МАТЕМАТИЧКИ ВЕСНИК
56 (2004), 81–84

UDK 517.977
оригинални научни рад
research paper

CONTRÔLABILITÉ D'UN PROBLÈME NON LINÉAIRE INVERSE DE LA THÉORIE DE TRANSPORT

S. Lahrech

Résumé. Dans cette note, on étudie la contrôlabilité d'un problème non linéaire inverse de la théorie de transport. Comme référence, on se base sur un résultat d'estimation a priori pour certain problème de la théorie de transport (voir [1]).

1. Position du problème

On examine le problème suivant:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(v,\nabla_x)u+\Sigma(x,v,t)u(x,v,t)=\int_V J(x,v',t,v)u(x,v',t)\,dv'+F(x,v,t)+w(u), \tag{1.1}$$

$(x,v,t)\in D=G\times V\times(0,T)$ où $u(x,v,t)$ caractérise la densité de répartition des particules dans l'espace de phase $G\times V$ au moment $t\in]0,T[$, $w\in\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$, $w(0)=0$, $w'(0)=0$. Le coefficient d'absorption $\Sigma(x,v,t)$, l'indicatrice de dissipation $J(x,v',t,v)$ et la fonction de source intérieure représentent le milieu où ce processus se produit.

Supposons par la suite que le domaine G est strictement convexe, borné et la frontière de G est de classe $\mathcal{C}^1$. Posons

$$V=\{\,v: 0<v_0\le|v|\le v_1\,\}$$

où v_0,v_1 sont deux nombres positifs tel que $v_0<v_1$. Soient $\Omega=G\times V$, $F(x,v,t)=f(x,v)g(x,v,t)+h(x,v,t)$. D'aprés [2], si $w\equiv 0$ et si toutes les caractérestiques du milieu Σ,J,F ainsi que le flux sortant, l'état initial du processus et l'état final du processus sont donnés i.e.

$$u(x,v,t)=\mu(x,v,t),\qquad (x,v,t)\in\Gamma_+=\Upsilon_+\times[0,T] \tag{1.2}$$

où $\Upsilon_+=\{\,(x,v)\in\partial G\times V:(v,n_x)>0\,\}$, n_x est la normale extérieure à la frontière ∂G du domaine G au point x,

$$u(x,v,0)=\varphi(x,v),\qquad (x,v)\in\overline{G}\times V \tag{1.3}$$

$$u(x,v,T)=0,\qquad (x,v)\in\overline{G}\times V, \tag{1.4}$$

AMS Subject Classification: 49 N 50
Keywords and phrases: Controlability, inverse problem, transport theory.

alors $\exists!(u,f)\in\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et vérifiant (1.1)–(1.4). Cela signifie qu'elle existe une commande $f\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ qui permet de transformer le système aux paramètres distribués (1.1)–(1.4) de l'état initial $\varphi(x,v)$ à l'état final $\Psi(x,v)=0$ en un temps $t=T$.

On suppose maintenant que w est une fonction quelconque de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tel que $w(0)=w'(0)=0$ et on étudie la contrôlabilité du système (1.1)–(1.4).

Les espaces fonctionnels qu'on va utiliser on peut trouver dans l'article [1].

Posons

$$d=\sup_{(x,v)\in\overline{G}\times V}\alpha(x,v)$$

et supposons que $d<T$. Alors d'aprés [2] $\alpha\in\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})$ et $(v,\nabla)\alpha=-1$.

2. Contrôlabilité

Examinons maintenant le problème (1.1)–(1.4) où

$$J\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}\times V),\quad \mu\in\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+),\quad \varphi\in\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega}),\quad \Sigma\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),$$
$$h\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),\quad g\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),\quad 0<g_0\le g(x,v,0),\ \forall(x,v)\in\overline{\Omega},\qquad \varphi/\Upsilon_+=0.$$

Alors on a le résultat suivant de contrôlabilité du système (1.1)–(1.4):

THEOREM 2.1. *$\exists\delta>0$, $\exists\varepsilon>0$, $\exists a>0$ tel que si*

$$d<a,\qquad \|\mu\|_{\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+)}+\|\varphi\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}+\|h\|_{\mathcal{C}^1_t(\overline{D})}<\delta$$

et si les conditions suivantes:

$$\varphi(x,v)=\mu(x,v,0),$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial t}(x,v,T)=h(x,v,T),$$
$$\frac{\partial\mu}{\partial t}(x,v,0)+(v,\nabla)\varphi+\Sigma(x,v,0)\varphi(x,v)-\int_V J(x,v',0,v)\varphi(x,v')dv'-h(x,v,0)=0,$$
$$\mu(x,v,T)=0,\qquad (x,v)\in\Upsilon_+,$$

sont réalisées, alors

$$\exists!(u,f)\in B_\varepsilon^{(\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}^1_t(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})})}(0)$$

solution du problème (1.1)–(1.4). De plus, $f/\Upsilon_+=0$.

Preuve. Désignons par $(\mathcal{S}')$ le problème linéaire associée au problème (1.1)–(1.4), i.e $(\mathcal{S}')$ est équivalent au problème (1.1)–(1.4) mais avec la condition $w\equiv 0$. Posons

$$S=\{\,(u,f)\in\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega}):\exists!h_1\in\mathcal{C}^1_t(\overline{D}),\ \exists!\mu_1\in\mathcal{C}^1_t(\Gamma_+),$$
$$\exists!\varphi_1\in\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})\text{ tel que }(u,f)\text{ soit la solution du problème}(\mathcal{S}')$$
$$\text{associée à }(h_1,\mu_1,\varphi_1)\in Y,\ f/\Upsilon_+=0,\ \varphi_1/\Upsilon_+=0\,\},$$

muni de la norme

$$\|(u,f)\|_S = \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})},$$

où

$$\begin{aligned} Y = \{\, (h,\mu,\varphi) \in \mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}_t^1(\Gamma_+) \times \mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega}) :\ & \frac{\partial \mu}{\partial t}(x,v,T) = h(x,v,T), \\ \mu(x,v,0) = \varphi(x,v),\ \mu(x,v,T) = 0,\ & \frac{\partial \mu}{\partial t}(x,v,0) + (v,\nabla)\varphi + \Sigma(x,v,0)\varphi(x,v) \\ & - \int_V J(x,v',0,v)\varphi(x,v')dv' - h(x,v,0) = 0,\ \forall (x,v) \in \Upsilon_+ \,\}. \end{aligned}$$

D'aprés [1], la solution (u,f) du problème $(\mathcal{S})'$ dépend continûment de (h_1,μ_1,φ_1). D'où

$$\exists c > 0,\ \forall (u,f) \in S\ \|(u,f)\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})} \le c\|(u,f)\|_S.$$

Soit $B_l(0)$ le l voisinage de 0 dans $Y_1 \times S$, où $Y_1 = \{\, (h_1,\mu_1,\varphi_1) \in Y :\ \varphi_1/\Upsilon_+ = 0 \,\}$, muni de la norme

$$\|(h_1,\mu_1,\varphi_1)\|_{Y_1} = \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}.$$

Soit $H \colon B_l(0) \to Y_1$ l'opérateur défini par:

$$\begin{aligned} H(h_1,\mu_1,\varphi_1,u,f) = (\frac{\partial u}{\partial t} + (v,\nabla)u + \Sigma u - \int_V J(x,v',t,v)u(x,v',t)dv' \\ - fg - h_1 - w(u), u/\Gamma_+ - \mu_1, u(x,v,0) - \varphi_1(x,v)). \end{aligned}$$

Il est clair que $H(0) = 0$ et H est continu au point 0.

D'autre part, on vérifie aisement que

$$H'_{(u,f)}(h_1,\mu_1,\varphi_1,u,f)(u_0,f_0)$$

existe en tout point $(u_0,f_0) \in S$ et vaut

$$\begin{aligned} (\frac{\partial u_0}{\partial t} + (v,\nabla)u_0 + \Sigma u_0 - \int_V J(x,v',t,v)u_0(x,v',t)\,dv' - f_0 g - w'(u)u_0, \\ u_0/\Gamma_+, u_0(x,v,0)) \end{aligned}$$

et $H'_{(u,f)}$ est continu au point 0.

Montrons maintenat que $[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}$ existe et qu'il est borné. On sait déja que $\forall (h_1,\mu_1,\varphi_1) \in Y_1\ \exists! (u_0,f_0) \in \mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D}) \times \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ solution du problème $(\mathcal{S})'$. Par conséquent, $[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}$ existe. D'autre part, $\forall (h_1,\mu_1,\varphi_1) \in Y_1$

$$\begin{aligned} \|[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}(h_1,\mu_1,\varphi_1)\|_S &= \|(u_0,f_0)\|_S \\ &= \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})} = \|(h_1,\mu_1,\varphi_1)\|_{Y_1}. \end{aligned}$$

D'où $[H'_{(u,f)}(0)]^{-1}$ est un opérateur borné de Y_1 vers S.

D'aprés le théorème de la fonction implicite, on déduit que

$$\exists\delta > 0\ \exists\varepsilon > 0\ \forall(h_1,\mu_1,\varphi_1) \in B_\delta^{Y_1}(0)\ \exists!(u_0,f_0) \in B_\varepsilon^S(0)$$

tel que $H(h_1,\mu_1,\varphi_1,u_0,f_0) = 0$. Soient $0 < \eta < \varepsilon,\ \alpha_1 > 0$ tels que

$$\forall s:\ 0 < |s| < \alpha_1\ |w(s)| < \frac{\eta}{8},\ |w'(s)| < \sqrt{\frac{\eta}{8}}.$$

On peut supposer $\alpha_1 < \sqrt{\eta/8},\ \delta < \varepsilon/8$. Alors

$$\exists\xi < \min(\frac{\alpha_1}{c},\varepsilon)\ \forall(h_1,\mu_1,\varphi_1) \in B_\delta^{Y_1}(0)\ \exists!(u_0,f_0) \in B_\xi^S(0) \text{ tel que}$$

$$H(h_1,\mu_1,\varphi_1,u_0,f_0) = 0 \text{ et } \|(u_0,f_0)\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})} \le c\|(u_0,f_0)\|_S \le c\xi < \alpha_1.$$

D'où

$$\exists!(u_0,f_0) \in B_{\alpha_1}^{(\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})})}(0)$$

solution du (1.1)–(1.4). De plus, $f_0/\Upsilon_+ = 0$. En effet:

Soit $(u,f) \in B_{\alpha_1}^{(\mathcal{C}^1_{t,(v,\nabla)}(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega}),\|\cdot\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})\times\mathcal{C}(\overline{\Omega})})}(0)$ tel que (u,f) soit solution du problème (1.1)–(1.4) associée à $(h_1,\mu 1,\varphi_1)$. Alors $(u,f) \in S$ et

$$\|(u,f)\|_S = \|w(u) + h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|(u,f)\|_S &\le \|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})} + \|(u,f)\|_S \\
&\le \|w(u)\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}\right] \\
&\le \frac{\eta}{8} + \|w'(u)\|_{\mathcal{C}(\overline{D})}\|\frac{\partial u}{\partial t}\|_{\mathcal{C}(\overline{D})} \\
&\quad + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}\right] \\
&\le \frac{\eta}{8} + \sqrt{\frac{\eta}{8}}\sqrt{\frac{\eta}{8}} + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}\right] \\
&\le \frac{\eta}{4} + 2\left[\|h_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\overline{D})} + \|\mu_1\|_{\mathcal{C}_t^1(\Gamma_+)} + \|\varphi_1\|_{\mathcal{C}^1_{(v,\nabla)}(\overline{\Omega})}\right] \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent $(u,f) = (u_0,f_0)$. Ainsi on achéve la démonstration. ■

REFERENCES

[**1**] Lahrech, S., *Estimation a priori pour un problème linéaire inverse de la théorie de transport*, Mat. Vesnik **56** (2004), 57–61.

[**2**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., Differents. uravn. **21** (1985), 109–119.

[**3**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., Differents. uravn. **21** (1985), 870–885.

[**4**] Prilepko, A. I., Ivankov, A. L., *Obratnaya zadacha dlya odnogo uravneniya perenosa*, Izv. AN SSSR **276** (1984), 555–559.

[**5**] Yosida, K., *Functional Analysis*, Springer, 1978.

(received 04.02.2003)

Université Mohamed I, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques et Informatique, Oujda, Maroc

E-mail: `lahrech@sciences.univ-oujda.ac.ma`