GEOMETRISCHER BEWEIS DER DISKRETEN UNGLEICHUNG VON W. WIRTINGER

Kamil Maleček, Praha

(Eingegangen am 5. Mai, 1994)

Summary. Die diskrete Ungleichung von W. Wirtinger wird aus den Eigenschaften der auf den mehrdimensionalen Räumen liegenden Polygone gefolgert.

Keywords: discrete Wirtinger's inequality, regular polygons

MSC 1991: 52A40, 51M20

Es sei f eine auf $\mathbb{R}$ erklärte Funktion mit der Periode 2π und mit der stetigen Ableitung f'. Die Ungleichung von W. Wirtinger besagt bekanntlich, daß

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \implies \int_0^{2\pi} {f'}^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{2\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x;$$

das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn

$$f(x) = a\cos x + b\sin x, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Die diskreten Fälle haben I. J. Schoenberg [9], H. D. Block [3], K. Fan, O. Taussky, J. Todd [4], O. Shisha [8] und J. Novotná [5], [6], [7] hergeleitet. Das engste Analogon lautet:

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reelle Zahlen. Wir setzen $a_{n+1} = a_n$ und nehmen an, daß

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 0. \tag{1}$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)^2 \geqslant 4\sin^2\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2, \tag{2}$$

wobei die Gleichheit genau dann besteht, wenn

$$a_i = A \sin \frac{2i\pi}{n} + B \cos \frac{2i\pi}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad A, B \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

O. Shisha hat diese Ungleichung geometrisch bewiesen. Im n-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{E}_n$, in dem ein System der Orthogonalkoordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit dem Nullpunkt O zugrunde gelegt wird, hat er vom Polygon $\mathcal{P} = P_1 P_2 \ldots P_n$ mit den Ecken (vgl. R. Alexander [1], S.64)

$$\begin{aligned} P_1 &= [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n], \\ P_2 &= [a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_1], \\ P_3 &= [a_3, a_4, a_5, \ldots, a_1, a_2], \\ &\ldots \\ P_n &= [a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}], \end{aligned} \tag{4}$$

deren Koordinaten zyklisch gebildet werden, diese drei Eigenschaften ausgenützt:

a) das Polygon ist gleichseitig,

b) seine Ecken liegen auf der Kugelfläche $\varkappa$ vom Radius $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ um den Nullpunkt O,

c) sein Schwerpunkt ist im Nullpunkt O.

Die Anwendung des Satzes von W. Fenchel über die Länge der sphärischen geschlossenen Kurve, deren konvexe Hülle den Mittelpunkt der Kugelfläche enthält, auf das auf der Kugelfläche $\varkappa$ liegende sphärische Polygon mit den Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ hat dann die Ungleichung (2) geliefert.

In den folgenden Zeilen beweisen wir die Ungleichung (2) auf Grund des weiteren Studiums des Polygons $\mathcal{P}$.

Zuerst ergänzen wir noch die Eigenschaften a)–c) des Polygons $\mathcal{P}$:

d) die Diagonalen $P_1P_3, P_2P_4, \ldots$ haben dieselbe Länge; auch die Diagonalen P_1P_4, P_2P_5, … haben dieselbe Länge; usw.

Die Voraussetzung (1) bedeutet, daß das Polygon $\mathcal{P}$ in der Ebene ϱ mit der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \tag{5}$$

und mit dem Normalenvektor $\mathbf{n} = (1, 1, \ldots, 1)$ liegt.

Wir setzen $\omega = \dfrac{2\pi}{n}$ und bezeichnen mit $\mathcal{B}$ diese Gruppe von Vektoren:

$$({}^{1}6)\qquad \begin{aligned} {}^{1}\mathbf{u}_1 &= (\sin\omega, \sin(\omega+\omega), \dots, \sin(\omega+(n-1)\omega))\,,\\ {}^{1}\mathbf{u}_2 &= (\cos\omega, \cos(\omega+\omega), \dots, \cos(\omega+(n-1)\omega))\,, \end{aligned}$$

$$({}^{2}6)\qquad \begin{aligned} {}^{2}\mathbf{u}_1 &= (\sin\omega, \sin(\omega+2\omega), \dots, \sin(\omega+2(n-1)\omega))\,,\\ {}^{2}\mathbf{u}_2 &= (\cos\omega, \cos(\omega+2\omega), \dots, \cos(\omega+2(n-1)\omega))\,,\\ &\dots \end{aligned}$$

bis im Falle des ungeraden n

$$({}^{\frac{n-1}{2}}6)\qquad \begin{aligned} {}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{u}_1 &= \left(\sin\omega, \sin(\omega+\frac{n-1}{2}\omega), \dots, \sin\left(\omega+\frac{(n-1)^2}{2}\omega\right)\right)\,,\\ {}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{u}_2 &= \left(\cos\omega, \cos(\omega+\frac{n-1}{2}\omega), \dots, \cos\left(\omega+\frac{(n-1)^2}{2}\omega\right)\right)\,, \end{aligned}$$

und im Falle des geraden n

$$({}^{\frac{n}{2}}6)\qquad {}^{\frac{n}{2}}\mathbf{u}_1 = \left(\sin\omega, \sin(\omega+\frac{n}{2}\omega), \dots, \sin\left(\omega+\frac{n(n-1)}{2}\omega\right)\right).$$

Die Zahlen kl in den Argumenten $\omega + kl\omega,\ k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right],\ l = 0, 1, 2, \dots, n-1$, nehmen wir $\operatorname{mod} n$.

Die Summe der Koordinaten jedes Vektors der Gruppe $\mathcal{B}$ ist gleich Null (s. zum Beispiel W. Blaschke [2], S.13, 14, Formeln (2),(5)). Also die Skalarprodukte der Vektoren der Gruppe $\mathcal{B}$ und des Vektors $\mathbf{n}$ verschwinden. Deshalb liegen die Vektoren der Gruppe $\mathcal{B}$ in der Ebene ϱ, die wir als Unterraum des Vektorraumes $\mathcal{V}(\mathbf{E}_n)$ betrachten.

Die Skalarprodukte der Vektoren der Gruppe $\mathcal{B}$ sind

$$(7)\qquad \begin{aligned} &{}^{i}\mathbf{u}_1 \cdot {}^{j}\mathbf{u}_1 = {}^{i}\mathbf{u}_2 \cdot {}^{j}\mathbf{u}_2 = \frac{n}{2}\delta_i^j,\ \text{wo} \begin{cases} i, j = \ 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2} & \text{beim ungeraden } n,\\ i, j = \ 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1 & \text{beim geraden } n, \end{cases}\\ &{}^{i}\mathbf{u}_1 \cdot {}^{j}\mathbf{u}_2 = 0, \quad {}^{\frac{n}{2}}\mathbf{u}_1 \cdot {}^{\frac{n}{2}}\mathbf{u}_1 = n\sin^2\omega \end{aligned}$$

(s. wieder W. Blaschke [2], S.15, Formeln (8)).

Folglich bilden die Vektoren der Gruppe $\mathcal{B}$ eine orthogonale Basis in der Ebene ϱ.

Der Nullpunkt O und die Paare der Vektoren $({}^{1}6)$ oder $({}^{2}6)$ ... oder $\left({}^{\frac{n-1}{2}}6\right)$ bestimmen die zweidimensionalen Ebenen, die wir mit ${}^{1}\varrho, {}^{2}\varrho, \dots, {}^{\frac{n-1}{2}}\varrho$ bezeichnen und als axial benennen. Der Nullpunkt O und der Vektor $(^{\frac{n}{2}}6)$ bestimmen die Axialgerade. Die Axialebenen bzw. die Axialgerade sind totalorthogonal.

Die zyklische Permutation der Koordinaten der Vektoren $(^1 6)$ bedeutet geometrisch die Drehung des Paares der Vektoren $^1\mathbf{u}_1$ und $^1\mathbf{u}_2$ in der Ebene $^1\varrho$ um den Nullpunkt O, und zwar um den Winkel ω.

Ähnlich bedeuten die zyklischen Permutationen der Koordinaten der Vektoren $(^k 6)$ die Drehungen der Vektoren $(^k 6)$ in den Ebenen $^k\varrho$ um die Winkel $k\omega, k = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$ und im Fall des Vektors $(^{\frac{n}{2}}6)$ liefert die zyklische Permutation der Koordinaten den umgekehrten Vektor.

Die Vektoren

$$^1\mathbf{v}_1 = \sqrt{\frac{2}{n}}\,{}^1\mathbf{u}_1,\ {}^1\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\,{}^1\mathbf{u}_2,\ \dots,\ {}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{v}_1 = \sqrt{\frac{2}{n}}\,{}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{u}_1,\ {}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\,{}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{u}_2$$

beim ungeraden n, bzw.

$$^1\mathbf{v}_1,\ {}^1\mathbf{v}_2,\ \dots,\ {}^{\frac{n}{2}}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}\sin\omega}\,{}^{\frac{n}{2}}\mathbf{u}_1$$

beim geraden n, bilden eine orthonormale Basis $\mathcal{C}$ der Ebene ϱ. Zugleich bekommen wir so die orthonormalen Basen der Axialebenen $^1\varrho, {}^2\varrho, \dots, {}^{\frac{n-1}{2}}\varrho$ bzw. die Basis der Axialgeraden $^{\frac{n}{2}}\varrho$.

Nun drücken wir die Ortsvektoren $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ der Ecken (4) des Polygons $\mathcal{P}$ als Linearkombinationen der Vektoren der Basis $\mathcal{C}$ aus. In dieser Basis ist

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \left(\mathbf{p}_i \cdot {}^1\mathbf{v}_1, \mathbf{p}_i \cdot {}^1\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{p}_i \cdot {}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{v}_1, \mathbf{p}_i \cdot {}^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{v}_2\right)_{\mathcal{C}} \quad \text{beim ungeraden } n, \\ \mathbf{p}_i &= \left(\mathbf{p}_i \cdot {}^1\mathbf{v}_1, \mathbf{p}_i \cdot {}^1\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{p}_i \cdot {}^{\frac{n}{2}}\mathbf{v}_1\right)_{\mathcal{C}} \quad \text{beim geraden } n,\ i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{8}$$

In der Ebene ϱ betrachten wir die neue orthonormale Basis $\mathcal{C}'$, die diese Vektoren bilden:

$$\begin{aligned} ^1\mathbf{v}'_1 &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\sin(\omega+\omega), \sin(\omega+2\omega), \dots, \sin(\omega+(n-1)\omega), \sin\omega\right), \\ ^1\mathbf{v}'_2 &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\cos(\omega+\omega), \cos(\omega+2\omega), \dots, \cos(\omega+(n-1)\omega), \cos\omega\right), \\ \\ ^2\mathbf{v}'_1 &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\sin(\omega+2\omega), \sin(\omega+4\omega), \dots, \sin(\omega+2(n-1)\omega), \sin\omega\right), \\ ^2\mathbf{v}'_2 &= \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\cos(\omega+2\omega), \cos(\omega+4\omega), \dots, \cos(\omega+2(n-1)\omega), \cos\omega\right), \\ &\dots \end{aligned}$$

bis im Falle des ungeraden n

$$\tfrac{n-1}{2}\mathbf{v}'_1 = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\sin\left(\omega+\frac{n-1}{2}\omega\right), \sin\left(\omega+2\frac{n-1}{2}\omega\right), \ldots, \sin\left(\omega+\frac{(n-1)^2}{2}\omega\right), \sin\omega\right),$$
$$\tfrac{n-1}{2}\mathbf{v}'_2 = \sqrt{\frac{2}{n}}\left(\cos\left(\omega+\frac{n-1}{2}\omega\right), \cos\left(\omega+2\frac{n-1}{2}\omega\right), \ldots, \cos\left(\omega+\frac{(n-1)^2}{2}\omega\right), \cos\omega\right)$$

und im Falle des geraden n

$$\tfrac{n}{2}\mathbf{v}'_1 = \frac{1}{\sqrt{n}\sin\omega}\left(\sin\left(\omega+\frac{n}{2}\omega\right), \sin\left(\omega+2\frac{n}{2}\omega\right), \ldots, \sin\left(\omega+\frac{n(n-1)}{2}\omega\right), \sin\omega\right).$$

Wir überzeugen uns leicht, daß die Koordinaten des Vektors $\mathbf{p}_i$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ dieselben sind wie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{p}_{i+1}$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}'$.

Jetzt projizieren wir das Polygon $\mathcal{P}$ in die Axialebene ${}^k\varrho$ bzw. in die Axialgerade ${}^{\frac{n}{2}}\varrho, k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$. Die Richtung der Projektion ist orthogonales Komplement der Axialebene ${}^k\varrho$ bzw. der Axialgerade ${}^{\frac{n}{2}}\varrho$ in der Ebene ϱ. Auf diese Weise bekommen wir in den Axialebenen die ebenen Polygone ${}^1\mathcal{P}, {}^2\mathcal{P}, \ldots, {}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathcal{P}$, beim geraden n ist ${}^{\frac{n}{2}}\mathcal{P}$ die Strecke auf der Axialgeraden ${}^{\frac{n}{2}}\varrho$. Die Ortsvektoren der Ecken ${}^1P_1, {}^1P_2, \ldots, {}^1P_n$ des Polygons ${}^1\mathcal{P}$ sind

$${}^1\mathbf{p}_i = \left(\mathbf{p}_i \cdot {}^1\mathbf{v}_1, \mathbf{p}_i \cdot {}^1\mathbf{v}_2, 0, \ldots, 0\right)_{\mathcal{C}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

die Ortsvektoren der Ecken ${}^2P_1, {}^2P_2, \ldots, {}^2P_n$ des Polygons ${}^2\mathcal{P}$ sind

$${}^2\mathbf{p}_i = \left(0, 0, \mathbf{p}_i \cdot {}^2\mathbf{v}_1, \mathbf{p}_i \cdot {}^2\mathbf{v}_2, 0, \ldots, 0\right)_{\mathcal{C}} \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{usw.}$$

Beim Polygon ${}^1\mathcal{P}$ erhalten wir jeden Punkt ${}^1P_{i+1}$ aus dem Punkt ${}^1P_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ${}^1P_{n+1} = {}^1P_1$, durch die Drehung in der Axialebene ${}^1\varrho$ um den Nullpunkt O um den Winkel ω und ähnlich für die Ecken des Polygons ${}^k\mathcal{P}$ in der Axialebene ${}^k\varrho, k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$, wobei der Winkel der Drehung $k\omega$ ist. Auf der Axialgeraden ${}^{\frac{n}{2}}\varrho$ sind die Punkte ${}^{\frac{n}{2}}P_{i+1}$ und ${}^{\frac{n}{2}}P_i$ symmetrisch zum Nullpunkt O.

Die Ortsvektoren $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ drücken wir auf diese Weise aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= {}^1\mathbf{p}_1 + {}^2\mathbf{p}_1 + \ldots + {}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1, \\ \mathbf{p}_2 &= {}^1\mathbf{p}_2 + {}^2\mathbf{p}_2 + \ldots + {}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Aus der Eigenschaft b) des Polygons $\mathcal{P}$ und aus der Regelmäßigkeit der Polygone ${}^k\mathcal{P}$ folgt

$$\|\mathbf{p}_1\| = \|\mathbf{p}_2\|, \quad \|{}^k\mathbf{p}_1\| = \|{}^k\mathbf{p}_2\|, \qquad k = 1, 2 \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \tag{10}$$

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
{}^1\mathbf{p}_1 \cdot {}^1\mathbf{p}_2 &= \|{}^1\mathbf{p}_1\|^2 \cos\omega,\\
{}^2\mathbf{p}_1 \cdot {}^2\mathbf{p}_2 &= \|{}^2\mathbf{p}_1\|^2 \cos 2\omega,\\
&\vdots\\
{}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1 \cdot {}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_2 &= \|{}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1\|^2 \cos\left[\frac{n}{2}\right]\omega.
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz von Pythagoras gilt also

$$
(12)\qquad \|\mathbf{p}_1\|^2 = \|{}^1\mathbf{p}_1\|^2 + \|{}^2\mathbf{p}_1\|^2 + \ldots + \|{}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1\|^2.
$$

Weiter gilt:

$$
0 < \omega < 2\omega < \ldots < \left[\frac{n}{2}\right]\omega \leqslant \pi
$$

und deshalb

$$
(13)\qquad \cos\omega > \cos 2\omega > \ldots > \cos\left[\frac{n}{2}\right]\omega.
$$

Aus den Beziehungen (9) – (13) folgt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 &= {}^1\mathbf{p}_1 \cdot {}^1\mathbf{p}_2 + {}^2\mathbf{p}_1 \cdot {}^2\mathbf{p}_2 + \ldots + {}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1 \cdot {}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_2 =\\
&= \|{}^1\mathbf{p}_1\|^2 \cos\omega + \|{}^2\mathbf{p}_1\|^2 \cos 2\omega + \ldots + \|{}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1\|^2 \cos\left[\frac{n}{2}\right]\omega \leqslant\\
&\leqslant \left(\|{}^1\mathbf{p}_1\|^2 + \|{}^2\mathbf{p}_1\|^2 + \ldots + \|{}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1\|^2\right)\cos\omega, \quad \text{also}
\end{aligned}
$$

$$
(14)\qquad \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 \leqslant \|\mathbf{p}_1\|^2 \cos\omega;
$$

das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn

$$
(15)\qquad \|{}^2\mathbf{p}_1\| = \|{}^3\mathbf{p}_1\| = \ldots = \|{}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathbf{p}_1\| = 0
$$

und das bedeutet, daß $\mathcal{P} = {}^1\mathcal{P}$ das regelmäßige konvexe Polygon in der Axialebene ${}^1\varrho$ ist.

Die Ungleichung (2) ist äquivalent mit der Ungleichung

$$
(16)\qquad \sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} \leqslant \cos\omega \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{n}\right)
$$

d.h. mit (14), denn $\mathbf{p}_1$ und $\mathbf{p}_2$ sind die Ortsvektoren der Ecken P_1 und P_2 aus (4). Auch die Bedingungen (3) und (15) sind äquivalent. Beide Bedingungen bedeuten, daß die Vektoren $\mathbf{p}_i$ Linearkombinationen der Vektoren $({}^1 6)$ sind und diese Vektoren bilden die Basis der Axialebene ${}^1\varrho$.

Bibliographie

[1] *R. Alexander*: Metrix embedding techniques applied to geometric inequalities. Lecture Notes in Math. *490* (1975), 57–65.
[2] *W. Blaschke*: Kreis und Kugel. Leipzig, 1916, 1956.
[3] *H. D. Block*: Discrete Analogues of Certain Integral Inequalities. Proc. Amer. Math. Soc. *8* (1957), 852–859.
[4] *K. Fan, O. Taussky, J. Todd*: Discrete Analogs of Inequalities of Wirtinger. Monatsh. Math. *59* (1955), 73–90.
[5] *J. Novotná*: Discrete Analogues of Wirtinger's Inequality for a Two-Dimensional Array. Čas. pěst. mat. *105* (1980), 354–362.
[6] *J. Novotná*: A Sharpening of Discrete Analogues of Wirtinger's Inequality. Čas. pěst. mat. *108* (1983), 70–77.
[7] *J. Novotná*: Discrete Analogues of Certain Inequalities of the Wirtinger Type Involving a Function and Its First and Second Derivatives. Rad Hrvatske akad. znan. umj. mat. *10* (1991), 217–255.
[8] *O. Shisha*: On the Discrete Version of Wirtinger's Inequality. Amer. Math. Monthly *80* (1973), 755–760.
[9] *I. J. Schoenberg*: The Finite Fourier Series and Elementary Geometry. Amer. Math. Monthly *57* (1950), 390–404.

Anschrift des Verfassers: *Kamil Maleček*, Fakulta stavební ČVUT, Thákurova 7, 166 29 Praha 6.