PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 29 (43), 1981, pp. 263–268

SOUS-GROUPES DISTINGUÉS DU GROUPE UNITAIRE ET DU GROUPE GÉNÉRAL LINÉAIRE D'UN ESPACE DE HILBERT QUATERNIONIEN

Aleksandar Torgašev

1. Résultat

Dans l'article [6], Pierre de la Harpe a consideré des sous-groupes distingués (fermés ou non-fermés ou non-fermés) du groupe générale linéaire d'un espace de Hilbert complexe et séparable, et démontre le résultat principal suivant:

Chaque sous-groupe distingué non-trivial et non-central G du groupe $GL(H)$ est pris en sandwich entre deux groupe distingués $SL(H, C_0)$ et $GE(H, C)$, c'est à dire

$$SL(H, C_0) \subseteq G \subseteq GE(H, C) \tag{$*$}$$ [1]

Dans cette note, etant inspirés par une question de Pierre de la Harpe, nous considérons ce probléme dans les espaces de Hilbert quaternioniens, et démontrons un résultat analogue dans ce cas.

Nos preuves représentent les modifications des méthodes utilisés dans l'article [6] pour les espaces complexes ou réels; en outre, nous ne pouvons pas simplement appliquer les résultats des espaces complexes ou réels.

Nous utilisons des notations suivants:

$\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$ – les corps des nombres réels, complexes et quaternioniens, respectivement ($\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{Q}; i, j, k$ – des unités quaternioninnes imagnaires);

$\mathbf{F}^* = \mathbf{F}\ \{0\}$, pour $\mathbf{F} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$;

$L(n, \mathbf{F})$ – l'ensemble de tous les matrices carrées avec les élements du corps $\mathbf{F}(\mathbf{F} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q})$, $U(n; \mathbf{F})$ – l'ensemble de tous les matrices unataires $\pi \in L(n; \mathbf{F})$;

$\tilde{H}$ – un espace de Hilbert quaternionien séparable et de dimension infinie, avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

$L(\tilde{H})$ – l'algébre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace $\tilde{H}$;

---

[1]Ce résultat est un analogue direct du fameux "Sandwich-theorem" de Calkin puor les idéaux bilatéraux de l'algébre $L(H)$.

H^s – l'image simplectique de l'espace $\tilde{H}$, avec le produit scalaire complexe $[\cdot,\cdot] = \text{p.c. } \langle\cdot,\cdot\rangle$;

A^s – l'image simplectique dans $L(H^s)$ d'un opérateur $A \in L(\tilde{H})$ et

$$L^s(H^s) = \{A^s \mid A \in L(\tilde{H})\};$$

évidemment,

$$L^s(H^s) = \{B \in L(H^s) \mid (-J^s)BJ^s = B\},$$
$$L(H^s) = L^s(H^s) + iL^s(H^s),$$

oú $J^s = (jI)^s$ est un anticonjugaison dans H^s;

$GL(\tilde{H})$ – le groupe de tous les opérateurs invertibles de $L(\tilde{H})$, et $U(\tilde{H})$ – le group be tous les opérateurs unitaires dans $\tilde{H}$;

$C(\tilde{H})$ et $C_0(\tilde{H})$ – les idéaux des opérateurs compact et des opérateurs de dimension finie dans $\tilde{H}$.

Comme dans l'article [6], nous considérons les sous-groupes suivants de $GL(\tilde{H})$ qui sont tous distingués:

(1°) $GE(\tilde{H},\tilde{C}) = \{A \in GL(\tilde{H}) \mid A - rI \in C(\tilde{H}), \text{pour un } r \in \mathbf{R}^*\}$

(2°} $GL(\tilde{H},\tilde{C}) = \{A \in GL(\tilde{H}) \mid A - I \in C(\tilde{H})\}$

(3°) $GL(\tilde{H},\tilde{C}_0) = \{A \in GL(\tilde{H}) \mid A - I \in C_0(\tilde{H})\}$

(4°) $SL(\tilde{H},\tilde{C}_0 = \{A \in GL(\tilde{H},\tilde{C}_0) \mid \det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A^s) = 1\}$

(5°) $R^* = \{rI \mid r \in \mathbf{R}^*\}.$

De même façon, nous avons les sous-groupes distinqués suivant du groupe unitaire général $U(\tilde{H})$:

$$\begin{aligned} UE(\tilde{H},\tilde{C}) &= GE(\tilde{H},\tilde{C}) \cap U(\tilde{H}),\\ U(\tilde{H},\tilde{C}) &= GL(\tilde{H},\tilde{C}) \cap U(\tilde{H}),\\ U(\tilde{H},\tilde{C}_0) &= GL(\tilde{H},\tilde{C}_0) \cap U(\tilde{H}),\\ SU(\tilde{H},\tilde{C}_0) &= SL(\tilde{H},\tilde{C}_0) \cap U(\tilde{H}),\\ R^1 &= R^* \cap U(\tilde{H}) = \{I,-I\}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons énoncer le shéorème principale, le "sandwich-theorem" pour les sous-groupes distingués des groupes $U(\tilde{H})$ et $GL(\tilde{H})$.

THEOREME. (*i*) *Soit $\tilde{U}$ un sous-groupe distinqué non-trivial et non-central de $U(\tilde{H})$.*
Alors $SU(\tilde{H},\tilde{C}_0) \subseteq \tilde{U} \subseteq UE(\tilde{H},\tilde{C})$.

(*ii*) *Soit $\tilde{G}$ un sous-groupe distingué non-trivial et non-central de $GL(\tilde{H})$. Alors: $SL(\tilde{H},\tilde{C}_0) \subseteq \tilde{G} \subseteq GE(\tilde{H},\tilde{C})$.*

L'auteur remércie beaucoup á prof. dr. Pierre de la Harpe qui a lui proposé ce probléme et a fait plusieurs améliorations dans cete note.

Il remércie aussi le fond de la recherches scientifiques de la Rép. Soc. de Serbie, qui a supporté ce travail.

3. Démonstration

Comme dans le cas complexe, il convient de diviser la démonstration en deux parts, formulés dans deux propositions.

Proposition 1. *(i) Soit $\tilde{U}$ un sous-groupe distingué de $U(\tilde{H})$. Alors: $\tilde{U} = U(\tilde{H})$, ou bien $\tilde{U} \subseteq UE(\tilde{H}, \tilde{C})$.*

(ii) Soit $\tilde{G}$ un sous-groupe dinstingué de $GL(\tilde{H})$. Alors: $\tilde{G} = GL(\tilde{H})$ ou bien $\tilde{G} \subseteq GE(\tilde{H}, \tilde{C})$.

Preuve. (i) Nous démontrons tout d'abord l'analogue du Lemme 1 de P. De la Harpe [6] (p. 243).

Nous rémarquouns d'abord que presque tous les résultats de l'article [2] de A. Brown et C. Pearcy s'étendent au cas quaternionien.[2]

Dénotant

$$(\tilde{F}) = L(\tilde{H}) \backslash \{rI + C(H) \mid r \in \mathbf{R}\},$$

on peut obtenir spécialement les généralisations des résultats du Lemme 3.3, du Théoréme 2 et bu Corollaire 3.4 de [2].

Puisque la structure quaternionienne de l'espace $\tilde{H}^p = \tilde{H} \bigoplus \cdots \bigoplus \tilde{H} (p \in N)$ est introduit par

$$J_p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Jx_1 \\ \vdots \\ Jx_p \end{pmatrix},$$

nous obtenons faciement que dans le Théoréme 2 ([2], p. 119) les opérateurs $A_{11}, \ldots, A_{32} \in L(\tilde{H})$, et dans le Corollaire 3.4 les opérateurs $B, C, V \in L(\tilde{H})$.

Utilisant ces résultats, tous les détails d'échelon 1 du Lemme 1 dans [6] réstent identiques dans notre cas (avec des scalaires quaternioniens).

Dans l'échelon 2 du Lemme 1, nous obtenons une matrice quaternionienne unitaire

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} a_0 & -\bar{q} \\ q & a_0 \end{bmatrix}$$

où $a_0 = 2|\alpha_n|^2 - 1 \in \mathbf{R}$ et $q = -2\bar{\alpha}_n \beta_n \in \mathbf{Q}(\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{Q}; |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1, |\alpha_n| \leq \tau < 1)$; donc, ${a_0}^2 + |q|^2 + 1$.

Maintenant, rappelons que le spectre $\sigma(\tilde{\pi})$ d'une matrice $\tilde{\pi} \in L(p; \mathbf{Q})$ est défini par

$$\sigma(\tilde{\pi}) = \{\lambda \in \mathbf{Q} \mid \bar{\pi} v_p = v_p \lambda, \quad \text{avec} \quad v \in \mathbf{Q}^p \backslash \{0\}\}.$$

[2]Pour les détails, on peut consulter l'article [9], où les résultats principaux concernants des commutateurs dues à Brown et pearcy sont généralisées aux espaces de Hilbert quaternioniens.

Il posséde la propriété de "rotabilite" au sens que $\lambda \in \sigma(\tilde{\pi})$ implique $\alpha\lambda\alpha^{-1} \in \sigma(\tilde{\pi})$ (pour tout $\alpha \in \mathbf{Q}^*$), et par conséquent

$$\sigma(\tilde{\pi}) = \cup_{\alpha\in\mathbf{Q}^*} \alpha\sigma_i(\tilde{\pi})\alpha^{-1},$$

où $\sigma_i(\tilde{\pi}) = \sigma(\tilde{\pi}) \cap \mathbf{C}$.

Dénotant par π^s l'image simplictique de la matrice $\tilde{\pi} \in L(2;\mathbf{Q})$, c'est à dire

$$\pi^s = \begin{bmatrix} \pi_1 & -\bar{\pi}_2 \\ \pi_2 & \pi_1 \end{bmatrix} \in L(4;C)$$

où $\tilde{\pi} = \pi_1 + j\pi_2 \in L(2;C) + jL(2;C)$, nous avons $\sigma_i(\tilde{\pi}) = \sigma(\pi^s)$ et par définition, det $(\tilde{\pi}) = \det(\pi^s)$.

Si $q = z_1 + jz_2 \quad (z_1, z_2 \in C; {a_0}^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1)$, nous obtenons

$$(\tilde{B}_n)^s = \left\{ \begin{matrix} a_0 & -\bar{z}_1 & 0 & \bar{z}_2 \\ z_1 & a_0 & -\bar{z}_2 & 0 \\ 0 & z_2 & a_0 & -z_1 \\ z_2 & 0 & \bar{z}_1 & a_0 \end{matrix} \right\}$$

et alors

$$\det((\tilde{B}_n)^s - \lambda) = ((a_0 - \lambda)^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2)^2 (\lambda \in C).$$

Denc, la matrice $B_n \in U(2;\mathbf{Q})$ a deux valeurs propres complxes

$$\lambda_1 = \gamma_n + i\delta_n, \quad \lambda_2 = \gamma_n - i\delta_n$$

d'ordre deux, où γ_n, δ_n sont définis comme dans [6] (p. 244).

En vertue des théorèmes 7 et 8 de H.C. Lee [7], il éxiste alors une matrice $\tilde{V}_n \in U(2;\mathbf{Q})$ qui réduit la matrice $\tilde{B}_n$ à la forme diagonal:

$$\tilde{V}_n \tilde{B}_n \tilde{V}_n^* = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2).$$ [3]

Le réste de la preuve est alors identique à celui de l'article [6].

La Lemme 2 et la lemme 3 réstent en vigueur aussi, où dans la Lemme 2 nous avons le groupe unitaire $SU(2:\mathbf{Q})$ ou bien son image simplectique $SpU(4;\mathbf{C})$.

Pour finir la démonstration de (i), il réste seulement d'utiliser le théorème de Halmos-Kakutani pour les espacec quaternioniens.

(ii) Comme dans le cas réel, les arguments principaux de Proposition 6 dans [6] (p. 253 et 254) réstent valables pour le cas quaternionien aussi.

Le fait que l'idéal $C(\tilde{H})$ est un idéal absolument maximal de $L(\tilde{H})$ est la Proposition 1. C de [5] (p. II. 9).

Le fait que $GL(\tilde{H})$ est égal à son groupe des commutateurs s'étend au cas quaternionien.

---

[3] Il existe aussi une matrice $\tilde{W} \in U(2;\mathbf{Q})$ telle que $\tilde{W}_n \tilde{B}_n \tilde{W}_n^* = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$, mais pour garder l'analogie aveec l'échelon 2 du Lemme 1 de [6], nous préférons la forma mentionée.

Ensuite, le dérnier fait de connéxité du groupe $GL(\tilde{H})$ dans la topologie normique réste valaable aussi, c.q.f.d. $\square$

PROPOSITION 2. (i) *Chaque sous-groupe distingué non-central* $\tilde{U}$ *de* $U(\tilde{H})$ *continent le sous-groupe* $SU(\tilde{H}, \tilde{C}_0)$.

(ii) *Chague sous-groupe distinué non-central* $\tilde{G}$ *de* $GL(\tilde{H})$ *contient le sous-groupe* $SL(\tilde{H}, \tilde{C})$.

– Les preuvees sont par ses idées et sa téchnique identiques à celles de [6] (Proposition 2, Lemme 5 – sans changement, et Proposition 3).

Dans la démonstration, on utilise le théorème de Schur pour les groupes $SU(\tilde{H}, \tilde{C}_0), SL(\tilde{H}, \tilde{C}_0)$, et les propriétés des groupes classiques $SU(n; \mathbf{Q}), SL(n; \mathbf{Q})$ ou de ses images simplictiques $SpU(2n, \mathbf{C})$ et $SU^*(2n, \mathbf{C})$, cc.q.f. $\square$

REFERENCES

[1] E. Artin, *Algébre géomètrique*, Gauthiers-Villars, Paris – 1962 (traduction en russe: "Nauka", Moskva, 1969).

[2] A. Brown et C. Pearcy, *Structure of commutators of operators*, Ann. of Math. – 82 (1965), 112–127.

[3] J.W. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces*, Ann of Math. – 42 (1941), 839–873.

[4] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, New York,1967.

[5] P. De La Harpe, *Classical Banach-Lie algebras and Banach-lie groups of operators in Hilbert space*, Springer Lecture Notes in Math. (no. 285), Springer, Berlin, 1972.

[6] P. De La Harpe, *Sous-groupes distingués du groupe unitaire et du groupe général linéaire d'un espace de Hilbert*, Comment. Math. Helvetici – 51 (1976), 241–257.

[7] H.C. Lee, *Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients*, Proc. Royal Irish Acad. (sect. A) – 52 (1949), 253–260.

[8] N.A. Wiegmann, *Some theorems on matrices with quaternion elements*, Canad. Joural of Math. – 7 (1955), 191–201.

[9] A. Torgašev, *Commutators on Wachs (quaternionic Hilbert spaces)*, à paraitre dans Math. Balcanica – 7 (1977) (Belgrade).

Institut de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
11000 Belgrade, Studentski trg 16-a.