PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 28 (42), 1980, pp. 83–87

THÉORÈMES DE POINT FIXE DANS LES CÔNES BIEN BASÉS DANS LES ESPACES DE FRÉCHET. (II)

Isac, G.

Soit $E(\tau)$ un espace de Fréchet qui a la propriété que la topologie τ est définie par une famille suffisante dénombrable de semi-normes $\{|\ |_n\}_{n\in N}$.

On utilise les notions et la terminologie de l'ouvrage [1].

Théorème 3. *Soit $K \subset E$ un cône convexe, fermé bien basé et $F \in E'$ une fonctionnelle uniformément positive sur K.*

On suppose que $f: K \to K$ est un opérateur compact et continu qui vérifie les hypothèses suivantes.

1° Il existe $r > 0$ et g un opérateur compact et continue,

$g: \{x \in K \mid F(x) = r\} \to K$, tel que:

$\inf\{F(g(x)) \mid x \in K, F(x) = r\} > 0$ et l'équation:

$y = f(y) + \lambda g(y)$; $0 < \lambda < +\infty$ n'a aucune solution

$x \in K_r = \{x \in K \mid F(x) = r\}$.

2° Il existe $R > r$ tel que l'équation:

$$x = \lambda \cdot f(x);\ \ 0 < \lambda < 1$$

n'a aucune solution $x \in K_R = \{x \in K \mid F(x) = R\}$.

Alors, f a un point fixe $x_* \in K$ tel que: $r \leq F(x_*) \leq R$.

Démonstration. On considère l'ensemble:

$$D^* = \left\{x \in K \,\middle|\, \frac{r}{2} \leq F(x) \leq R\right\}$$

et soit:

$$\beta = \inf_{F(x)=r} F(g(x)).$$

Soit:

$$M \geq F(f(z)) \colon \forall z \in K_r = \{z \in K \mid F(z) = r\}.$$

Le nombre M il existe parce que d'après la proposition 1. [1] L'ensemble K_r est borné, g est compact et F est continue.

On prend: $\alpha > 0$ tel que $\alpha \geq \frac{M+r}{\beta}$ et on considère l'opérateur: $h \colon D^* \to K$ donné par:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{r} \cdot f\left(\dfrac{r \cdot x}{F(x)}\right) + 2\alpha \dfrac{F(x)}{r}\left(\dfrac{r - F(x)}{r}\right) \cdot g\left(\dfrac{r \cdot x}{F(x)}\right) & \text{si: } \frac{r}{2} \leq F(x) \leq r \\ f(x) & \text{si: } r \leq F(x) \leq R \end{cases}$$

L'opérateur h est compact et continu.

On suppose qu'il existe

$$x \in K_{\frac{r}{2}} = \left\{x \in K \mid F(x) = \frac{r}{2}\right\}$$

tel que:

$$(\beta_1) \colon h(x) = \lambda x \text{ où } \lambda \geq 0.$$

Soit $z = \frac{r \cdot x}{F(x)}$, alors d'aprés un calcul élémentaire de la relation (β_1) on obtient:

$$f(z) + \alpha \cdot g(z) = \lambda \cdot z.$$

Si on applique la functionnelle F et si on utilise le fait que $F(f(z)) \geq 0$ on obtient:

$$(\beta_2) \colon \lambda \cdot F(z) = F(f(z)) + \alpha F(g(x)) \geq \alpha F(g(z)) - F(f(z)).$$

Comme $F(z) = r$ de la relation (β_2) on obtient:

$$\lambda r \geq \alpha \cdot \beta - M \geq r, \text{ donc } \lambda \geq 1.$$

Il résulte ainsi que l'opérateur h vérifie l'hypothèse (ii) du théorème 1.

L'opérateur h vérifie aussi l'hypothèse (i) du même théorème, parce que ça c'est une conséquence de la définition de h et de l'hypothése (2).

Soit $x \in K_{\frac{r}{2}} = \{x \in K \mid F(x) = \frac{r}{2}\}$; on a dans ce cas:

$$\begin{aligned} F(h(x)) &= \frac{F(x)}{r} \cdot F\left(f\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) + 2\alpha \frac{f(x)}{r}\left(\frac{r - F(x)}{r}\right) \cdot F\left(g\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} F\left(f\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) + \frac{1}{2}\alpha F\left(g\left(\frac{rx}{F(x)}\right)\right) \geq \frac{1}{2}\alpha\beta - \frac{1}{2}M \geq \frac{1}{2}r > 0. \end{aligned}$$

Comme cette relation est vraie pour tout $x \in K_{\frac{r}{2}}$ il résulte que:

$$\inf\{F(h(x)) \mid x \in K_{\frac{r}{2}}\} > 0$$

et de la remarque du [1] on a: $0 \notin \overline{h(K_{\frac{r}{2}})}$.

Parce que les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées on obtient que h a un point fixe $x_* \in D^*$.

Si on suppose que: $\frac{1}{2}r \leq F(x_*) < r$ on obtient:

$$z_0 = f(z_0) + 2\alpha\left(\frac{r - F(x_*)}{r}\right) \cdot g(z_0) \text{ oú: } z_0 = \frac{rx_*}{F(x_*)}$$

ce qui contredit l'hypothèse (1).

On a donc $r \leq F(x_*) \leq R$ et le théorème est démontré.

Théorème 4. *Soit $K \subset E$ un cône convexe, fermé bien basé et $F \in E'$ une fonctionnelle uniformément positive sur K.*

On suppose que $f: K \to K$ est un opérateur compact et continu qui vérifie les hypothèses suivantes.

1° Il existe $r > 0$ et g un opérateur compact et continu:
$g: \{x \in K \mid F(x) = r\} \to K.$ tel que:
$F(g(x)) < r$ si $x \in K_r = \{x \in K \mid F(x) = r\}$ et
$(x \in K)\&(x = \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x);\, 0 < \lambda < 1) \Rightarrow F(x) \neq r.$

2° Il existe $R > r$ et h un opérateur compact et continu
$h: \{x \in K \mid F(x) = R\} \to K$ tel que:
$\inf\{F(h(x)) \mid x \in K,\, F(x) = R\} > 0$ et
$(z \in K)\&(z = f(z) + \lambda h(z);\, 0 < \lambda < +\infty) \Rightarrow F(z) \neq R.$

Alors f a un point fixe $x_0 \in K$ tel que: $r \leq F(x_0) \leq R$.

Démonstration. *Soit:*

$$M \geq \sup\{F(f(x)) \mid x \in K,\ F(x) = R\},$$
$$\gamma = \inf\{F(h(x)) \mid x \in K,\ F(x) = R\}.$$

On prend:

$$\beta \in [0, r] \text{ et } \alpha \geq \frac{R + M}{\gamma}.$$

On considère l'opérateur,

$$k: \{x \in K \mid r - \beta \leq F(x)\} \to K \text{ donné par:}$$

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{F(x)}{r}\left(1+\dfrac{F(x)-r}{\beta}\right)\cdot f\left(\dfrac{rx}{F(x)}\right)+\dfrac{F(x)}{r}\left(\dfrac{r-F(x)}{\beta}\right)\cdot g\left(\dfrac{rx}{F(x)}\right) \\ \text{si: } r-\beta \leq F(x) \leq r \\ f(x) \ \text{ si: } r \leq F(x) \leq R \\ \dfrac{F(x)}{R}\cdot f\left(\dfrac{Rx}{F(x)}\right)+\dfrac{F(x)}{R}\left(\dfrac{F(x)-R}{R}\right)\cdot\alpha\cdot h\left(\dfrac{R}{F(x)}\cdot x\right) \ \text{ si: } R \leq F(x). \end{cases}$$

L'opérateur k est continu.

On démontre que l'opérateur k vérifie les hypothéses du théorème 2. [1] sur l'ensemble: $\{x \in K \mid r-\beta \leq F(x) \leq n \cdot R\}$ où le nombre n sera déterminé.

Soit $x \in K$ tel que $F(x) = r-\beta$. Si on suppose que: $k(x) = \lambda x$ où $\lambda > 0$ alors,

$$(\beta_3)\colon \lambda x = \frac{F(x)}{r}\cdot g\left(\frac{rx}{F(x)}\right) \Rightarrow \lambda\cdot\frac{rx}{F(x)} = g\left(\frac{rx}{F(x)}\right).$$

Comme $F\left(\frac{rx}{(x)}\right) = r$, si on applique la fontionnelle F à la relation (β_3), de l'hypothèse (1) on obtient: $\lambda r < r$ c'est-à-dire $\lambda < 1$.

Donc, l'hypothèse (ii) du théorème 2 est vérifiée sur l'ensemble:

$$\{x \in K \mid r-\beta \leq F(x) \leq nR\}$$

pour tout $n \in N$. On suppose maintenant que: $F(x) > R$.

On obtient dans ce cas:

$$\begin{aligned} F(k(x)) = \frac{F(x)}{R}\left[F\left(f\left(\frac{Rx}{F(x)}\right)\right)+\frac{F(x)-R}{R}\cdot\alpha\cdot F\left(h\left(\frac{R\cdot x}{F(x)}\right)\right)\right] \geq \\ \geq \frac{F(x)}{R}\left[\frac{F(x)-R}{R}\cdot\gamma\cdot\alpha-M\right]. \end{aligned}$$

Si $n_0 \in N$, $n_0 > 1$ est fixé et suffisamment grand et si on prend:

$$K_{n_0R} = \{x \in K \mid F(x) = n_0R\}, \ \text{alors,} \ F(k(x)) \geq n_0[(n_0-1)\cdot\alpha\cdot\gamma-M] > 0$$

d'où on obtient que:

$$\inf\{F(k(x)) \mid x \in K, \ F(x) = n_0\cdot R\} > 0$$

et donc $0 \notin \overline{k(K_{n_0}R)}$.

On suppose donc, $k(x) = \lambda x$ où $\lambda > 0$ et $F(x) = n_0R$. Si on met: $z = \frac{Rx}{F(x)}$ on obtient:

$$\lambda z = f(z)+\left(\frac{F(x)-R}{R}\right)\cdot\alpha\cdot h(z) = f(z)+(n_0-1)\alpha h(z)$$

et si on applique la fontionnelle F il résulte:

$$\lambda \cdot F(z) = (n_0 - 1)\alpha F(h(z)) + F(f(z)) \geq (n_0 - 1)\alpha\gamma - M$$

parce que F est positive, et enfin, $\lambda \cdot R \geq (n_0 - 1)\alpha\gamma - M$ d'où:

$$\lambda \geq \frac{1}{R}[(n_0 - 1)\alpha\gamma - M].$$

La définition de $\alpha \Rightarrow$

$$\lambda \geq \frac{1}{R}\left[\frac{R+M}{\gamma} \cdot (n_0 - 1)\gamma - M\right] = \frac{1}{R}[(R+M)(n_0 - 1) - M] \geq 1.$$

Donc, k vérifie l'hypothèse (i) du théorème 2.

Comme l'opérateur k est compact sur l'ensemble

$$\{x \in K \mid r - \beta \leq F(x) \leq n_0 R\}.$$

D'après le théorème 2 on obtient que l'opérateur k a un point fixe x_0 dans l'ensemble:

$$\{x \in K \mid r - \beta \leq F(x) \leq n_0 R\}.$$

Si $R < F(x_0) \leq n_0 R$ et si on met: $z_0 = \frac{Rx_0}{F(x_0)}$ on obtient:

$$z_0 = f(z_0) + \frac{F(x_0) - R}{R} \cdot \alpha \cdot h(z_0)$$

ce qui contredit l'hypothèse 2°).

Si on suppose: $r - \beta \leq F(x_0) < r$ et si on met: $z_0 = \frac{rx_0}{F(x_0)}$ on obtient:

$$z_0 = \left(1 + \frac{F(x_0) - r}{\beta}\right) \cdot f(z_0) + \frac{r - F(x_0)}{\beta} \cdot g(z_0)$$

ce qui contredit l'hypothèse 1°).

Il reste alors que $r \leq F(x_0)) \leq R$ ce qui démontre le théorème.

REFERENCES

[1] Isac, G., *Théorèmes de point fixe dans les cônes bien basés dans les espaces de Fréchet.* (I).

Départment de mathématiques
Collège militaire royal
Saint-Jean, Quebec, J0J 1R0
Canada