PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 34 (48), 1983, pp. 55-60

QUASI-REKURRENTE BEWEGUNGEN UND MINIMALE MENGEN DYNAMISCHER SYSTEME

Chaslav Djaja

Zusammenfassung. In dieser Abhandlung werden, auf Grund der Eigenschaft der quasi-rekurrenten ([**1**]), der quasi-fastrekurrenten ([**3**]) Bewegungen dynamischer Systeme (R, I, f), wobei R ein metrischer Raum, I die Menge der reellen Zahlen, und f die Abbildung des topologischen Produktes $R \times I$ auf R ist, einige Beziehungen zwischen den minimalen Mengen ([**7**], S. 64) und den erwähnten Klassen der Bewegungen gegeben. Ausserdem werden einige Sätze angeführt die manche Eigenschaften der quasi-rekurrenten und quasi-fastrekurrenten Bewegungen zeigen. Wir bezeichnen mit Φ_p die Menge der φ-Grenzpunkte ([**5, 4**]); die Bezeichnungen der einzelnen Klassen der Bewegungen werden wir später angeben. Wir bezeichnen wie üblich, die Trajektorie der Bewegung mit $f(p, I)$, die positive Halbtrajektorie mit $f(p, I^+)$ und negative mit $f(p, I^-)$.

SATZ 1. *Ist eine positiv quasi-rekurrente Bewegung (weiterhin werden wir kurz mit QR^+ solche Bewegung bezeichnen) in einem vollständigen Raume gelegen, dann ist $f(p, I) \cup \Phi_p$ eine kompakte Menge.*

Beweis. Nehmen wir beliebiges $\varepsilon > 0$. Auf Grund der positiven Quasi-rekurrenz lassen sich Zahlen $L(\varepsilon/2) \geq 0$ und $K(\varepsilon/2) > 0$, die eine quasi-relativ dichte (bezeichnen wir kurz mit QRD) Menge $\{\tau_n\}$ auf I^+ ([**5, 4**]) mit

$$L + K\binom{n}{2} \leq \tau_n \leq L + K\binom{n+1}{2}, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

bestimmen, finden so, dass

$$f(p, I) \subseteq S\left[f\left((p; L + K\binom{n}{2}, L + K\binom{n+1}{2}\right)\right), \varepsilon/2\right], \ (n = 1, 2, \dots), \tag{1}$$

ist. Wir bezeichnen das Segment $\left[L + K\binom{n}{k},\ L + K\binom{n+1}{2}\right]$ weither kurz mit $[LK_n]$. Für einen beliebigen Punkt $f(p, t) \in f(p, I)$ folgt aus (1)

$$\varrho[f(p, t), f(p; [LK_n])] < \varepsilon/2, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Bearbeitet im Rahmen des Programms Math. Inst. Beograd

AMS Subject Classification (1980): Primary 34 C 35, 54 H 20.

Sei $q \in f(p,I) \cup \Phi_p$. Dann existiert die Folge $\{p_n\} = \{f(p,\tau_n)\}$, wobei $\tau_n \in \{\tau_n\}$ ist, derart, dass

$$\varrho(q,p_n) < \varepsilon/2, \quad (n = 1,2,\dots), \tag{2}$$

ist. Nehmen wir nun einen beliebigen aber bestimmten Bogen $f(p;[LK_{n_1}])$. Nach (2) kann man zum Punkte $q \in f(p,I) \cup \Phi_p$ ein Punkt $r \in f(p;[LK_{n_1}])$ finden derart, dass

$$\varrho(r,q) < \varepsilon/2 \tag{3}$$

ist. Der Bogen $f(p;[LK_{n_1}])$ ist kompakt und auf ihm kann man ein endliches $\varepsilon/2$-Netz: $p_1, p_2, \dots, p_k$ finden derart, dass sich für einen beliebigen Punkt $r \in f(p;[LK_{n_1}])$ ein Punkt $p_v \in f(p;[LK_{n_1}])$ finden lässt so, dass

$$\varrho(p_v,r) < \varepsilon/2 \tag{4}$$

ist. Dabei ist der Punkt r gemäss (3) gewählt. Aus (3) und (4) folgt $\varrho(q,p_v) < \varepsilon$, was besagt, dass $p_1, p_2, \dots, p_v$ ein ε-Netz für die Menge $f(p,I) \cup \Phi_p$ bildet. Da der Raum R, nach der Voraussetsung, vollständig ist, so ist $f(p,I) \cup \Phi_p$ kompakt.

Satz 2. *Ist bei der Bewegung $f(p,t)$ die Menge der φ-Grenzpunkten $\Phi_p \neq \varnothing$, so existiert eine QRD Menge $\{\sigma_n\}$ auf I^+ derart, dass für die invariante Menge $A \subseteq \Phi_p$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ die Ungleichung*

$$\varrho[f(p,\sigma_n),\ A] < \varepsilon, \quad (n = 1,2,\dots),$$

gilt.

Beweis. Sei $A \subseteq \Phi_p$ eine invariante Menge und $\varepsilon > 0$ eine beliebige, aber bestimmte Zahl. Nehmen wir einen beliebigen Punkt $q \in A$ und eine Zahl $t_1 > 0$. Dann kann man auf Grund der Stetigkeit, eine Zahl $\delta(q,\varepsilon,t_1) > 0$ finden derart, dass aus $\varrho(r,q) < \delta$ die Ungleichung

$$\varrho[f(r,t_1), f(q,t_1)] < \varepsilon$$

folgt. Da der Punkt $q \in A \subset \Phi_p$ leigt, so existiert eine QRD Menge $\{\tau_n\}$ auf I^+ derart, dass zu schon ausgewähltem $\delta > 0$

$$\varrho[q, f(p,\tau_n)] < \delta,$$

für genügend grosse $n \in N$ ist, (S. [**4**], Lemma 1, S. 30). Dann ist, auf Grund der ausgewählten Zahl δ,

$$\varrho[f(q,t_1),\ f(p,t_1+\tau_n)] < \varepsilon. \tag{5}$$

Weil A invariante Menge ist, so $f(q,t_1) \in A$. Setzen wir $\{t_1+\tau_n\} \equiv \{\sigma_n\}$, wobei $\{\sigma_n\}$ auch QRD Menge auf I^+ ist, wird erst recht aus (5)

$$\varrho[f(p,\sigma_n), A] < \varepsilon, \tag{6}$$

fur genügend grose n sein, was bewiesen werden sollte.

FOLGERUNG 1. *Der Satz 2 gilt für den Fall, dass $f(p,t)$ eine positiv gausi-fastrekurrente (QFR^+) Bewegung ist. Wirklich, im diesen Falle existiert eine QRT Menge $\{\tau_n\}$ auf I^+, dann aber existiert die invariante Menge $A \subseteq \Phi_p$, und dann sind die Bedingungen des Satzes 2 erfüllt.*

Es ist ganz offenbar, das der Satz 2 gilt, wenn $f(p,t)$ positiv quasi-rekurrente (QR^+) Bewegung ist.

SATZ 3. *Die abgeschlossene Hülle der Trajektorie der Bewegung $f(p,t)$, die im Sinne von Liapunov stabil (Li-stabil) und QFR^+ Bewegung ist, ist eine minimale Menge.*

Beweis. Setzen wir umgekehrt voraus, dass $\overline{f(p,I)} \equiv \Sigma_p$ keine minimale Menge ist ([**6**], S. 373 und [**1**], S.64). Dann existiert eine abgeschlossene invariante Menge $A \subset \Sigma_p$. Für einen beliebigen Punkt $p_1 = f(p,t_1)$, wobei $t_1 \in I$, gilt $p_1 \notin A$. Denn, wenn $p_1 \in A$ wäre, würde $f(p_1,I) = f(p,I) \subseteq A$ folgen (wegen Invarianz), $\Rightarrow \overline{f(p,I)} \subseteq A$ (wegen Abschliessung der Menge A). Dann folgt aus $A \subset \Sigma_p$ und $\Sigma_p \subseteq A$, dass $A = \Sigma_p$ ist, und dies steht im Widerspruch zu $A \subset \Sigma_p$. Nach dem können wir schreiben, dass für dieses $p_1 \in f(p,I)$ wobei $p_1 = f(p,t_1)$,

$$\varrho(p,A) \geq d > 0 \tag{7}$$

ist.

Fixieren wir einen Punkt $p_1 = f(p,t_1) \in f(p,I)$ derart, dass ihm der Abstand d in (7) entspricht und wählen wir eine Zahl $\varepsilon > 0$ aus, so dass $\varepsilon < d/2$, bzw. $2\varepsilon < d$ ist. Zu diesem ε finden wir, auf Grund der Li-Stabilität, eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass aus $\varrho(p,q) < \delta$.

$$\varrho[f(p,t), f(q,t)] < \varepsilon$$

für jedes $t \in I$ erfolgt. Auf Grund der positiv Quasi-fastrekurrenz der Bewegung $f(p,t)$ lässt sich zu diesem δ eine QRD Menge $\{\tau_n\}$ auf I^+ finden derart, dass

$$\varrho[p, f(p,\tau_n)] < \delta, \quad (n = 1,2,\dots), \tag{8}$$

ist. Mit Rücksicht auf die QFR^+ Bewegung $f(p,t)$ wird

$$p \in \Phi_p \Rightarrow f(p,I) \subseteq \Phi_p \Rightarrow \overline{f(p,I)} \subseteq \Phi_p$$

sein. Da $\Phi_p \subseteq \overline{f(p,I)} \equiv \Phi_p$, so ist $\Phi_p = \Sigma_p$ und daher ist $A \subseteq \Phi_p$.

Nehmen wir jetzt einen beliebigen Punkt $q \in A \subseteq \Phi_p$. Da er der Menge Φ_p angehört, existiert zu schon ausgewähltem δ die QRD Menge $\{\tau_n'\}$ auf I^+ derart, dass

$$\varrho[q, f(p,\tau_n')] < \delta, \quad (n = 1,2,\dots), \tag{9}$$

ist. Finden wir weither solche Zahl $t' \in I$, dass für ein gewisses $n \in N$ $\tau_n' + t' = \tau_n + t_1$ sei. Wegen der Li-Stabilität der Bewegung $f(p,t)$ bekommt man aus (9)

$$\varrho[f(q,t'), f(p,\tau_n' + t')] = \varrho[f(q,t'), f(p,\tau_n + t_1)] < \varepsilon. \tag{10}$$

Wegen der Invarianz der Menge A ist $f(q,t') \in A$, und erst recht aus (10)

$$\varrho[A, f(p, \tau_n + t_1)] < \varepsilon, \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{11}$$

Weither, wegen Li-Stabilität, ergibt sich aus (8) auf Grund der Auswahl der Zahl δ, für schon bestimmtes n

$$\varrho[f(p, t_1), f(p, \tau_n + t_1)] < \varepsilon. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) erfolgt

$$\begin{aligned} \varrho(p_1, A) = \varrho[f(p, t_1), A] \leq \varrho[f(p, t_1), f(p, \tau_n + t_1)] + \\ + \varrho[A, f(p, \tau_n + t_1)] < 2\varepsilon < d, \end{aligned}$$

was der Ungleichung (7) widerspricht und der Satz ist bewiesen.

Satz 4. *Ist die Bewegung $f(p,t)$ positiv stabil im Sinne von Lagrange (L^+-stabil; S.*[**6**]*, S.*340 *und* [**1**], S.33) *und M die einzige minimale Menge in Φ_p, d.h. $M \subseteq \Phi_p$ dann approximiert die Halbtrajektorie quasi-gleichmässig die Menge M* ([**5**], S. 173 *und* [**4**], S. 29).

Beweis. Setzen wir umgekehrt voraus, d.h. die Halbtrajetorie $f(p, I^+)$ approximiere nicht quasi-gleichmässig die Menge M. Dann existriert ein $\varepsilon_0 > 0$ derart, dass sich zu beliebigen Zahlen $L_m \geq 0$ und $K_m > 0$, wobei $L_m \to +\infty$, $K_m \to +\infty$, wenn $m \to +\infty$, die eine QRD Menge $\{\tau^m\}$ anf I^+, mit

$$L_m + K_m \binom{n}{2} \leq \tau^m \leq L_m + K_m \binom{n+1}{2}, \quad (m, n = 1, 2, \dots),$$

bilden, eine natürliche Zahl n_m und ein Punkt $q_m \in M \subset \sum_p^+ \equiv \overline{f(p, I^+)}$ finden lassen derrart, dass

$$q_m \notin S\left[f\left(p; L_m + K_m \binom{n_m}{2},\ L_m + K_m \binom{n_m + 1}{2}\right), \varepsilon_0\right] \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{13}$$

(Hier n_m hängt von m ab). Das bedeutet, dass zu beliebigem m existiert eine natürliche Zahl n_m mit

$$L_m + K_m \binom{n_m}{2} \leq \tau_n^m \leq L_m + K_m \binom{n_m + 1}{2},$$

wobei $\tau_n^m \in \{\tau^m\}$ derart, dass

$$\varrho[q_m, f(p, \tau_n^m)] \geq \varepsilon_0$$

ist, order aus (13)

$$\varrho\left[q_m, f\left(p; L_m + K_m \binom{n_m}{2},\ L_m + K_m \binom{n_m + 1}{2}\right)\right] \geq \varepsilon_0 \tag{14}$$

Setzen wir

$$f\left[p,\, L_m + K_m \binom{n_m}{2}\right] = p_m,$$

und dann wird man aus (14) bekommen

$$\varrho\left\{q_m, f\left(p_m; \left[0, K_m\binom{n_m+1}{2}\right]\right)\right\} \geq \varepsilon_0. \tag{15}$$

Auf Grund der L^+-Stabilität, bzw. Kompaktheit der Menge $\overline{f(p, I^+)}$, lassen sich aus den Folgen $\{q_m\}$ und $\{p_m\}$ konvergente Teilfolgen auswählen. Wir werden sie auch mit $\{q_m\}$ und $\{p_m\}$ bezeichnen, und dann wird

$$\{p_m\} \to p_0, \qquad \{q_m\} \to q_0 \qquad \text{wenn } m \to \infty, \qquad (q_0 \in M),$$

sein. Dann ist auch: $n_m \to \infty$ und $\left[0, K_m\binom{n_m+1}{2}\right] \to \infty$, und ergibt sich aus (15)

$$\varrho[q_0; f(p_0, I^+)] > \varepsilon_0. \tag{16}$$

Aus (16) erfolgt:

$$\varrho[q_0, \overline{f(p_0, I^+)}] > \varepsilon \Rightarrow \varrho(q_0, \Phi_{p_0}) \geq \varepsilon_0 \tag{17}$$

weil $\Phi_{p_0} \subseteq \overline{f(p_0, I^+)} = \Sigma_{p_0}$. Aber $\Phi_{p_0} \subseteq \Phi_p$ für jeden Punkt $p_0 \in \Phi_p$ und darum ist Φ_p eine kompakte Menge und sie enthält deshalb die minimale Menge. Weil, nach der Voraussetzung, M einzige minimale Menge in Φ_p ist, so muss $M \subseteq \Phi_p$ und auch $q_0 \in \Phi_p$ sein, aber das widerspricht der Ungleichung (17). Damit ist der Satz bewiesen.

Aus dem Satze 2.18, in [**7**] geht unmittelbar hervor

SETZ 5. *Die Bewegung, deren Trajektorie $f(p, I)$ in einer kompakten minimalen Menge liegt, ist quasi-rekurrent.*

Nach dem erwähnten Satze in [**7**] ist eine solche Bewegung rekurrent ([**7**], S. 67) und da jede rekurrente Bewegung gleichzeitig quasi-rekurrent ist, folgt sofort der Satz 5.

LITERATUR

[1] Ch. Đaja, *Kvazi-rekurentna kretanja dinamičkih sistema u metričkim prostorima*, Mat. Vesnik **2**(**15**)(**30**) (1978), 339–349.

[2] Ch. Đaja, *Kvazi-skoro periodična kretanja dinamičkin sistema u metričkim prostorima*, Mat. Vesnik **3**(**16**)(**30**) (1979), 15–21.

[3] Ch. Đaja, *Kvazi-skoro rekurentna kretanja i trajektorije dinamičkih sistema*, Mat. Vesnik **12** (**27**) (1975), 41–45.

[4] Ch. Đaja, *Kvaziuniformna aproksimacija i svojstva kretanja u dinamički graničnim skupovima*, Mat. Vesnik **12**(**27**) (1975), 29–40.

[5] Ch. Đaja, *Quasigleichmässige Approximation und Bewegungen stabil im Sinne von Lagrange*, Math. Balkanica, **4. 29** (1974), 173–177.

[6] V. V. Nemytskii, V. V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, Princeton, New Jersey, 1960, (V, 307– 420).

[7] К. С. Сибирский, *Введение в топологическую динамику*, Акад. наук, Молд. ССР, Кишенёв, 1970.

Poljoprivredni fakultet
Institut za poljoprivrednu tehniku
11080 Beograd-Zemun

(Eigegangen den 29 09 1982)