124 (1999) MATHEMATICA BOHEMICA No. 2–3, 185–192

ALCUNE OSSERVAZIONI SUL RANGO NUMERICO PER OPERATORI NON LINEARI

J. Appell, Würzburg, G. Conti, Firenze, P. Santucci, Roma

(Received November 24, 1998)

Dedicated to Professor Alois Kufner on the occasion of his 65th birthday

Abstract. We discuss some numerical ranges for Lipschitz continuous nonlinear operators and their relations to spectral sets. In particular, we show that the spectrum defined by Kachurovskij (1969) for Lipschitz continuous operators is contained in the so-called polynomial hull of the numerical range introduced by Rhodius (1984).

Keywords: nonlinear operator, Lipschitz continuity, spectrum, numerical range, convex hull, polynomial hull

MSC 2000: 47A12, 47H09, 47H12, 47H17, 65F99, 15A60

Data l'enorme importanza della teoria spettrale per operatori lineari in diversi campi della matematica, fisica, ed ingegneria, non c'è da stupirsi che siano stati fatti vari tentativi per introdurre e studiare una teoria spettrale anche per operatori non lineari. Qui bisogna menzionare in primo luogo lo spettro di Kachurovskij [14] per operatori Lipschitziani, lo spettro di Neuberger [17] per operatori differenziabili secondo Fréchet, lo spettro di Rhodius [21] per operatori continui, lo spettro di Dörfner [9] per operatori a crescita sublineare, lo spettro di Furi, Martelli e Vignoli [11] per operatori quasi-limitati, e lo spettro di Feng [10] per cosidetti operatori k-epi. Naturalmente, una tale teoria non può essere del tutto arbitraria: è chiaro che, cercando di introdurre uno spettro per operatori non lineari, bisogna richiedere a questo spettro di soddisfare ad alcune "condizioni minime". Innanzitutto, dovrebbe coincidere con il solito spettro nel caso lineare; inoltre, dovrebbe avere le solite proprietà, p. es. essere compatto e non vuoto; infine, dovrebbe ammettere delle applicazioni non banali a problemi non lineari.

Osserviamo che lo spettro più utile dal punto di vista delle applicazioni è quello di Furi, Martelli e Vignoli che permette di dimostrare nuovi risultati molto interessanti per problemi al contorno per equazioni differenziali, per omotopie tra campi vettoriali essenziali, e per punti di biforcazione [11, 12].

Purtroppo, nessuno degli spettri finora considerati nella letteratura soddisfa tutte queste richieste; ad esempio, lo spettro di Kachurovskij può essere vuoto, lo spettro di Neuberger può essere non limitato o non chiuso, e gli altri spettri menzionati sopra possono essere non limitati o vuoti [1]. Inoltre, tutti gli spettri definiti finora nella letteratura sono assai difficili da calcolare. Perciò sono di un certo interesse metodi per *localizzare* lo spettro di un operatore non lineare che non si conosce in forma esplicita.

A tale scopo, uno dei concetti più utili è il *rango numerico*. Richiamiamo alcuni risultati fondamentali sul rango numerico di un operatore lineare (cfr. p. es. [3, 4, 13]). Dato uno spazio di Hilbert X su $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e un operatore lineare limitato $L\colon\ X \to X$, il rango numerico di L è

$$W(L) = \left\{ \frac{\langle Lx, x\rangle}{\|x\|^2} :\ x \in X,\, x \neq 0 \right\}. \tag{1}$$

Ora, il legame con lo spettro $\sigma(L)$ di L è l'inclusione $\sigma(L) \subseteq \overline{W(L)}$, e ciò dá appunto la possibilità di localizzare lo spettro tramite il rango numerico [24]. Inoltre, vale l'uguaglianza più precisa $\operatorname{co} \sigma(L) = \overline{W(L)}$ se L è normale (p. es., autoaggiunto o unitario). In generale, però, il rango numerico può essere molto più grande dello spettro; ad esempio, nel caso $X = \mathbb{C}^2$ e $L(z, w) = (0, 2az)$ $(a \in \mathbb{C})$ si ha $\sigma(L) = \{0\}$ ma $W(L) = \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| \leqslant |a|\}$.

Sia adesso X uno spazio di Banach, e sia $\mathfrak{Lip}(X)$ l'insieme di tutti gli operatori Lipschitziani (nonlineari) $F\colon\ X \to X$. Munito della norma

$$\|F\| = \|F(0)\| + \sup_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\|x - y\|},$$

l'insieme $\mathfrak{Lip}(X)$ diventa uno spazio di Banach. Seguendo Kachurovskij [14], definiamo lo *spettro* di F tramite la formula

$$\sigma_K(F) = \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ (\lambda I - F)^{-1} \notin \mathfrak{Lip}(X)\}.$$

In altre parole, $\lambda \notin \sigma_K(F)$ se e solo se $\lambda I - F$ é un lipeomorfismo (nel senso che $\lambda I - F$ e $(\lambda I - F)^{-1}$ sono ambedue operatori Lipschitziani su X). Maddox e Wickstead [16] hanno dimostrato che lo spettro di Kachurovskij è sempre compatto. Se $\dim X = 1$ (cioè $X = \mathbb{C}$) si vede facilmente che

$$\sigma_K(F) = \overline{\left\{ \frac{F(z) - F(w)}{z - w} :\ z, w \in \mathbb{C},\ z \neq w \right\}},$$

e quindi $\sigma_K(F) \neq \emptyset$. L'esempio $X = \mathbb{C}^2$ e $F(z,w) = (\overline{w}, i\overline{z})$ (cfr. [2, 11]) dimostra che $\sigma_K(F)$ può essere vuoto già nel caso $\dim X = 2$. Il fatto che questo operatore non è differenziabile in alcun punto $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ non è casuale: infatti, se fosse differenziabile esisterebbe lo spettro $\sigma_N(F)$ di Neuberger, che è sempre non vuoto [17].

Per quanto ne sappiamo, la prima definizione di rango numerico per operatori Lipschitziani F in uno spazio di Hilbert X risale a Zarantonello [25], e precisamente

$$W_Z(F) = \left\{ \frac{\langle F(x) - F(y), x - y\rangle}{\|x-y\|^2} \colon x, y \in X,\, x \neq y \right\}. \tag{2}$$

La definizione analoga in spazi di Banach è dovuta a Rhodius [19, 20] e richiede un formalismo più elaborato. Dato uno spazio di Banach X, denotiamo con J la *mappa di dualità* di X data dalla formula

$$J(z) = \{f \colon\ f \in X^*,\, f(z) = \|z\|^2,\, \|f\| = \|z\|\} \qquad (z \in X)$$

(vedi p. es. [26]). In generale, J è una mappa multivoca; se $J(z)$ è costituito, per ogni $z \in X$, da un solo elemento $f_z \in X^*$, lo spazio X viene detto *liscio*. Per esempio, gli spazi l_p e L_p risultano lisci per $1 < p < \infty$ (cfr. p. es. [7]). Più in generale, uno spazio X è liscio se lo spazio duale X^* è strettamente convesso [8].

Nel seguito ci conviene usare la mappa di dualità modificata

$$\mathfrak{J}(z) = \frac{J(z)}{\|z\|} \qquad (z \in X \setminus \{0\}).$$

Si ha quindi $f \in \mathfrak{J}(z)$ se e solo se $\|f\| = 1$ e $f(z) = \|z\| > 0$. Seguendo [18] (cfr. anche [9]) poniamo adesso per $F \in \mathfrak{Lip}(X)$

$$W_R(F) = \bigcup_{x \neq y} \left\{ \frac{f[F(x) - F(y)]}{\|x-y\|} \colon f \in \mathfrak{J}(x-y) \right\}. \tag{3}$$

Poichè $\mathfrak{J}(z) = \{\langle \cdot, z/\|z\|\rangle\}$ se X è uno spazio di Hilbert, la (3) è una generalizzazione naturale della (2). Inoltre, nel caso di un operatore lineare L in uno spazio di Hilbert si ha $W_R(L) = W_Z(L) = W(L)$.

Altre definizioni di rango numerico basate sul concetto di semi-prodotto scalare nel senso di Lumer [15] si possono trovare in [5, 6].

Poichè F è continuo, il rango numerico (3) è sempre connesso. Inoltre, si prova facilmente che $|\lambda| \leqslant \|F\|$ per $F \in \mathfrak{Lip}(X)$ e $\lambda \in W_R(F)$, e quindi $W_R(F)$ è limitato. Si osservi, però, che $W_R(F)$ in generale non è chiuso: ad esempio, per l'operatore lineare compatto $L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots)$ in $X = l_2$ si ha $W(L) = (0, 1]$.

Per il teorema di Hahn-Banach, il rango numerico $W_R(F)$ è sempre non vuoto, anche se $\sigma_K(F) = \emptyset$. Per esempio, se $X = \mathbb{C}^2$ e $F(z,w) = (\overline{w}, \mathrm{i}\overline{z})$ come sopra, allora

$$W_R(F) = W_Z(F) = \{(1+\mathrm{i})zw\colon\ (z,w) \in \mathbb{C}^2,\ |z|^2 + |w|^2 = 1\} = \overline{\mathbb{D}}_{1/\sqrt{2}},$$

dove

$$\mathbb{D}_r := \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| < r\}.$$

Prima di discutere i legami tra lo spettro di Kachurovskij $\sigma_K(F)$ e il rango numerico di Rhodius $W_R(F)$ richiamiamo la definizione di un sottospettro di $\sigma_K(F)$. Dato $F \in \mathfrak{Lip}(X)$, sia

$$|F| := \inf_{x \neq y} \frac{\|F(x) - F(y)\|}{\|x - y\|}.$$

Ovviamente, $|F| > 0$ implica che F è iniettivo e chiuso; di conseguenza, un operatore surgiettivo $F\colon\ X \to X$ è un lipeomorfismo se e solo se $0 < |F| \leqslant \|F\| < \infty$.

Nel seguito chiameremo l'insieme

$$\sigma_{ap}(F) = \{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda I - F| = 0\} \tag{4}$$

lo *spettro puntuale approssimativo* di F. Nel caso lineare questa definizione coincide esattamente con l'usuale concetto di spettro puntuale approssimativo: infatti, $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ se e solo se esiste una successione $(x_n)_n$ in X t.c. $\|x_n\| \equiv 1$ e $\lambda x_n - Lx_n \to 0$ per $n \to \infty$. E' abbastanza facile vedere che lo spettro puntuale approssimativo $\sigma_{ap}(F)$ è compatto e contenuto nell'insieme anulare $\{\lambda\colon\ \lambda \in \mathbb{K},\ |F| \leqslant |\lambda| \leqslant \|F\|\}$.

Il seguente lemma descrive la "posizione" del sottospettro (4) nello spettro di Kachurovskij:

Lemma 1. *Per $F \in \mathfrak{Lip}(X)$ si ha*

$$\partial\sigma_K(F) \subseteq \sigma_{ap}(F) \subseteq \sigma_K(F). \tag{5}$$

D i m o s t r a z i o n e. Sia $\lambda \notin \sigma_{ap}(F)$, quindi

$$\|\lambda x - F(x) - \lambda y + F(y)\| \geqslant c\|x - y\| \qquad (x, y \in X)$$

per qualche $c > 0$. Allora per ogni μ con $|\mu - \lambda| < \frac{c}{2}$ si ha

$$\|\mu x - F(x) - \mu y + F(y)\| \geqslant \tfrac{c}{2}\|x - y\| \qquad (x, y \in X),$$

quindi $|\mu I - F| \geqslant \frac{c}{2} > 0$. Inoltre, l'equazione $\mu x - F(x) = y$ ammette, per ogni $y \in X$, una soluzione unica $x \in X$, per il teorema di punto fisso di Banach-Caccioppoli [7]. Di conseguenza, $\mu I - F$ è un lipeomorfismo, e $\operatorname{dist}(\lambda, \sigma_K(F)) \geqslant \frac{c}{2}$, cioè $\lambda \notin \partial\sigma_K(F)$.

La seconda inclusione nella (5) è evidente, poichè $\lambda I - F$ non può essere un lipeomorfismo se $|\lambda I - F| = 0$. $\square$

E' facile vedere che nella (5) può valere sia l'uguaglianza che la stretta inclusione. Forniamo una serie di esempi in $X = l_2$. Per $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) \equiv (0, 0, 0, \ldots)$ si ha

$$\partial\sigma_K(F) = \sigma_{ap}(F) = \sigma_K(F) = \{0\},$$

per $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ si ha

$$\partial\sigma_K(F) = \sigma_{ap}(F) = \partial\mathbb{D}_1 \subset \sigma_K(F) = \overline{\mathbb{D}}_1,$$

per $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\|x\|, 0, 0, \ldots)$ si ha

$$\partial\sigma_K(F) = \partial\mathbb{D}_1 \subset \sigma_{ap}(F) = \sigma_K(F) = \overline{\mathbb{D}}_1,$$

e per $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\|x\|, x_1, x_2, \ldots)$ si ha

$$\partial\sigma_K(F) = \partial\mathbb{D}_{\sqrt{2}} \subset \sigma_{ap}(F) = \overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}} \setminus \mathbb{D}_1 \subset \sigma_K(F) = \overline{\mathbb{D}}_{\sqrt{2}}.$$

Il seguente teorema di localizzazione per lo spettro di Kachurovskij è stato dimostrato da Verma [22, 23], cfr. anche [9]:

Teorema 1. *Per $F \in \mathfrak{Lip}(X)$ si ha*

$$\sigma_K(F) \subseteq \overline{\mathrm{co}}\, W_R(F). \tag{6}$$

Al fine di presentare una certa generalizzazione del Teorema 1 richiamiamo una definizione della topologia del piano complesso. Un insieme compatto $J \subset \mathbb{C}$ si chiama *dominio di Jordan* se $\mathbb{C} \setminus J$ è connesso. Poichè la connessione di un insieme in $\mathbb{C}$ implica la sua connessione nella compattificazione $\hat{\mathbb{C}}$, un dominio di Jordan è sempre semplicemente connesso.

Dato un insieme limitato e connesso $M \subset \mathbb{C}$, definiamo *l'involucro di Jordan* di M tramite la formula

$$\mathrm{jo}\, M := \bigcap \{J\colon\ J \supseteq M,\ \ J \text{ Jordan}\}. \tag{7}$$

(In alcuni testi di analisi complessa la (7) viene anche chiamato *involucro polinomiale* di M.) Il seguente lemma dimostra che l'involucro di Jordan fornisce una specie di "interpolazione" tra la chiusura e l'involucro convesso chiuso:

Lemma 2. *Per ogni insieme connesso limitato $M \subset \mathbb{C}$ si ha*

$$\overline{M} \subseteq \mathrm{jo}\, M \subseteq \overline{\mathrm{co}}\, M. \tag{8}$$

D i m o s t r a z i o n e. La prima inclusione segue dall'ovvia relazione $M \subseteq \mathrm{jo}\, M$ e dal fatto che l'involucro di Jordan è sempre chiuso. La seconda inclusione segue dal fatto che un sottoinsieme compatto convesso di $\mathbb{C}$ è un dominio di Jordan. □

Di nuovo, è facile verificare che nella (8) possono valere sia l'uguaglianza che la stretta inclusione. Ad esempio, per il disco unitario $M = \mathbb{D}_1$ si ha

$$\overline{M} = \operatorname{jo} M = \overline{\operatorname{co}}\, M = \overline{\mathbb{D}}_1,$$

per la sua circonferenza $M = \partial\mathbb{D}_1$ si ha

$$\overline{M} = \partial\mathbb{D}_1 \subset \operatorname{jo} M = \overline{\operatorname{co}}\, M = \overline{\mathbb{D}}_1,$$

e per l'insieme "lunare" $M = \{z\colon\ z \in \mathbb{D}_1\,,\ |z-1| > \sqrt{2}\}$ si ha

$$\overline{M} = \operatorname{jo} M = \{z\colon\ z \in \overline{\mathbb{D}}_1,\ |z-1| \geqslant \sqrt{2}\} \subset \overline{\operatorname{co}}\, M = \{z\colon\ z \in \mathbb{D}_1\,,\ \operatorname{Re} z \leqslant 0\}.$$

Infine, se M è la frontiera dell'ultimo insieme lunare, allora

$$\overline{M} = M \subset \operatorname{jo} M = \{z\colon\ z \in \overline{\mathbb{D}}_1,\ |z-1| \geqslant \sqrt{2}\} \subset \overline{\operatorname{co}}\, M = \{z\colon\ z \in \overline{\mathbb{D}}_1,\ \operatorname{Re} z \leqslant 0\}.$$

Utilizzando l'involucro di Jordan, formuliamo ora un altro teorema di localizzazione dello spettro di Kachurovskij:

Teorema 2. *Per $F \in \mathfrak{Lip}(X)$ si ha*

$$\sigma_K(F) \subseteq \operatorname{jo} W_R(F). \tag{9}$$

D i m o s t r a z i o n e. Supponiamo per assurdo che esista $\lambda \in \sigma_K(F) \setminus \operatorname{jo} W_R(F)$. Fissiamo $\mu \in \mathbb{C}$ con $|\mu| > \|F\|$. Essendo aperto e connesso, l'insieme $\mathbb{C} \setminus \operatorname{jo} W_R(F)$ è connesso per archi. Esiste dunque una mappa continua $\gamma\colon\ [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \operatorname{jo} W_R(F)$ t.c. $\gamma(0) = \lambda$ e $\gamma(1) = \mu$. Poichè $\lambda \in \sigma_K(F)$ e $\mu \notin \sigma_K(F)$, si ha $\gamma(\tau) \in \partial\sigma_K(F)$ per qualche $\tau \in [0,1)$.

Dal Lemma 1 si può dedurre che $\gamma(\tau) \in \sigma_{ap}(F)$, quindi $|\gamma(\tau)I - F| = 0$. Ma ciò implica che $\gamma(\tau) \in \overline{W_R(F)}$. Infatti, se fosse $\delta := \operatorname{dist}(\gamma(\tau), W_R(F)) > 0$, allora

$$|f[\gamma(\tau)x - F(x) - \gamma(\tau)y + F(y)]| \geqslant \delta\|x-y\| \quad (f \in \mathfrak{F}(x-y)),$$

e quindi risulterebbe $|\gamma(\tau)I - F| \geqslant \delta$, dato che $\|f\| = 1$. Per la (8), otteniamo $\gamma(\tau) \in \operatorname{jo} W_R(F)$. Ma questo è assurdo, perchè la mappa γ assume valori solo in $\mathbb{C} \setminus \operatorname{jo} W_R(F)$. $\square$

Facciamo alcuni commenti sul Teorema 2. La seconda inclusione nella (8) dimostra che, almeno in teoria, il Teorema 2 fornisce una localizzazione più precisa del Teorema 1. Purtroppo, non siamo riusciti a trovare un esempio in cui

$$\overline{W_R(F)} \subset \sigma_K(F) = \mathrm{jo}\, W_R(F) \subset \overline{\mathrm{co}}\, W_R(F). \tag{10}$$

E' noto che addirittura $\sigma_K(F) \subseteq \overline{W_R(F)}$, se l'operatore F è di classe C^1 [16] oppure è compatto [9], ma anche se lo spazio X è liscio e F è solo Lipschitziano [9]. Di conseguenza, un controesempio soddisfacente la (10) dovrebbe contenere un operatore non differenziabile e non compatto in uno spazio non liscio come, per esempio, l_∞, c, L_∞, o C.

Un'applicazione del Teorema 2 ad una classe di equazioni integrali nonlineari di tipo Uryson-Volterra sarà data in un lavoro successivo.

Acknowledgement: The authors thank the referee for several helpful remarks which improved the paper.

References

[1] *Appell, J.; De Pascale, E.; Vignoli, A.*: A comparison of different spectra for nonlinear operators. To appear.

[2] *Appell, J.; Dörfner, M.*: Some spectral theory for nonlinear operators. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. *28* (1997), no. 12, 1955–1976.

[3] *Bonsall, F. F.; Duncan, J.*: Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971.

[4] *Bonsall, F. F.; Duncan, J.*: Numerical Ranges II. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1973.

[5] *Canavati, J.*: A theory of numerical range for nonlinear operators. J. Funct. Anal. *33* (1979), 231–258.

[6] *Conti, G.; De Pascale, E.*: The numerical range in the nonlinear case. Boll. Unione Mat. Ital. *15-B* (1978), 210–216.

[7] *Deimling, K.*: Nonlinear Functional Analysis. Springer, Berlin, 1985.

[8] *Diestel, J.*: Geometry of Banach Spaces—Selected Topics. Springer, Berlin, 1975.

[9] *Dörfner, M.*: Beiträge zur Spektraltheorie nichtlinearer Operatoren. Ph.D. thesis, 1997.

[10] *Feng, W.*: A new spectral theory for nonlinear operators and its applications. Abstr. Appl. Anal. *2* (1997), 163–183.

[11] *Furi, M.; Martelli, M.; Vignoli, A.*: Contributions to the spectral theory for nonlinear operators in Banach spaces. Annali Mat. Pura Appl. *118* (1978), 229–294.

[12] *Furi, M.; Martelli, M.; Vignoli, A.*: On the solvability of nonlinear operator equations in normed spaces. Annali Mat. Pura Appl. *128* (1980), 321–343.

[13] *Gustafson, K. E.; Rao, D. K. M.*: Numerical Range. Springer, Berlin, 1997.

[14] *Kachurovskij, R. I.*: Regular points, spectrum and eigenfunctions of nonlinear operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR *188* (1969), 274–277. (In Russian, Engl. transl. Soviet Math. Dokl. *10* (1969), 1101–1105.)

[15] *Lumer, G.*: Semi-inner product spaces. Transl. Amer. Math. Soc. *100* (1961), 29–43.

[16] *Maddox, I. J.; Wickstead, A. W.*: The spectrum of uniformly Lipschitz mappings. Proc. Royal Irish Acad. *89-A* (1989), 101–114.

[17] *Neuberger, J. W.*: Existence of a spectrum for nonlinear transformations. Pacific J. Math. *31* (1969), 157–159.
[18] *Pietschmann, F.; Rhodius, A.*: The numerical ranges and the smooth points of the unit sphere. Act. Sci. Math. *53* (1989), 377–379.
[19] *Rhodius, A.*: Der numerische Wertebereich für nicht notwendig lineare Abbildungen. Math. Nachr. *72* (1976), 169–180.
[20] *Rhodius, A.*: Der numerische Wertebereich und die Lösbarkeit linearer und nichtlinearer Gleichungen. Math. Nachr. *79* (1977), 343–360.
[21] *Rhodius, A.*: Über numerische Wertebereiche und Spektralwertabschätzungen. Acta Sci. Math. *47* (1984), 465–470.
[22] *Verma, R. U.*: Approximation-solvability and numerical ranges in Banach spaces. Panam. Math. J. *1* (1992), 49–56.
[23] *Verma, R. U.*: The numerical range of nonlinear Banach space operators. Acta Math. Hung. *63* (1994), 305–312.
[24] *Williams, J. P.*: Spectra of products and numerical ranges. J. Math. Anal. Appl. *17* (1967), 214–220.
[25] *Zarantonello, E. H.*: The numerical range contains the spectrum. Pacific J. Math. *22* (1967), 575–595.
[26] *Zeidler, E.*: Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B: Nonlinear Monotone Operators. Springer, Berlin, 1990.

Authors' addresses: *Jürgen Appell*, Universität Würzburg, Mathematisches Institut, Am Hubland, D-97074 Würzburg, Germany, e-mail: `appell@mathematik.uni-wuerzburg.de`; *Giuseppe Conti*, Università di Firenze, Istituto di Matematica, Via dell'Agnolo 14, I-50122 Firenze, Italy, e-mail: `gconti@cesit1.unifi.it`; *Paola Santucci*, Università di Roma "La Sapienza", Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate, Via A. Scarpa 16, I-00161 Roma, Italy, e-mail: `bigi@dmmm.uniroma1.it`.