}q_1)\dot{\mathfrak{z}}_1-(\mathcal{D}q_0)\mathfrak{z}_1\end{cases} \tag{21}$$

Für die Lösung s. [8], S. 379–387.

Wir bekommen die Lösung (18) für $\Omega_0 < 0$ in der Form

$$z = \frac{(\lambda)_1 \cdot \exp((\lambda)_1 t) + (\lambda)_2 C \cdot \exp((\lambda)_2 t)}{\exp((\lambda)_1 t) + C \exp((\lambda)_2 t)}, \tag{22}$$

wo $C \in \Delta$, konst., $(\lambda)_i = (\lambda_1)_i + \varepsilon(\lambda_2)_i = \pm\frac{1}{2}\sqrt{-2\Omega_0} \mp \varepsilon\frac{1}{4\Omega_0}\sqrt{-2\Omega_0}$; $i = 1, 2$.

Analogisch für $\Omega_0 \geqslant 0$.

(22) können wir in der Form

$$z = \frac{\alpha + \beta \exp(\chi\omega)}{\gamma + \delta \exp(\chi\omega)}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \notin \mathfrak{A}, \tag{22$'$}$$

schreiben, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi \in \Delta$, Konst., $|\chi| = 1$; $\chi \neq \overline{\chi}$ ist; der $\mathcal{L}$-Kreis (22′) hat zwei asymptotische Punkte $(\frac{\alpha}{\gamma}), (\frac{\beta}{\delta})$, s. Abb. 2.

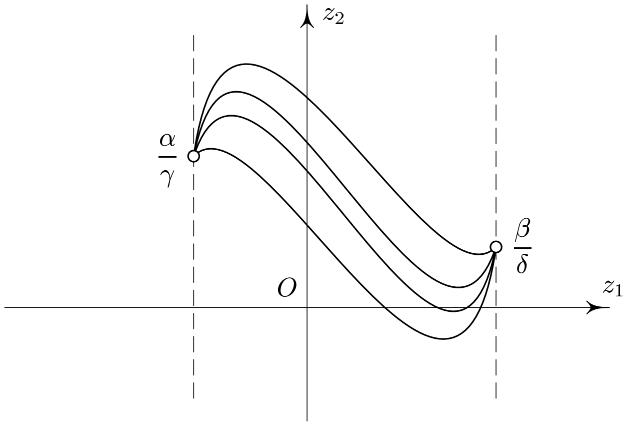

Abb. 2.

5. Die Berührung der $\mathcal{L}$-Kurven, $\mathcal{L}$-Schmiegkreise, $\mathcal{L}$-Evolute

Seien

$$\mathcal{C}_i \equiv f_i = f_i(\omega); \quad f_i \in C^n(\mathcal{I}); \quad i = 1, 2 \tag{23}$$

zwei $\mathcal{L}$-Kurven in der $\mathcal{L}$-Ebene L:

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}_i) \equiv h_i = h_i(\omega) = \mathcal{L} \circ f_i(\omega)$$

$\mathcal{L}(\mathcal{C}_i)$ sind $\mathcal{L}$-äquivalente $\mathcal{L}$-Kurven zu den Kurven $\mathcal{C}_i$. Aus den dualen Beziehungen

$$f_1^{(j)}(\omega_0) = f_2^{(j)}(\omega_0); \qquad \text{für } \omega_0 \in \mathcal{I}; \quad j = 0, 1, \ldots, n \tag{24}$$

folgt auch

$$h_1^{(j)}(\omega_0) = h_2^{(j)}(\omega_0); \qquad \text{für } \omega_0 \in \mathcal{I}; \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

wo $f_i^{(j)}(\omega_0) = \frac{\mathrm{d}^j f_i}{\mathrm{d}\omega^j}(\omega_0)$; $h_i^{(j)}(\omega_0) = \frac{\mathrm{d}^j h_i}{\mathrm{d}\omega^j}(\omega_0)$; $i = 1, 2$.

Definition 6. Zwei $\mathcal{L}$-Kurven (23) haben im Punkt ω_0 die Berührung der Ordnung n, wenn (24) gilt.

Bemerkung 7. Die Berührungen zweier $\mathcal{L}$-Kurven C_i und zweier $\mathcal{L}$-äquivalente $\mathcal{L}$-Kurven $\mathcal{L}(C_i)$ sind einander gleich. Die Berührung ist bezüglich der $\mathcal{L}$-Gruppe (1) invariant und ist ähnlich wie in der euklidischen Geometrie definiert.

Suchen wir die $\mathcal{L}$-Kreise

$$\mathcal{C}_2 \equiv f_2(\omega) = \frac{\alpha + \beta \exp(\chi\omega)}{\gamma + \delta \exp(\chi\omega)}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma \notin \mathfrak{A}, \tag{25}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \chi \in \Delta$, konst., $|\chi| = 1$, $\chi \neq \overline{\chi}$ ist, die die Berührung der höchsten Ordnung mit den gegebenen $\mathcal{L}$-Kurven

$$\mathcal{C}_1 \equiv f_1 = f_1(\omega)$$

im Punkt ω_0 haben.

(25) stellt ein 7-parametriges (die Parameter: $\mathcal{R}(\frac{\alpha}{\gamma}), \mathcal{D}(\frac{\alpha}{\gamma}), \ldots, \mathcal{D}(\frac{\delta}{\gamma}), \chi$) System der $\mathcal{L}$-Kurven mit der konstanten Krümmung $\Omega_0 < 0$ und mit den asymptotischen Punkten $(\frac{\alpha}{\gamma}), (\frac{\beta}{\delta})$ dar. Wir können 6 Parameter aus den ersten drei Bedingungen (24) bestimmen und wir bekommen ein 1-parametriges System (mit dem Parameter χ) von $\mathcal{L}$-Kreisen mit der analytischen Darstellung

$$\mathcal{C}_2 \equiv f_2(\omega) = \frac{\chi f_1(\omega_0) \cdot f_1'(\omega_0) E_1 + (f_1(\omega_0) \cdot f_1''(\omega_0) - 2\big(f_1'\big)^2(\omega_0)) E_2}{\chi f_1'(\omega_0) E_1 + f''(\omega_0) E_2}, \tag{26}$$

wo $E_1 = 1 + \exp(\chi(\omega - \omega_0))$; $E_2 = 1 - \exp(\chi(\omega - \omega_0))$ ist. Die $\mathcal{L}$-Kurve (26) hat mit der gegebenen $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}_1$ in ihrem Punkt ω_0 die Berührung mindestens zweiter Ordnung. Die asymptotischen Punkte der $\mathcal{L}$-Kreise (26) sind:

$$\begin{cases} A_1(\chi) = f_1(\omega_0) - 2\dfrac{(f_1'(\omega_0))^2}{f_1''(\omega_0) + \chi f_1'(\omega_0)} \\ A_2(\chi) = f_1(\omega_0) - 2\dfrac{(f_1'(\omega_0))^2}{f_1''(\omega_0) - \chi f_1'(\omega_0)} \end{cases} \tag{27}$$

Bemerkung 8. Die konstante $\mathcal{L}$-Krümmung Ω_0 der $\mathcal{L}$-Kreise (26) hängt von χ ab.

Wählen wir $\chi = \chi_0$ so, daß die $\mathcal{L}$-Krümmungen $\Omega_0 < 0$ der gegebenen $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}_1$ und des $\mathcal{L}$-Kreises $\mathcal{C}_2$ im Punkt ω_0 gleich sind. Dann gilt:

Satz 5. *Der $\mathcal{L}$-Kreis* (26) *mit der Kr mmung Ω_0 und dessen asymptotische Punkte* (27) *werden zur gegebenen $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}_1$ mit der Kr mmung Ω_0 im Punkt ω_0 eindeutig zugeordnet.*

Definition 7. Den eindeutig zugeordneten $\mathcal{L}$-Kreis (26), bzw. die asymptotischen Punkte (27) zur gegebenen $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}_1$ im Punkt ω_0 nennen wir den *$\mathcal{L}$-Schmiegkreis*, bzw. *die Mittelpunkte der $\mathcal{L}$-Kr mmung*. Das 1-parametriges System (der Parameter ω_0) der Mittelpunkte der $\mathcal{L}$-Krümmung der gegebenen $\mathcal{L}$-Kurve $\mathcal{C}_1$ nennen wir dessen *$\mathcal{L}$-Evolute*, vgl. [10].

Bemerkung 9. Die Einführung dieser Begriffe ist analogisch wie in anderen natürlichen Geometrien auf einer Gruppe, vgl. z.B. [10] für die Möbiussche Gruppe.

6. Einige spezielle $\mathcal{L}$-Bewegungen

Die reelle Veränderliche t, bzw. ω, interpretieren wir als ein Zeitregime der $\mathcal{L}$-Bewegung, s. Definition 1. Suchen wir jetzt die aus dem differentialgeometrischen Standpunkt fundamentalen Klassen der $\mathcal{L}$-Bewegungen.

a) *$\mathcal{L}$-Bewegungen mit der minimalen $\mathcal{L}$-Karte*:

Definition 8. Wenn alle reguläre Bahnkurven der $\mathcal{L}$-Bewegung minimal sind, nennen wir das System der Bahnkurven die *minimale $\mathcal{L}$-Karte der $\mathcal{L}$-Bewegung*.

Satz 6. *Die $\mathcal{L}$-Bewegungen mit der minimalen $\mathcal{L}$-Karte sind durch*

$$z = \frac{c_1\Theta(t)\zeta + c_2}{c_3\Theta(t)\zeta + c_4}; \quad c_1c_4 - c_2c_3 \notin \mathfrak{A}, \tag{28}$$

dargestellt.

Beweis folgt aus Definition 1, Definition 8, Satz 4, vgl. (17). □

Bemerkung 10. Die $\mathcal{L}$-Bewegungen (28) sind eben $\mathcal{L}$-Bewegungen mit dem (K1) $\wedge$ (K2) — Automorphismus der Klasse $C^3(I)$, vgl. [9].

b) *$\mathcal{L}$-Bewegungen mit der $\mathcal{L}$-Karte mit gegebener $\mathcal{L}$-Kr mmung Ω_0 auf $\mathcal{I}$.*

Für $\Omega_0 < 0$ bekommen wir die $\mathcal{L}$-Bewegungen mit der analytischen Darstellung (vgl. (25))

$$z = \frac{C_1 \exp(\chi_0\omega)\xi + C_2}{C_3 \exp(\chi_0\omega)\xi + C_4}; \quad C_1C_4 - C_2C_3 \notin \mathfrak{A}.$$

Bibliographie

[1] *W. Benz*: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
[2] *W. Blaschke, G. Thomsen*: Differentialgeometrie III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Verlag J. Springer, Berlin, 1929.
[3] *F. M. Dimentberg*: Theorie der Schrauben und ihre Anwendungen. Nauka, Moskva, 1978. (Russisch.)
[4] *L. Granát*: Duale Zahlen und ihre Anwendungen in der Liniengeometrie und in räumlicher Kinematik. Acta polytechnica – Práce ČVUT v Praze *IV* (1967), no. 1, 5–19.
[5] *H. Frank*: Kinematik in der Laguerre-Ebene I. J. Geometry *7/2* (1976), 53–84.
[6] *I. M. Jaglom*: Complex Numbers in Geometry. Leicester, 1967. (Englisch.)
[7] *Z. Jankovský*: Zur Laguerreschen Ebenegeometrie. Čas. pěst. mat. *109* (1984), 236–249.
[8] *Z. Jankovský*: Die Phasenbilder der Geschwindigkeitenfelder der Laguerreschen Bewegungen. Apl. mat. *33* (1988), no. 5, 374–388.
[9] *Z. Jankovský*: Zu den Automorphismen der Laguerreschen Bewegungen. Beiträge zur Algebra und Geometrie *29* (1989), 35–49.
[10] *Z. Jankovský*: Zur Approximation der Bahnkurven der $\mathcal{M}$-Bewegung. Apl. mat. *24* (1979), no. 5, 389–395.
[11] *J. Maeda*: Differential Laguerre geometry of plane curves. Jap. J. Math. *18* (1941-43), 385–583.
[12] *H. Mäurer*: Möbius- und Laguerre-Geometrien über schwach konvexen Semiflächen. Math. Zeitschr. *98* (1967), 355–386.
[13] *H. Mäurer*: Laguerre-Ebenen mit Symmetrien an Punktpaaren und Zykeln. J. Geometry 8, 1/2 (1976), 79–93.
[14] *H. Mäurer*: Involutorische Automorphismen von Laguerre-Ebenen mit genau zwei Fixpunkten. Monatsht. f. Math. *86* (1978), no. 2, 131–142.
[15] *H. Pottmann*: Zur globalen Kinematik einer fünfgliedrigen Untergruppe der ebenen Laguerre-Gruppe. Čas. pěst. mat., 112 (1987), no. 4, 401–409.
[16] *U. Schober*: Zur Differentialgeometrie der Kurven in der Laguerre-Ebene. Diss. TU Karlsruhe. 1966.
[17] *E. Study*: Zur Theorie der Riccatischen und der Schwarzschen Differentialgleichungen. Archiv Math. Phys. *16* (1910), 113–144.
[18] *G. I. Tlupov*: Die Interpretationen der Ebenen mit der projektiven Metrik auf den Ebenen der komplexen, dualen und anormal komplexen Zahlen. Sb. nauč. rabot po izbr. voprosam mat. i mech. Vyp. 36, Kabardino-Balkarskij gos. univ., Nalčik. 1972, pp. 157–168. (Russisch.)
[19] *T. Takasu*: Differentialgeometrie in den Kugelräumen (2 Bände). II. Laguerresche Differentialgeometrie. Tokyo, 1939.
[20] *A. T. Yang, F. Freudenstein*: Application of Dual-Number Quaternion Algebra to the Analysis of Spatial Mechanisms. ASME J. Appl. Mech. *31* (1964), 300–308.
[21] *A. T. Yang*: Displacement Analysis of Fife-Link Mechanisms Using (3×3)-Matrices with Dual-Number Elements. ASME, J. Eng. Ind. *91* (1969), 152–157.

Anschrift des Verfassers: *Zdeněk Jankovský*, katedra matematiky, fakulta elektrotechnická ČVUT, Technická 2, 166 27 Praha 6.