МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
52 (2000), 19–25

UDK 517.548
оригинални научни рад
wissenschaftliche Forschungsarbeit

EINIGE ERGEBNISSE ZUR THEORIE POLYANALYTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

M. Čanak und Lj. Protić

I

N. Theodorescu [1] definierte die polyanalytische Funktiom als Lösung der polyanalytischen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^n w}{\partial \bar{z}^n} = 0. \tag{1}$$

Er zeigte dass die allgemeine Lösung dieser Gleichung die Form

$$w(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) \tag{2}$$

besitzt, wobei $\varphi_k(z)$ beliebige analytische Funktionen sind. Ausserdem hat er die Formel

$$F^+(z,\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{p=0}^{n-1} \int_L \frac{(\bar{z}-\bar{t})^p}{p!\,(t-z)} \frac{\partial^p F^+(t,\bar{t})}{\partial \bar{t}^p}\, dt \tag{3}$$

ausgeführt, wo die rechte Seite das Cauchysche Integral für die polyanalytische Funktion darstellt.

In seiner Arbeit [2] hat S. Fempl die lineare komplexe Differentialgleichung

$$D^n w + a_1 D^{n-1} w + \cdots + a_{n-1} D w + a_n w = 0 \tag{4}$$

untersucht, wobei a_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ gegebene Konstanten sind und

$$Dw = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2w'_{\bar{z}} \tag{5}$$

den bekannten Differentialoperator von Kolossov darstellt. Fempl hat zuerst den Begriff der areolären Exponentialfunktion

$$E(z,\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(z) e^{r\bar{z}} \tag{6}$$

AMS Subject Classification: 34 M 99, 32 W 50
Communicated at the 4th Symposium on Mathematical Analysis and its Applications, Aranđelovac 1997

eingeführt und danach auch gezeigt, dass die allgemeine Lösung von (4) die Form

$$w(z,\bar z)=\sum_{k=1}^{n}E_k(z,\bar z)=\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(z)e^{(r_k/2)\bar z} \tag{7}$$

besitzt, wobei $\varphi_k(z)$ beliebige analytische Funktionen sind, während r_k $(k=1,2,\dots,n)$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung

$$s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0 \tag{8}$$

darstellen. Im Falle m gleichen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (8) gelingt man zum Ausdruck

$$[\varphi_1(z)+\bar z\varphi_2(z)+\cdots+\bar z^{m-1}\varphi_m(z)]e^{(r/2)\bar z} \tag{9}$$

als dem entsprechenden Teil der Lösung (7).

J. Kečkić hat die Gleichung (4) im Falle, wenn $a_k=a_k(z)$ gegebene analytische Funktionen sind, gelöst.

Es sei beliebiges Polynom

$$M(t)=b_0+b_1t+\cdots+b_{n-1}t^{n-1}+t^n \tag{10}$$

gegeben. V. Gabrinovič [4] definierte die sgn. metaanalytische Funktionen $U(z,\bar z)$ im Bezug auf das Polynom $M(t)$ als Lösungen der metaanalytischen Differentialgleichung

$$M\left(\frac{\partial}{\partial\bar z}\right)U=0. \tag{11}$$

Er zeigte dass diese Funktionen folgende Form

$$U(z,\bar z)=\sum_{k=1}^{s}F_k(z,\bar z)e^{t_k\bar z}=\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{l=0}^{m_k-1}f_{kl}(z)\bar z^l\right)e^{t_k\bar z} \tag{12}$$

besitzen. Hier sind:

t_k $(k=1,2,\dots,s)$ – Wurzeln des Polynoms (10),

m_k – Mannigfaltigkeit der Wurzeln t_k $(\sum_{k=1}^{s}=n)$,

$f_{kl}(z)$ – analytische Funktionen $(k=1,2,\dots,s,\ l=0,1,\dots,m_{k-1})$,

$F_k(z,\bar z)$ – polyanalytische Funktionen in einem Gebiet D.

Gabrinovič hat auch eine Rabdwertaufgabe vom Carlemantypus für diese Funktionenklasse gelöst.

Es ist klar, dass die Klasse der metaanalytischen Funktionen mit den regulären Lösungen der Differentialgleichung (4) dh. mit den areolären Exponentialfunktionen koinzidiert und dass S. Fempl der erste war, der diese Funktionenklasse eingeführt hat.

II

In seiner Arbeit [5] hat M. Čanak den Begriff der p-polyanalytische Funktion in der Form

$$f(z,\bar z)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^k f_k(z,\bar z) \tag{13}$$

eingeführt, wobei $f_k(z,\bar z)$ beliebige p-analytische Funktionen sind, die durch das bekannte partielle Gleichungssystem von Položij

$$u'_x=\frac{1}{p}\,v'_y,\qquad u'_y=-\frac{1}{p}\,v'_x \tag{14}$$

definiert werden. Diese System können wir auch in der Form

$$u'_x-v'_y=\frac{1-p}{p}\,v'_y,\qquad u'_y+v'_x=-\frac{1-p}{p}\,v'_x \tag{15}$$

schreiben. Wenn man die zweite Gleichung (15) mit i multipliziert und mit der ersten addiert, so erhält man die folgende komplexe Gleichung

$$pDf+i(1-p)Dv=0\qquad (p\neq 0,\ f(z,\bar z)=u+iv). \tag{16}$$

In der Gleichung (16) ist die Charakteristik $p=p(x,y)$ eine reelle Funktion der reellen Veränderlichen x und y. Im speziellen Fall $p=c=\text{const}$ geht die Gleichung (16) in

$$D[pf+i(1-p)v]=0$$

über. Daraus folgt $pf+i(1-p)v=\varphi(z)$, oder

$$\frac{p+1}{2}\,f+\frac{p-1}{2}\,\bar f=\varphi(z). \tag{17}$$

Aus (17) erhalten wir durch Konjugation nach einer kürzeren Rechnung die Formel

$$\frac{p+1}{2p}\,\varphi-\frac{p-1}{2p}\,\bar\varphi=f(z,\bar z). \tag{18}$$

Es sei K die Menge der stetigen komplexen Funktionen, P_c – die Menge der p-analytischen Funktionen mit der konstanten Charakteristik $p=c$ und $\mathcal{A}$ die Menge der analytischen Funktionen in einem geschlossenen Gebiet T ($\mathcal{A}\subset P_c\subset K$). Auf Grund der Formeln (17) und (18) führen wir auf der Menge K folgende Operatoren

$$R_c w=\frac{(c+1)w-(c-1)\bar w}{2c},\qquad R_c^{-1}w=\frac{(c+1)w+(c-1)\bar w}{2}$$

ein. Leicht sehen wir dass $R_c^{-1}R_c w=R_cR_c^{-1}w=w(z,\bar z)$ gilt.

Jeder analytischen Funktion $\varphi(z)$ entspricht auf eine einzige Art und Weisse eine p-analytische Funktion $f(z,\bar z)$ mit der konstanten Charakteristik $p=c$ mittels des Operators

$$R_c\varphi=\frac{c+1}{2c}\,\varphi-\frac{c-1}{2c}\,\bar\varphi=f(z,\bar z).$$

Andererseits entspricht jeder p_c-analytischer Funktion $f(z,\bar{z})$ eine analytische Funktion, mittels des Operators

$$R_c^{-1}f = \frac{c+1}{2}f + \frac{c-1}{2}\bar{f} = \varphi(z).$$

Betrachten wir jetzt folgende komplexe Polynome

$$F(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k f_{k_c}(z,\bar{z}) \tag{19}$$

$$\Phi(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k \varphi_k(z) \tag{20}$$

wobei f_{k_c} beliebige p-analytische Funktionen mit der konstanten Charakteristik $p = c$ sind, und $\varphi_k(z)$ beliebige analytische Funktionen darstellen. Dabei ist $F(z,\bar{z})$ eine p-polyanalytische Funktion und $\Phi(z,\bar{z})$ ein gewöhnliches areoläres Polynom. Leicht sehen wir die folgenden Eigenschaften

$$R_c^{-1}F = R_c^{-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k f_{k_c}\right] = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k R_c^{-1}f_{k_c} \tag{21}$$

$$R_c\Phi = R_c\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k \varphi_k\right] = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k R_c\varphi_k \tag{22}$$

gelten.

Auf der Menge der differenzierbaren komplexen Funktionen im Sinne von Kolossov führen wir einen neuen Operator als Komposition der Operatoren R_c, R_c^{-1} und D durch folgende Formel

$$A_c w(z,\bar{z}) = R_c D R_c^{-1} w \tag{23}$$

ein. Diesser Operator stellt die Verallgemeinerung des Operators von Kolossov D dar und reduziert sich im speziellen Fall ($c = 1$) auf denselben. Auf Grund (21) und (22) sehen wir dass die folgenden Eigenschaften dieses Operators

$$A_c^0 w = R_c R_c^{-1} w, \quad A_c^1 w = A_c w, \quad \ldots, \quad A_c^k w = A_c[A_c^{k-1} w] \tag{24}$$

$$A_c\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k f_{k_c}\right] = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{k-1} f_{k_c} \tag{25}$$

gelten.

Jetzt können wir die p-polyanalytische Differentialgleichung in der Form

$$A_c^n w = 0 \tag{26}$$

einführen, wobei c gegebene, konstante Charakteristik ist. Auf Grund der Eigenschaft (25) finden wir leicht ihre allgemeine Lösung in der Form

$$w(z,\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^k f_{k_c} \tag{27}$$

wobei f_k beliebige p-analytische Funktionen mit der konstanten Charakteristik $p = c$ in einem Gebiet T sind.

III

In seihen zahlreichen Arbeiten (siehe z.B. [6]) hat M. Balk eine ausführilche Theorie der polyanalytischen Funktionen entwickelt. Dabei definierte er auch die sgn. verallgemeinerten polyanalytischen Funktionen als Lösungen der Differentialgleichung

$$\mathcal{D}_A^n f = 0, \qquad (\mathcal{D}_A f = f'_{\bar{z}} + Af) \tag{28}$$

wobei $A = A(z, \bar{z})$ gegebene, stetige Funktion in einem Gebiet T ist.

Für $n = 1$ haben wir die Differentialgleichung

$$f'_{\bar{z}} + A(z, \bar{z})f = 0. \tag{29}$$

Ihre allgemeine Lösung auf Grund der Methode von Fempl (siehe [7]) ist

$$f(z, \bar{z}) = Q(z)\exp\Big(-\int A(z, \bar{z})\, d\bar{z}\Big) \tag{30}$$

wobei $Q(z)$ beliebige analytische Funktion darstellt.

Für $n = 2$ haben wir die Differentialgleichung $\mathcal{D}_A^2 f = 0$. Daraus folgt

$$\mathcal{D}_A f = f'_{\bar{z}} + A(z, \bar{z})f = Q(z)\exp\Big(-\int A(z, \bar{z})\, d\bar{z}\Big). \tag{31}$$

Auf Grund der gleichen Methode finden wir die allgemeine Lösung von (31) in der Form

$$f(z, \bar{z}) = \exp\Big(-\int A(z, \bar{z})\, d\bar{z}\Big)[Q_1(z) + \bar{z}Q_2(z)]. \tag{32}$$

Mit Hilfe der mathematischen Induktion finden wir auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung von Balk (28) in der form

$$f(z, \bar{z}) = \exp\Big(-\int A(z, \bar{z})\, d\bar{z}\Big)[Q_1(z) + \bar{z}Q_2(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}Q_n(z)] \tag{33}$$

wobei $Q_1(z), \ldots, Q_n(z)$ beliebige analytische Funktionen sind. Diese Lösung stellt eine verallgemeinerte areoläre Exponentialfunktion in Sinne von Fempl dar.

Bemerkung. Im Falle $A(z, \bar{z}) = 0$ geht die Gleichung von Balk (28) in die polyanalytische Differentialgleichung und die Lösung (33) in die gewöhnliche polyanalytische Funktion über. Im Falle $A(z, \bar{z}) = A(z)$ geht die Lösung (33) in

$$f(z, \bar{z}) = \exp(-\bar{z}A(z))[Q_1(z) + \bar{z}Q_2(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1}Q_n(z)] \tag{34}$$

über und stellt die gewöhnliche Exponentialfunktion von Fempl dar.

IV

Eine weitere Verallgemeinerung stellt die Gleichung

$$\mathcal{F}^n_{A,B} w = 0 \tag{35}$$

mit $\mathcal{F}_{A,B} w = w'_{\bar z} + A(z,\bar z)w + B(z,\bar z)$, wobei $A(z,\bar z)$ und $B(z,\bar z)$ gegebene, stetige Funktionen in einem geschlossenen Gebiet T sind, dar.

Für $n = 1$ haben wir die Differentialgleichung

$$w'_{\bar z} + A(z,\bar z)w + B(z,\bar z) = 0. \tag{36}$$

Ihre allgemeine Lösung auf Grund [7] ist

$$w(z,\bar z) = \exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)\Big[Q(z) - \int B(z,\bar z)\exp\Big(\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)\,d\bar z\Big]$$

oder

$$w(z,\bar z) = Q(z)\exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big) + S_1(z,\bar z) \tag{37}$$

mit

$$S_1(z,\bar z) = -\exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)\int B(z,\bar z)\exp\Big(\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)\,d\bar z, \tag{38}$$

wobei $Q(z)$ beliebige analytische Funktion darstellt.

Für $n = 2$ haben wir die Differentialgleichung $\mathcal{F}^2_{A,B} w = 0$. Daraus folgt

$$\mathcal{F}_{A,B} w = Q(z)\exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big) + S_1(z,\bar z)$$

oder

$$w'_{\bar z} + A(z,\bar z)w + \Big[B(z,\bar z) - Q(z)\exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big) - S_1(z,\bar z)\Big] = 0. \tag{39}$$

Auf Grund der gleichen Methode finden wir die allgemeine Lösung von (39) in der Form

$$w(z,\bar z) = \exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)[Q_1(z) + \bar z Q_2(z)] + S_2(z,\bar z) \tag{40}$$

mit

$$S_2(z,\bar z) = -\exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)\int [B(z,\bar z) - S_1(z,\bar z)]\exp\Big(\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)\,d\bar z. \tag{41}$$

Mit Hilfe der mathematischen Induktion finden wir auch die allgemeine Lösung der polyanalytischen Differentialgleichung vom Fempltypus (35) in der Form

$$w(z,\bar z) = \exp\Big(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Big)[Q_1(z) + \bar z Q_2(z) + \cdots + \bar z^{n-1} Q_n(z)] + S_n(z,\bar z) \tag{42}$$

wobei $Q_1(z), \dots, Q_n(z)$ beliebige analytische Funktionen sind, während die Funktion $S_n(z,\bar z)$ der rekurrenten Formel

$$S_n(z,\bar z) = -\exp\Bigl(-\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Bigr)\int[B(z,\bar z)-S_{n-1}(z,\bar z)]\exp\Bigl(\int A(z,\bar z)\,d\bar z\Bigr)\,d\bar z. \tag{43}$$

genügt.

BEMERKUNG. Im Falle $B(z,\bar z)=0$ erhält man $S_1 = S_2 = \cdots = S_n = 0$ und die Gleichung (35) geht in die polyanalytische Gleichung von Balk über. Im Falle $A(z,\bar z)=A(z)$ und $B(z,\bar z)=B(z)$ erhält man

$$\begin{aligned} S_n &= -\frac{B}{A}+\frac{S_{n-1}}{A} = -\frac{B}{A}-\frac{B}{A^2}+\frac{S_{n-2}}{A^2} = \cdots \\ &= -\frac{B}{A}-\frac{B}{A^2}-\cdots-\frac{B}{A^n} = -\frac{B(z)[A^n(z)-1]}{A^n(z)[A(z)-1]} \end{aligned}$$

und die Lösung (42) stellt wieder eine gewöhnliche areoläre Exponentialfunktion von Fempl dar.

LITERATUR

[**1**] Theodorescu, N., *La dérivée areolaire ...* , These, Paris 1931.

[**2**] Fempl, S., *Areoläre Exponentialfunktion als Lösung einer Klasse Differentialgleichungen*, Publ. de l'Inst. Math. Belgrade **8(22)** (1968), 138–142.

[**3**] Kečkić, J., *O jednoj klasi parcijalnih jednačina*, Mat. Vesnik **6(21)** (1969), 71–73.

[**4**] Gabrinovič, V., *O kraevoji zadache tipa Kerlemana dlya metaanaliticheskih funkciji*, DAN SSSR **21**, 2 (1977), 112–115.

[**5**] Čanak, M., *Randwertaufgabe vom Riemanntypus für die p-polyanalytischen Funktionen auf der spriralförmigen Kontur*, Mat. Vesnik **40** (1988), 197–203.

[**6**] Balk, M., *Polyanalytic Functions*, Complex Abalysis, Akademie Verlag, Berlin 1983, pp. 68–84.

[**7**] Fempl, S., *Reguläre Lösungen eines Systems partieller Differentialgleichungen*, Publ. de l'Inst. Math. Belgrade **4(18)** (1964), 115–120.

(received 01.08.1997., in revised form 15.09.2000.)

Poljoprivredni fakultet, Nemanjina 6, 11080 Zemun, Yugoslavia

Matematički fakultet, Studentski trg 16, 11000 Beograd, Yugoslavia