МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
53 (2001), 61–70

UDK 519.213
оригинални научни рад
article de recherche

RECHERCHE DES ENSEMBLES MINIMUM POUR UNE CASCADE DE FILES D'ATTENTE AVEC IMPATIENCE

Abdalkader Gheriballah et Bénamar Chouaf

Résumé. Des conditions de récurrence et de récurrence positives sont obtenues sur un système de files d'attente dans lequel les clients impatients quittent la chaine. Les temps des inter-arrivés, les temps de service et les temps d'impatience sont indépendants et indépendantes entre eux.

1. Introduction

En 1978 F. Charlot et J. Pujolle [2] ont étudié la récurrence et les ensembles minimum pour un système de files d'attente composé d'une seule station. En 1979 Numelin [7] a étudié les systémes de files d'attente classiques en tandem. Le but de notre travail est d'étudier les systèmes de files d'attente en tandem avec impatience et de déterminer les ensembles où notre système récurre.

Nous supposons que notre première station à un serveur alimente une autre station à un seul serveur. Les clients arrivent dans le système aux instants A_1, $A_1 + A_2, \dots, A_1 + A_2 + \cdots + A_n, \dots$ suivant la discipline "FIFO", et réclament des temps de services $B_n = (B_n^1, B_n^2)_n$ où pour tout $i \in \{1, 2\}$; B^i représente le temps de service du client à la ième station. Bien sûr le temps de sortie d'un client de la première station correspond à l'instant d'entré à la deuxième station. Nous supposons que les variables $(A_n, B_n)_n$ sont indépendantes ainsi que les $(C_n)_n$ qui représentent les temps d'impatience des clients. On note $W_n = (W_n^1, W_n^2)$ le vecteur d'attente global du client "n" dans le système, où pour tout i, W_n^i représente le temps d'attente du client "n" à la ième station.

On étudie dans un premier temps, la première station avec impatience c'est à dire à tout moment le client peut quitter le système, donc il n'est pas servi. Dans un deuxième temps, nous supposons que la première station est G/G/1 et la deuxième est avec impatience. Enfin dans un dernier temps nous supposons que la première et la deuxième station sont avec impatience.

AMS Subject Classification: 60 K 25
Mots clés: Chaines de Markov, récurrence, récurrence positive, file d'attente, tandem

2. Notations et Définitions

Soient

α, β, μ trois mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$

γ une mesure de probabilité sur $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+})$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace fondamental de probabilité de notre problème,

$\Omega = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+)^{\mathbb{N}}$.

$\mathcal{A} = (\mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+})^{\otimes \mathbb{N}}$.

$\mathbb{P} = (\alpha \otimes \beta \otimes \mu \otimes \gamma)^{\otimes \mathbb{N}}$.

$(A_n, B_n, C_n; n \geq 1)$ est la famille des coordonées de l'espace Ω. Θ l'opérateur shift de Ω défini de Ω: $\forall n \geq 1$, $A_n \circ \Theta = A_{n+1}$, $B_n = (B_n^1, B_n^2) \circ \Theta = B_{n+1} = (B_{n+1}^1, B_{n+1}^2)$, $C_n \circ \Theta = C_{n+1}$, $B'_n = B_n \mathbf{1}_{\{C_n = \infty\}}$, $C'_n = C_n \mathbf{1}_{\{C_n < \infty\}}$. $\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$; $\forall n \geq 1$ $\mathcal{A}_n = \sigma(A_p, B_p, C_p; 1 \leq p \leq n)$;

$$\begin{aligned} a &= \text{ess.}\sup A_1 = \inf\{t \geq 0 \quad \alpha([0,t]) = 1\} \\ b^1 &= \text{ess.}\inf B_1 = \sup\{t \geq 0 \quad \beta([t, +\infty[) = 1\} \\ b^2 &= \text{ess.}\inf B_2 = \sup\{t \geq 0 \quad \beta([t, +\infty[) = 1\} \\ c &= \text{ess.}\inf C_1 \end{aligned}$$

A_n est l'inter-arrivé entre le client "n" et le client "$n-1$". B_n est le temps de service du client "$n-1$". C_n est le temps d'impatience du client "$n-1$".

On suppose que les les trois suites sont indépendantes et chaque suite est formée par des variables indépendantes équidistribuées. Le client "0" arrive à l'instant "0". Le client "n" arrive à l'instant $\sum_{i=1}^{n} A_i$.

Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ la charge du système à l'instant $t = 0$ c'est à dire $W_0 = (W_0^1, W_0^2) = x$. On note W_n par W_n^x dans le cas ou $x \neq 0$. $W_n^x = (W_n^{1,x_1}, W_n^{2,x_2})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on définit le processus stochastique W^x sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par

$$W^x(\omega) = (W_n^x(w); n \in \mathbb{N}) = (W_n(x, \omega); n \in \mathbb{N})$$

Lemme 2.1. [2] *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \overline{\mathbb{R}}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, a, b, c) &\longmapsto f(x, a, b, c) = ((x + b) \wedge (x \vee c) - a)_+ \end{aligned}$$

(i) f est croissante en b, c, x et décroissante en a

(ii) $\forall (x, a, b, c,)$, $\forall (x', a', b', c')$

$$|f(x, a, b, c,) - f(x', a', b', c')| \leq \max(|x - x'|, |a - a'|, |b - b'|, |c - c'|)$$

Théorème 2.1. [4] *Soient $(Y_n; n \in \mathbb{N})$ une chaine de Markov récurrente positive et $g \colon E \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. On pose $X_n = g(Y_n)$. Soit f*

une fonction borélienne de $\mathbb{R}_+^k \times \mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}_+^k$ *croissante et continue à gauche par rapport à la première coordonnée. Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^k$ *on pose*

$$\begin{cases} W_0^x = x \\ W_{n+1}^x = f(W_n^x, X_{n+1}). \end{cases}$$

On suppose que

(i) Sous $\mathbb{P}_m$, (W_n^0) *converge en loi;*

(ii) $\forall y \in E, \quad \mathbb{P}_y(\limsup_n \{W_n^x = W_n^0\}) = 1,$

alors $((Y_n, W_n^x); n \in \mathbb{N})$ *est une chaine de Markov homogène récurrente positive d'état initial* (Y_0, x).

3. Résultats

3.1. Premier cas (Impatience, Classique)

Si nous considérons que la première station est avec impatience, et la deuxième est classique, alors l'équation de récurrence dans la première station est donnée par(voir [2])

$$W_{n+1}^1 = (W_n^1 + B_{n+1}^1 - A_{n+1})_+ \wedge (W_n^1 \vee C_{n+1} - A_{n+1})_+$$

et dans la deuxième station par

$$W_{n+1}^2 = \begin{cases} (W_n^2 + B_{n+1}^2 - A'_{n+1})_+, & \text{si } W_n^1 + B_{n+1}^1 \leq C_{n+1}, \\ (W_n^2 - A'_{n+1})_+, & \text{sinon}, \end{cases}$$

où $A'_{n+1} = W_{n+1}^1 + B_{n+2}^1 - W_n^1 - B_{n+1}^1 + A_{n+1}$.

3.1.1. Irréductibilité

Proposition 3.1.

(i) Si $\min(b^1 - a, c - a) < 0$ *et* $b^2 - a < 0$, *alors*

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2; \quad \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 0} \{W_n^x = 0\}) > 0.$$

(ii) Si $\min(b^1 - a, c - a) \geq 0$ *et* $b^2 - a < 0$, *alors*

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2; \quad \forall \varepsilon > 0; \quad \mathbb{P}(\bigcup_{n \geq 0} \{W_n^x \in [c - a, c - a + \varepsilon] \times \{0\}\}) > 0.$$

Preuve. (i) Supposons que $b^1 - a < 0$ et $b^2 - a < 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $b^1 - a + \varepsilon < 0$ et $b^2 - a + \varepsilon < 0$. Si on prend $N_1 = \left[\frac{x_1}{(a - b^1 - \varepsilon)}\right] + 1$; $N_2 = \left[\frac{x_1 + x_2 + \varepsilon}{(a - b^2 - \varepsilon)}\right]$ et $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$F = \{\bigcap_{i=1}^{N} (B_i^1 \leq b^1 + \varepsilon/2; A_i \geq a - \varepsilon/2; B_i^2 \leq b^2 + \varepsilon/2)\} \subset \{W_{N+1}^x = 0\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x = 0\}) \geq \mathbb{P}(F) = \big(\mathbb{P}(B_1^1 \leq b^1 + \varepsilon/2;\ A_1 \geq a - \varepsilon/2;\ B_1^2 \leq b^2 + \varepsilon/2)\big)^N > 0.$$

Supposons maintenant que $c - a < 0$ et $b^2 - a < 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $b^2 - a + \varepsilon < 0$. Posons $N_1 = \left[\dfrac{x_1}{(a-\varepsilon/2)}\right] + 1$; $N_2 = \left[\dfrac{x_1 + x_2 + \varepsilon}{(a - b^2 - \varepsilon)}\right] + 1$ et $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$F = \bigcap_{i=1}^{N}\{C_i - A_i \leq 0; B_i^2 \leq b^2 + \varepsilon/2, A_i \geq a - \varepsilon/2\} \subset \{W_{N+1}^x = 0\},$$

d'où

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x = 0\}) \geq \mathbb{P}(F) = \big(\mathbb{P}(C_1 - A_1 \leq 0;\ A_1 \geq a - \varepsilon/2;\ B_1^2 \leq b^2 + \varepsilon/2)\big)^N > 0.$$

(ii) $b^1 - a \geq 0$; $c - a \geq 0$; $b^2 - a < 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tels que $2\varepsilon \leq a$ et $b^2 - a + \varepsilon < 0$. Si on prend $N_1 = \left[\dfrac{(x_1 - c - \varepsilon)_+}{(a-\varepsilon)}\right] + 1$; $N_2 = \left[\dfrac{x_1 + x_2 + \varepsilon}{(a - b^2 - \varepsilon)}\right] + 1$ et $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$F = \bigcap_{i=1}^{N+2}\{C_i \leq c + \varepsilon/2;\ A_i \geq a - \varepsilon/2;\ B_i^2 \leq b^2 + \varepsilon/2\} \subset \{W_{N+2} \in [c-a, c-a+\varepsilon]\times\{0\}\}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x \in [c-a, c-a+\varepsilon]\times\{0\}\}) &\geq \mathbb{P}(F)\\ &= \big(\mathbb{P}(C_1 \leq c + \varepsilon/2;\ A_1 \geq a - \varepsilon/2;\ B_1^2 \leq b^2 + \varepsilon/2)\big)^{N+2} > 0\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

3.1.2. Récurrence. Supposons maintenant que $(W_n^{x_1,1}, n \geq 0)$ est une chaine de Markov récurrente positive et que "μ" sa unique mesure invariante.

PROPOSITION 3.2. *Sous l'hypothèse* $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^2) > \mathbb{E}(A_1)$ *la chaine* $(W_n^x, n \geq 0)$ *est transiente.*

Preuve. Cette proposition est une conséquence de l'inégalité $W_n^{2,x_2} \geq (W_n^{2,x_2} + B'_{n+1} - A'_{n+1})_+$ et des résultats sur les files classiques GI/G/1. ■

THÉORÈME 3.1. *Sous les hypothèses* $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^1) < \mathbb{E}(A_1)$ *et* $\mathbb{E}(B_1^2) < \mathbb{E}(A_1)$, *la chaine* $(W_n^x, n \geq 0)$ *est récurrente positive au sens de Harris.*

Preuve. Si $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^1) < \mathbb{E}(A_1)$, alors la chaine $(W_n^{1,x_1}, n \geq 0)$ est récurrente positive [2], on suppose que sa mesure invariante est μ.

Posons $X_{n+1} = (B^2_{n+1} - A'_{n+1})$ et $T = \inf(n \geq 1;\ W^{x_2,2}_n = 0)$. On a

$$W^{2,x_2}_n \leq \Big(x_2 + \sum_{i=1}^n X_i\Big)_+ = \Big(x_2 + \sum_{i=1}^n (B^2_i - A_i) + W^1_0 - W^1_{n+1} + B^1_1 - B^1_{n+1}\Big)_+.$$

Si $\mathbb{E}(B^2_1) < \mathbb{E}(A_1)$, alors

$$\sum_{i=1}^n (B^2_i - A_i) + W^1_0 - W^1_{n+1} + B^1_1 - B^1_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \qquad \mathbb{P}_\mu.p.s$$

ce qui implique que $\mathbb{P}_\mu(T < \infty) = 1$, par suite $\mathbb{P}_\mu(\limsup_n\{W^{2,x_2}_n = 0\}) = 1$.

D'où $\mathbb{P}_\mu\Big(\bigcap_{x_2\in\mathbb{R}_+} \limsup_n\{W^{x_2,2}_n = 0\}\Big) = 1$. Comme la chaine $(W^1_n; n \in \mathbb{N})$ est récurrente positive, alors pour tout $x_1 \in \mathbb{R}_+$, $\mathbb{P}_{x_1}\Big(\bigcap_{x_2\in\mathbb{R}_+} \limsup_n\{W^{2,x_2}_n = 0\}\Big) = 1$, d'où la condition (ii) du Théorème 2.1. D'autre part on sait que

$$W^{2,0} \leq M = \sup_{n\geq 0}\sum_{i=1}^n X_i.$$

sous l'hypothèse $\mathbb{E}(B^2_1) < \mathbb{E}(A_1)$, M est une variable aléatoitre positive finie $\mathbb{P}_\mu$.p.s, d'où la condition (i) du Théorème 2.1, et par suite W^x_n est une chaine de Markov homogène récurrente positive. ∎

Remarque 3.1. Soit V l'ensemble défini par

$$\begin{cases} V = \{0\}\times\{0\}, & \text{si } \min(b^1 - a, c - a) < 0 \text{ et } b^2 - a < 0,\\ V = [c - a, c - a + \varepsilon]\times\{0\}, & \text{si } \min(b - a, c - a) \geq 0 \text{ et } b^2 - a < 0.\end{cases}$$

De la Proposition 3.1 et Théorème 3.1 on conclut que $\mathbb{P}(\limsup_n\{W^x_n \in V\}) = 1$.

Si $\min(b^1 - a, c - a) < 0$ et $b^2 - a < 0$ la chaine récurre au point “0”.
Si $\min(b^1 - a, c - a) \geq 0$ et $b^2 - a < 0$ la chaine récurre dans l'ensemble $[c - a, c - a + \varepsilon]\times\{0\}$.

Remarque 3.2. La condition $\mathbb{E}(B^2_1) < \mathbb{E}(A_1)$ est optimale dont voici l'exemple $x_1 = 0$; $A_n = 1$; $B^1_n = 1$; $\mathbb{P}(C_n = 2) = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(C_n = \infty) = \frac{1}{2}$ alors

$$W^2_{n+1} = (W^2_n + B^2_{n+1} - A_{n+1})_+$$

c'est à dire notre condition devient nécessaire et suffisante.

3.2. Deuxième cas (Classique, Impatience).

On considère maintenant que la première station est classique, et la deuxième est avec impatience, alors nous avons les équations de récurrence suivantes

$$\begin{aligned} W^1_{n+1} &= (W^1_n + B^1_{n+1} - A_{n+1})_+\\ W^2_{n+1} &= (W^2_n + B^2_{n+1} - A'_{n+1})_+ \wedge (W^2_n \vee (C_{n+1} - W^1_n - B^1_{n+1})_+ - A'_{n+1})_+ \quad (I)\end{aligned}$$

3.2.1. Irréductibilité.

PROPOSITION 3.3. *i) Si* $b^1 - a < 0$ *et* $\min(b^2 - a, c - b^1 - a) < 0$*, alors*

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2; \quad \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x = 0\}) > 0$$

ii) Si $b^1 - a < 0$ *et* $\min(b^2 - a, c - a - b^1) \geq 0$*, alors* $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$; $\forall \varepsilon > 0$;

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x \in \{0\} \times [c - a - b^1 - \varepsilon/2, c - a - b^1 + 3\varepsilon/2]\}) > 0.$$

Preuve. (i) Si $b^1 - a < 0$ et $b^2 - a < 0$ la démonstration est identique à celle de la Proposition 3.1.

Soient $c - a < 0$ et $b^1 - a < 0$. Soient $\varepsilon > 0$ tel que $b^1 - a + \varepsilon < 0$; $N_1 = \left[\dfrac{x_1}{(a - b^1 - \varepsilon)}\right]$; et $N_2 = \left[\dfrac{x_1 + x_2 + \varepsilon}{(a - \varepsilon)}\right] + 1$. Si on prend $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$F = \bigcap_{i=1}^{N}\{C_i - A_i \leq 0; B_i^2 \leq b^2 + \varepsilon/2; A_i \geq a - \varepsilon/2\} \subset \{W_{N+1}^x = 0\}$$

d'où

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x = 0\}\Big) \geq \mathbb{P}(F) = \big(\mathbb{P}(C_1 - A_1 \leq 0;\ A_1 \geq a - \varepsilon/2;\ B_1^2 \leq b^2 + \varepsilon/2)\big)^N > 0.$$

(ii) $b^1 - a < 0$; $c - a - b^1 \geq 0$; $b^2 - a \geq 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon \leq a$ et $b^1 - a + \varepsilon < 0$. Si on prend $N_1 = \left[\dfrac{x_1}{(a - b^1 - \varepsilon)}\right] + 1$; $N_2 = \left[\dfrac{(c - a - b^1)}{(b^2 - a + \varepsilon/2)}\right] + 1$; $N_3 = \max(N_1, N_2)$; $N_4 = \left[\dfrac{(x_1 + x_2 - c - \varepsilon)_+}{(a - \varepsilon)}\right] + 1$; et $N = \max(N_3, N_4)$, alors

$$\begin{aligned} F = \bigcap_{i=1}^{N+2}\{C_i \leq c + \varepsilon/2;\ A_i \geq a - \varepsilon/2; B_i^1 \leq b^1 + \varepsilon/2; B_i^2 \leq b^2 + \varepsilon/2\} \\ \subset \{W_{N+2}^x \in \{0\} \times [c - a - b^1 - \varepsilon/2, c - a - b^1 + 3\varepsilon/2]\} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x \in \{0\} \times [c - a - b^1 - \varepsilon/2, c - a - b^1 + 3\varepsilon/2]\}\Big) \geq \mathbb{P}(F) \\ &\quad = \big(\mathbb{P}(C_1 \leq c + \varepsilon/2;\ A_1 \geq a - \varepsilon/2; B_1^1 \leq b^1 + \varepsilon/2; B_1^2 \leq b^2 + \varepsilon/2)\big)^{N+2} > 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

3.2.2. Récurrence. Supposons que $(W_n^{x_1,1}, n \geq 0)$ est une chaine de Markov récurrente positive et "m" sa unique mesure invariante.

Proposition 3.4. *Si* $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^2) > \mathbb{E}(A_1)$, *alors* $(W_n^x, n \geq 0)$ *est une chaine de Markov transiente.*

Preuve. La démonstration est identique à celle de la Proposition 3.2. ■

Lemme 3.1. $\liminf_n W_n^{x_2,2}$ *est constante indépendante de* x_2 $\mathbb{P}_m$*.p.s.*

Preuve. Le lemme est conséquence directe de la loi (0,1) et la proposition 3.3. ■

Lemme 3.2. *Sous l'hypothèse* $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^2) < \mathbb{E}(A_1)$, $\liminf_n W_n^{x_2,2}$ *est finie* $\mathbb{P}_m$*.p.s.*

Preuve. D'aprés le Lemme 3.1, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n W_n^{x_2,2} < \infty) > 0$. On a [2]

$$\overline{W}_n^{2,x_2} = \Big(\sum_{i=1}^{n}(B_i'^2 - A_i') + \sum_{i=1}^{n-1}(C_{i+1}' - \overline{W}_i^{2,x_2})_+ + x_2 \vee C_1'\Big)_+ \quad \mathbb{P}_m.p.s$$

1^er^ cas. Si C_1' est bornée et si $\liminf_n W_n^{2,x_2} = +\infty$, alors

$$\sum_{i=1}^{n}(C_{i+1}' - \overline{W}_i^{2,x_2})_+ < +\infty \quad \mathbb{P}_m.\text{p.s}$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=1}^{n}(B_i'^2 - A_i') = \sum_{i=1}^{n}(B_i'^2 - A_i) - W_{n+1}^1 + W_0 - B_{n+1}^1 + B_1^1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

d'aprés théorème de Birkhoff on a $\mathbb{E}(B_i'^2 - A_i) > 0$. Par suite $\mathbb{E}(B_i'^2) = \mathbb{P}(C_i = +\infty)\mathbb{E}(B_i^2) > \mathbb{E}(A_i)$, ce qui est absurde.

2^eme^ cas. C_1' n'est pas bornée. On remplace C_i par C_i^k

$$\begin{cases} C_i^k = +\infty, & \text{si } C_i \geq k \\ C_i^k = C_i, & \text{si } C_i < k \end{cases}$$

Donc $C_i^k \geq C_i$ pour tout i. On considère la suite $(W_{k,n}^2; n \geq 0)$ construite de $(A_n', B_n^2, C_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ tout comme la suite $(W_n^2; n \geq 0)$ construite de $(A_n', B_n^2, C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cependant pour tout n, on a $W_{k,n}^2 \geq W_n^2$. Donc

$$\liminf_n W_n^{2,x_2} = +\infty \Longrightarrow \liminf_n W_{k,n}^{2,x_2} = +\infty.$$

D'aprés le cas précedent on a $\mathbb{E}(B_i^2 \mathbf{1}_{\{C_i^k = \infty\}} - A_i) > 0$, et par conséquent $\mathbb{P}(C_i^k = +\infty)\mathbb{E}(B_i^2) = \mathbb{P}(C_i \geq k)\mathbb{E}(B_i) > \mathbb{E}(A_i)$ $\forall k \in \mathbb{N}$. On fait tendre k vers l'infini, on obtient $\mathbb{P}(C_i = \infty)\mathbb{E}(B_i^2) \geq \mathbb{E}(A_i)$. D'où la contradiction. ■

Théorème 3.2. *Si* $\mathbb{E}(B_1^1) < \mathbb{E}(A_1)$ *et* $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^2) < \mathbb{E}(A_1)$, *alors* $(W_n^x, n \geq 0)$ *est une chaine de Markov récurrente positive.*

Preuve. Sous l'hypothèse $\mathbb{E}(B_1^1) < \mathbb{E}(A_1)$, $(W_n^1)_n$ est une chaine de Markov récurrente positive au sens de Harris [4].

On a d'aprés le lemme 3.2 la condition (ii) du Théorème 2.1. Pour montrer que $W_n^{2,0}$ converge en loi, il suffit de voir que [2]

$$W_n^{2,0} \leq Z = \sup_{n\geq 0}\Big(k + \sum_{i=1}^{n+1}(B_i^2 \mathbf{1}_{\{C_i \geq k\}} - A'_i)\Big)$$

et que sous l'hypothèse $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^2) < \mathbb{E}(A_1)$, Z est $P_m.p.s$ finie d'aprés théorème de Birkhoff. La récurrence de la chaine découle directement du Théorème 2.1.

D'aprés la Proposition 3.3 notre système récurre dans ce cas dans l'ensemble defini par

$$\begin{cases} V = \{0\}\times\{0\}, & \text{si } \min(b^2-a, c-a-b^1) < 0 \\ & \text{et } b^1 - a < 0, \\ V = \{0\}\times[c-a-b^1-\frac{\varepsilon}{2}, c-a-b^1+\frac{3\varepsilon}{2}], & \text{si } \min(b^2-a, c-a-b^1) \geq 0 \\ & \text{et } b^1 - a < 0. \end{cases}$$

3.3. Troisième Cas (Impatience, Impatience)

Considérons maintenant les deux stations avec impatience, cependant nous avons les équations suivantes

$$W_{n+1}^1 = (W_n^1 + B_{n+1} - A_{n+1})_+ \wedge (W_n^1 \vee C_{n+1} - A_{n+1})_+$$

et

$$W_{n+1}^2 = (W_n^2 + B_{n+1}^2 - A'_{n+1})_+ \wedge (W_n^2 \vee (C_{n+1} - W_n^1 - B_{n+1}^1)_+ - A'_{n+1})_+$$

3.3.1. Irréductibilité

Proposition 3.5.

(1) Si $c - a < 0$, alors

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2; \quad \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x = 0\}\Big) > 0.$$

(2)Supposons que $c - a \geq 0$.

(i) Si $b^1 - a < 0$ et $\min(b^2 - a, c - b^1 - a) < 0$, alors

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2;\ \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x = 0\}\Big) > 0.$$

(ii) Si $b^1 - a < 0$ et $\min(b^2 - a, c - a - b^1) \geq 0$, alors

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2;\ \forall\varepsilon > 0;\ \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0}\{W_n^x \in \{0\}\times[c-a-b^1\varepsilon/2, c-a-b^1+3\varepsilon/2]\}\Big) > 0.$$

(iii) Si $b^1 - a > 0$, alors

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2;\ \forall \varepsilon > 0;\ \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0} \{W_n^x \in [c-a, c-a+\varepsilon] \times \{0\}\}\Big) > 0.$$

Preuve. (1) et (2) (i) et (ii) La démonstration est identique à celle de la Proposition 3.3.

(iii) Si on prend $N_1 = \left[\dfrac{(x_1 - c - \varepsilon)_+}{(a-\varepsilon)}\right] + 1$; $N_2 = \left[\dfrac{x_2}{(a-\varepsilon/2)}\right]$ et $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$F = \bigcap_{i=1}^{N+2} \{C_i \leq c+\varepsilon/2;\ A_i \geq a-\varepsilon/2;\ B_i^2 \leq b^2+\varepsilon/2\} \subset \{W_{N+2} \in [c-a, c-a+\varepsilon] \times \{0\}\}$$

donc

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0} \{W_n^x \in [c-a, c-a+\varepsilon] \times \{0\}\}\Big) \geq \mathbb{P}(F)$$

$$= \big(\mathbb{P}(C_1 \leq c+\varepsilon/2;\ A_1 \geq a-\varepsilon/2)\big)^{N+2} > 0$$

d'où le résultat. ■

3.3.2. Récurrence. Supposons toujours que $(W_n^{x_1,1}, n \geq 0)$ est une chaine de Markov récurrente positive et que "μ" sa unique mesure invariante.

PROPOSITION 3.6. *Sous l'hypothèse $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^2) > \mathbb{E}(A_1)$ la chaine $(W_n^x, n \geq 0)$ est transiente.*

Preuve. La démonstration est identique à celle de la Proposition 3.2. ■

THÉORÈME 3.3. *Si $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^1) < \mathbb{E}(A_1)$ et $\mathbb{P}(C_1 = \infty)\mathbb{E}(B_1^2) < \mathbb{E}(A_1)$, alors $(W_n^x, n \geq 0)$ est une chaine de Markov récurrente positive au sens de Harris.*

Preuve. En reprenant la même démarche de la démonstration du Théorème 3.2, nous obtenons la récurrence positive pour notre chaine.

REFERENCES

[**1**] F. Charlot, M. Ghidouche, M. Hamami, *Irréductibilité et récurrence au sens de Harris des temps d'attente des GI/G/q*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **43** (1978), 187–203.

[**2**] F. Charlot, J. Pujolle, *Recurrence in single server queues with impatient customers*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **XIV**, 4 (1978), 399–410.

[**3**] F. Charlot, B. Chouaf, A. Guelil, *Sur la stabilité et la récurrence des chaines de Markov et de systèmes de files d'attente*, Ann. Sc. Clermont Ferrand II **93** (1989), 13–47.

[**4**] B. Chouaf, *Equations de récurrence des files d'attente a plusieurs serveurs en hypothèses de stationnarité et semi markovienne*, Thèse de magister. Université de U.S.T.H.B (1981)

[**5**] A. Geriballah, *Sur la stabilité et la récurrence des systèmes de files d'attente avec impatience*, Thèse de magister. Université de U-D-L Sidi-bel-Abbes (1996)

[**6**] E. Numelin, *A conservation property for general GI/G/1 queues with an application to tandem queues*, Adv. Appl. Prob. **11** (1979), 660–672.

[**7**] E. Numelin, *Regeneration in tandem queues*, Adv. App. Prob., **13** (1981), 221–230.

[**8**] D. Revuz, *Markov Chains*, North Holland, 1975.

[**9**] K. Sigman, *Regeneration in tandem queues with multiservers stations*, J. App. Prob. **25** (1988) 391–403.

[**10**] K. Sigman, *Queues as Harris recurrent Markov Chains*, Opns. Res. Soc. Amer. Queueing Systems **3** (1988), 179–198.

(received 16.03.1999)

Département de Mathématiques, Université de Sidi Bel Abbès, BP 89, 22000 Sidi Bel Abbes, Algerie