PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 38 (52), 1985, pp. 87–98

ÜBER DIE ZYKLISCH-INVERSEN UNTERHALBGRUPPEN DER SYMMETRISCHEN HALBGRUPPE $\mathcal{I}_X$

K. Todorov

Abstract. Das Element β der Halbgruppe H ist ein Quasiinverse von dem Element α dieser Halbgruppe wenn $\alpha\beta\alpha = \alpha$, $\beta = \beta\alpha\beta$ und die Unterhalbgruppe $\langle\alpha,\beta\rangle$ der Halbgruppe H inverse ist. Mit $|x|$ $(x \in X)$ ist die natürliche Zahl s, für die $x \in X\alpha^s$ und $x \notin X\alpha^{s+1}$ s+I gilt bezeichnet. $|x| = \infty$ fals $x \in X\alpha^s$ für jede natürliche Zahl s ist. Der kleinste natürliche Zahl $t : t \geq > 1$ (wenn sie besteht), für die$|x\alpha'| = \infty$, heißt Index $\|x\|$ von x. Durch die Anwendung der Methoden und der Ideen, die von Schein (Acta Mathem. Acad. Sci. Hungar. **22**(1971), 163–170) kommen, gelang es die notwendigen und hinreichenden Bedingunge zu finden, bei denen die Abbildung $|beta$ Quasiinverse einer gegebenen Abbildung α ist. Die Abbildung α die eine ein ige quasi-inverse Abbildung β haben, sind auch gezeigt. Damit ist eine volle Antwort auf die entsprechende Frage von Schein (Ibid.) gegeben, wenn α und β endlichen Index haben.

1. Vorwort

Das Element β der Halbgruppe Hb ist nach Schein [**4**] ein Quasiinverse von dem Element α dieser Halbgruppe, wenn

$$(1) \qquad \alpha\beta\alpha = \alpha, \qquad \beta\alpha\beta = \beta$$

und die Unterhalbgruppe $\langle\alpha,\beta\rangle$ der Halbgruppe H, die von den Elementen α und β erzeugt wird, inverse ist.

Eine zyklisch-(elementar) inverse Unterhalbgruppe $G = [\alpha] = \langle\alpha,\beta\rangle$b der Halbgruppe H ist eine solche Unterhalbgruppe, die vom Element α und seinem quasiinversen Element β erzeugt wird. Die zyklisch-inversen Halbgruppen sind wesentlich komplizierter gebaut als die zyklischen Gruppen und Halbgruppen. So z. B. indem es bis auf Isomorphie nur eine einzelne unendliche zyklische Gruppe und nur eine einzelne unendliche zyklische Halbgruppe gibt, bestehen aber unendlich viele unendliche zyklisch-inverse Halbgluppen, die paarweise nicht isomorph sind.

Die ersten Untersuchungen in dieser Richtung gehen wesentlich auf Gluskin [**1**] zurück. Sie sind weiter von Schein [**4**] verallgemeinert und bilden zusammen mit den Untersuchungen von Dénes [**6**] einen Ausgangspunkt für die hier dargelegten Ergebnisse.

AMS Subject Classification (1980): Primary 20M20.

Eine Vollbeschreibung des Baumes der endlichen zyklisch-inversen Halbgruppen ist in der Arbeit von Dyadčenko, Schein [**2**] gegeben. Jedes Element der zyklisch-inversen Halbgruppe $G_{mn} = [x]$ gehört auf Grund des dort bewiesenen Satzes zu einem der folgenden Typen $x^m, \dots, x^{m+n-1}$ oder $x^{-p}x^q x^{-r}$, wobei x^{-1} das inverse Element von x ist und $p, r \leq q \leq m$ ist.

Wir setzen die Termonologie, Ergebnisse und teilweise auch die Notation von [**4, 5, 7**] voraus und vollen nur die aus [**7**] nötigen Begriffe einführen. Es seien α eine festgehaltene Abbildung und x ein Element von X. Wir bezeichnen mit $|x|$ die Tiefe (hinsichtlich α) von x, d.h. die natürliche Zahl s, für die $x \in X\alpha^s$ und $x \notin X\alpha^{s+1}$ gilt $|x| = \infty$, falls $x \in X\alpha^s$ für jede natürliche Zahl ist.

Offenbar ist

$$|x| + m \leq |x\alpha^m|. \tag{2}$$

Mit $\|x\|$ bezeichnen wir den Index von $x \in X$, d.h. die kleinste natürliche Zahl $t : t \geq 1$, (wenn sie besteht), für die $x\alpha'| = \infty$ ist.

Die Abbildung a von X hat einen endlichen Index, wenn $\|x\| < \infty$ für jedes Element $x \in X$ ist.

Jede Abbildung der endlichen Menge X hat einen endlichen Index; jede idempotente Abbildung von $\mathcal{I}_X$ (für beliebige X) hat einen endlichnen Index; während z.B. die Abbildung a der Menge $X = \{1, 2, \dots\} : n\alpha = n + 1$ keinen endlichnen Index hat.

Ist α eine gegebene (volle oder partielle) Abbildung von X, stellt Schein in [**4**] auch die Frage für die Beschreibung der quasiinversen Abbildungen β von α auf, wie auch die Frage für die Beschreibung der jeniger Abbildungen a, die eine einzige quasiinverse Abbildung β haben.

Der folgende Satz gibt eine volle Antwort auf die obige Frage, wenn α und ihre quasiinverse Abbildung β einen endlichen Index haben.

Es seien $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_X$; $x, y, a, b \in X$. Die geordneten Paare (x, y), (a, b) nennen wir Verwandten von *Gradk* (hinsichtlich α, β), falls für sie gleichzeitig

$$c = c\alpha^{k-1}\beta^{k-1}, \qquad c \in \{x, y, a, b\},$$
$$y\alpha^k\beta^k = x\alpha^k\beta^k = x \quad \text{und} \quad b\alpha^k\beta^k = a\alpha^k\beta^k = a$$

zutreffen.

Satz. *Es sei a eine Abbildung (von X) mit einem endlichen Index. Die Abbildung β (von X) mit einem endlichen Index ist eine qyuaziinverse Abbildung von α dann und nur dann, wenn sie nach den folgenden zwei Regeln bestimmt ist.*

(i) *Es sei $a \in X\alpha$, d-h. $|a| \geq 1$ ist. Dann ist $a\beta$ ein Element von $a\alpha^{-1}$ mit möglichst größter Tiefe*[1]

[1] Heir und weiter im Beweis betrachten wir die Tiefe immer hinsichtlich der Abbildung α.

(ii) 1) *Es sei fr̈ das Element* $x_0 \in X \setminus X\alpha$ *die folgenden Bedingungen*

$$x_0\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = x_0, \qquad x_0\alpha^m\beta^m \in X\alpha;$$
$$a_0\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = a_0, \qquad a_0\alpha^m = x_0\alpha^m;$$

für ein gewisses Element $a_0 \in X\ a$ *und für die natürliche Zahl* $m : m \geq 1$ *erfüllt. Dann ist* $a_0\beta = x_0\beta$.

2. *Unter den Voraussetzungen von* P.1*) seien für* $x, y \in X \setminus X\alpha$ *und für die natürliclte Zahl* $k : k < m$ *die Beziehngen*

$$x\alpha^{m-1} = y\alpha^{m-1} = x_0\alpha^{m-1}; \quad y = y\alpha^{k-1}\beta^{k-1};$$
$$y\alpha^k\beta^k = x\alpha^k\beta^k = x$$

gülting und $x\beta$ *sei bestimmt.*

Dann wird $y\beta$ *so bestimmt, daß die Paare* (x, y), $(x\beta\alpha, y\beta\alpha)$ *dic Verwandten von* Grad k *sein werden.*

Es gelingt den Satz durch Anwendung der Methoden und der Ideen von [**4**], wie auch durch Anwendung eines Lemmas von Schein-Gluskin [**4**] zu beweisen. Das Lemma besagt:

Das element β der Halbgruppe S ist ein quasünverses Element von α dann und nur dann, wenn die Bedingungen (1) und

$$\alpha^u\beta^{u+v}\alpha^v = \beta^v\alpha^{v+u}\beta^u \tag{3}$$

für alle natürliche Zahlen $u \geq 0$ und $v \geq 0$ $(u + v > 0)$ erfüllt sind.

2. Quasiinverse Abbildungen und ihre Eigenschaften. Beweis des Satzes

Bevor wir zu den Beweisen der grundlegenden Behauptungen übergehen, bemerken wir das folgende.

Aus den Gleichungen $(\alpha, \beta \in \mathcal{I}_X)$

$$\alpha^m\beta^m\alpha^m = \alpha^m, \quad \beta^m\alpha^m\beta^m, \quad (m = 1, 2, \dots), \tag{4}$$

die in jeder zyklisch-inversen Halbgruppe $\langle\alpha, \beta\rangle$ gültig sind, folgt:

1) $X\beta^m$ stellt ein Querschnitt von Kernäquivalenzrelation $\pi(\alpha^m) = \alpha^m \circ \alpha^{-m}$ (kurz $X\beta^m \# \pi(\alpha^m)$) dar. Auch ist $X\alpha \# \pi(\beta^m)$.

2) $\pi(\alpha^m\beta^m) = \pi(\alpha^m); \qquad \pi(\beta^m\alpha^m) = \pi(\beta^m);$

3) $X\alpha^m\beta^m = X\beta^m; \qquad X\beta^m\alpha^m = X\alpha^m.$

Lemma 1. *Es seien* α *eine Abbildung (von* X*),* β *eine quasiinverse Abbildung von* α *mit einem endlichen Index und* a *ein Element von* $X\alpha$ *(d.h.* $|a| \geq 1$*). Dann ist* $a\beta$ *ein Element von* $a\alpha^{-1}$ *mit möglichst größter Tiefe.*

Beweis. Es seien $m = |a| \geq 1, b = a\beta, a_0 = a\beta^m$.

Da $c\varepsilon = c$ für jede idempotente Abbildung $\varepsilon \in \mathcal{I}_X$ und jedes Element $c \in X\varepsilon$ ist, gelten dann auch die Relationen:

$$\begin{aligned}
&a_0\alpha^m = a\beta^m\alpha^m = a \qquad (\text{da } a \in X\alpha^m = X\beta^m\alpha^m),\\
&b\alpha = a\beta\alpha = a_0\alpha^m\beta\alpha = a_0\alpha^m = a \mapsto |b| \leq m-1;\\
&b = \alpha\beta = a_0\alpha^m\beta = a\beta^m\alpha^m\beta = b\beta^{m-1}\alpha^m\beta =\\
&\quad = b\alpha\beta^m\alpha^{m-1} = a\beta^m\alpha^{m-1} = a_0\alpha^m \Rightarrow m-1 \leq |b|
\end{aligned}$$

Folglich ist b ein Element von $a\alpha^{-1}$ mit möglichst größter Tiefe ($= m-1$).

Korollar 1. *Es seien a eine Abbildung (von X), β eine quasiinverse Abbildung von α mit einem endlichen Index; x, a Elemente von X und k* ($k = 0, 1, 2, \dots$) *eine Zahl, für die $x\beta^k\alpha^k = a$ gilt, dann ist $a\beta^i\alpha^i = a$ für $i = 0, 1, \dots, k$.*

Beweis. $a\beta^k\alpha^k = a$ gilt, weil $\beta^k\alpha^k$ eine idempotente Abbildung darstellt und $a \in X\beta^k\alpha^k$ ist.

Also ist $k \leq |a|$ und daher folgt, daß $a \in X\alpha^i = X\beta^i\alpha^i$ für $i = 0, 1, \dots, k$, d.h. $a\beta^i\alpha^i = a$ ist.

Das folgende Korollar ist dual zu dem Korollar 1.

Korollar 2. *Es seien α eine Abbildung (von X), β eine quasiinverse Abbildung von a mit einem endlichen Index; x, b Elemente von X und k* ($k = 0, 1, \dots$) *eine Zahl, für die $y\alpha^k\beta^k = b$ gilt, dann ist $b\alpha^i\beta^i = b$ für $i = 0, 1, \dots, k$.*

Schließlich formulieren wir (ohne Beweis) auch das folgende

Korollar 3. *Es seien α eine Abbildung (von X), β eine quasiinverse Abbildung von a mit einem endlichen Index und x ein Element von X. Dann gilt es*

$$|x\alpha^u\beta^v| = \infty$$

für jede zwei Zahlen u und v mit $\|x\| \leq u$ und $0 \leq v$.

Die Gleichung $|x\beta^p| = \infty$ liefert $|x\beta^1\alpha^s| = \infty$ für jedes Element $x \in X$ und jede zwei Zahlen 1 und s mit $p \leq 1, 0 \leq s$.

Also, für jede Abbildung a und ihre Quasiinverse β mit einem endlichen Index findet man fÜr jedes Element $x \in X$ eine Zahl $t : t \leq \|x\|$ mit $t < |x\alpha^t|$ und $x\alpha^t\beta^t \in X\alpha$.

Setzen wir weiter die Elemente $x_i \in X/X\alpha$ ($i = 1, \dots, s$) und die Zahl m : $m \geq 1$ mit

$$(5) \qquad x_1\alpha^{m-1} = x_2\alpha^{-1} = \cdots = x_s\alpha^{m-1}, |x_i\alpha^{m-1}| = m-1, \quad m < |x_i\alpha^m|$$

voraus. Dann wird es (nach dem Lemma 1) bei der idempotenten Abbildung $\alpha^k\beta^k$ ($k = 0, 1, \dots, m-1$) für die Bilder der Elemente x_i

$$|x_i\alpha^k\beta^k| = 0, \qquad x_i\alpha^m\beta^m = a \in X\alpha.$$

Wenn es keine anderen Elemente von X gibt, die Bedingung (5). erfüllen (d.h. falls die Klasse $x_i\pi(\alpha^{m-1})$ mit der Menge $S = \{x_1, \dots, x_s\}$ uberelnstimmt) so versichert dann die Bedingung $X\beta^{m-1} \# \pi(\alpha^{m-1})$ die Existenz des Elements $x_0 : \{x_0\} = S \cap X\beta^{m-1}$ mit $x_i\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = x_0$.

Es ist leicht zu sehen, daß $\{x_0\} = x_0\pi(\alpha^k) \cap X\beta^k$ für jede Zahl $k : k \leq m-1$, d.h. $(x_0\pi(\alpha^k))\alpha^k\beta^k = x_0$ ist.

Ist $x\alpha^k \neq x_0\alpha^k$ für die Zahl $k : k < m-1$ und das Element $x \in S$, so haben wir für das Element $y = x\alpha^k\beta^k$ und eine gewisse Zahl $l : k < l \leq m-1$:

$$y = x\alpha^k\beta^k \neq x_0\alpha^k\beta^k = x_0, \qquad y\alpha^l\beta^l = x_0\alpha^l\beta^l = x_0, \qquad y\alpha^l = x_0\alpha^l,$$

d.h. $y \in S$ ist.

Folglich, entspricht jedem Element $x_0 \in X \setminus X\alpha$ eine minimale Zahl m so, daß $x_0\alpha^m\beta^m \in X\alpha$. Dabei trifft man die folgenden zwei Fälle:

1) Für jede Zahl 1 mit $0 \leq 1 < m$ gilt es $x_0\alpha^1\beta^1 = x_0$.

2) Für die Zahlen k, k_0 mit $0 \leq k \leq k_0 < m-1$ und die Elemente $x_0, x_1, x \in X \setminus X\alpha$ mit

$$x\alpha^k\beta^k = x, \quad x\alpha^{k_0+1}\beta^{k_0+1} = x_1, \quad x_1\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = x_0$$

gilt es

$$x\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = x_1\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = x_0\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = x_0.$$

Diese Schlußfolgerungen werden wir wesentlich bei den Formulierungen der nachkommenden Behauptungen benutzen.

LEMMA 2. *Es seien α eine Abbildung von X, β eine quasiinverse Abbildung von α mit einem endlichen Index, und*

1. *es sei für das Element $x_0 \in X \setminus X\alpha$ und die Zahl $m \geq 1$:*

$$x_0\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = x_0, \qquad x_0\alpha^m\beta^m \in X\alpha.$$

Dann ist $x_0\beta = a_0\beta$ für ein gewisses Element $a_0 \in X\alpha$ mit $a_0\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = a_0$ und $a_0\alpha^m = x_0\alpha^m$.

2. *Unter der voraussetzung von* P.1 *sei für das Element $x \in X \setminus X\alpha$ und für die Zahl k $(k < m)$:*

$$x\alpha^{k-1}\beta k - 1 = x \;\; und \;\; x\alpha^k\beta^k = x_0$$

gültig.

Dann ist $x\beta = a\beta$ für ein gewisses Element $a \in X\alpha$ mit $a\alpha^{k-1}\beta^{k-1} = a$ und $a\alpha^k\beta^k = a_0$.

Beweis. 1. Bezeichnen wir durch a_0 das Bild von x_0 bei der idempotenten Abbildung

$$\alpha^{m-1}\beta^m\alpha = \beta\alpha^m\beta^{m-1}.$$

Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&x_0\alpha^{m-1}\beta^m\alpha = a_0 = a_0\alpha^{m-1}\beta^m\alpha \qquad (\text{da } a_0 \in X\alpha^{m-1}\beta^m\alpha),\\
&= (a_0\beta\alpha)\alpha^{m-1}\beta^{m-1} = a_0\alpha^{m-1}\beta^{m-1} \quad (\text{da } a_0 \in X\alpha, S. \text{ Korollar 1}),\\
&a_0\beta = (x_0\alpha^{m-1}\beta^{m-1})\beta\alpha\beta = x_0\beta\alpha\beta = x_0\beta \quad , x_0\beta\alpha = a_0\beta\alpha = a_0.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt es noch:

$$\begin{aligned}
&x_0\alpha^m\beta^{m+1}\alpha = (x_0\beta\alpha)\alpha^m\beta^m = a_0\alpha^m\beta^m;\\
&a_0\alpha^m = a_0\alpha^m\beta^m\alpha^m = (x_0\alpha^m\beta^{m+1}\alpha)\alpha = (x_0\alpha^m)\beta^{m+1}\alpha^{m+1} = x_0\alpha^m\\
&(\text{da } x_0\alpha^m\beta^m \in X\alpha \Rightarrow m < |x_0\alpha_m|).
\end{aligned}$$

2. Setzen wir $a = x\alpha^{k-1}\beta^k\alpha = x\beta\alpha^k\beta^{k-1}$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&a \in X\alpha, \qquad a\beta\alpha = a,\\
&a = a\beta\alpha^k\beta^{k-1} = (a\beta\alpha)\alpha^{k-1}\beta^{k-1} = a\alpha^{k-1}\beta^{k-1},\\
&a\beta = x\alpha^{k-1}\beta^k\alpha\beta = x\alpha^{k-1}\beta^k = x\beta, \qquad x\beta\alpha = a\beta\alpha = a.
\end{aligned}$$

Die Gleichung $x\alpha^k\beta^k = x_0$ liefert weiter

$$\begin{aligned}
&x\alpha^k\beta^{k+1}\alpha = x_0\beta\alpha = a_0,\\
&a_0 = x\alpha^k\beta^{k+1}\alpha = x\beta\alpha^{k+1}\beta^k = (x\beta\alpha)\alpha^k\beta^k = a\alpha^k\beta^k.
\end{aligned}$$

Das Lemma ist bewiesen.

Daraus leiten wir leicht für $k : k < m$ ab:

$$\begin{aligned}
&x\alpha^k = x_0\alpha^k, \qquad a\alpha^k = a_0\alpha^k,\\
&x\alpha^{m-1} = x_0\alpha^{m-1} \neq a_0\alpha^{m-1} = a\alpha^{m-1},\\
&x\alpha^m = x_0\alpha^m = a_0\alpha^m = a\alpha^m.
\end{aligned} \tag{6}$$

Lemma 3. *Es seien α eine Abbildung (von X) mit einem endlichen Index, β eine unter den Bedingungen der Punkte* (i) *und* (ii) *(des Satzes) bestimmte Abbildung. Dann gilt es stets*

$$\|x\beta^w\| = \|x\| + w$$

für jedes Element x von X mit $|x\beta^w| < \infty$ $(w = 0, 1, \ldots)$.

Beweis. Den Beweis führen wir durch lnduktion über den Exponenten w. Der Fall $w = 0$ ist trivial. Die Behauptung sei nun schon für alle $x \in X$ mit einem Exponenten $k : k < w$ bewiesen und es sei $x\beta^k = b$. Dan sind die folgenden zwei Fälle zu treffen.

1) $1 \leq |b|$. In diezem Falle ist $x\beta^{k+1} = b\beta$ nach dem P. (i) des Satzes und es ist

$$\|x\beta^{k+1}\| = \|b\beta\| = \|b\| + 1 = \|x\beta^k\| + 1, \quad \|x\beta^{k+1}\| = \|x\| + k + 1.$$

2) $0 = |b|$. In diesem Falle besteht nach dem P. (ii) des Satzes (s. auch (6)) ein Element $a \in X\alpha$, so daß

$$b\beta = a\beta \text{ und } \|a\| = \|b\| = \|x\| + k$$

ist. Es ergibt sich

$$\|b\beta\| = \|a\beta\| = \|a\| + 1 = \|b\| + 1, \quad \|x\beta^{k+1}\| = \|b\beta\| = \|x\| + k + 1,$$

Schwieriger ist der Nachweis des folgenden Hilfsatzes.

LEMMA 4. *Es seien α eine Abbildung (von X) mit einem endlichen Index, β eine unter den Bedingungen der Punkte* (i) *und* (ii) *des Satzes bestimmte Abbildung und es seien z ein Element von X und w eine natürliche Zahl mit $|z\beta^w| < \infty$. Dann existiert ein Element c von $X\alpha$ und die Zahl $n : n > 1$ derart, daß die folgenden Beziehungen*

$$\begin{aligned} &w \leq |c|, \qquad z\beta^w = c\beta^w, \\ &z\alpha^n = c\alpha^n, \quad \textit{und } z\alpha^{n-1} \neq c\alpha^{n-1} (\textit{ob } z \neq c \textit{ ist}) \end{aligned}$$

gelt en.

Beweis. Der Fall $w < |z|$ ist trivial — $z = c$. Deshalb setzen wir voraus daß $|z| < w$ ist und es seien z_j und $c_j (j = 0, 1, \dots)$ die jenige aufeinanderfolgen nach den Punkten (i) und (ii) bestimmte Elemente von X mit

$$c_j\beta^{|c_j|} = z_{j+1}, \qquad |z_J| = 0; \qquad z\beta^{|z|} = z_0, \tag{7}$$

$$z_j\beta = c_j\beta, \qquad z_j\alpha^{k_j}\beta^{k_j} \neq z_j \tag{8}$$

und

$$t\alpha^{k_j-1}\beta^{k_j-1} = t \text{ für } t \in \{z_j, c_j\}.$$

Die elemente $c_j (j = 0, 1, \dots)$ bestehen nach den Ungleichungen $|z\beta^w| < \infty$ und $|z| < w$.

Betrachten wir vorher einige Beziehungen, die diese Elemente und ihre Tiefen erfüllen.

Es ist leicht zu sehen, daß (nach P. (i)) für jedes Element a von $X\alpha$ und jede Zahl k mit $a\alpha^k\beta^k = a$ stets

$$|a\alpha^i| = |a| + i, \quad a\alpha^i\beta^i = a, \quad a\alpha^k\beta^{k-i} = a\alpha^i, \tag{9}$$

für jede Zahl $i : i \leq k$ gilt.

Die Beziehungen (7) ergeben

$$z_{j+1}\alpha^{|c_j|} = c_j; \qquad z_{j+1}\alpha^{|c_j|}\beta^{|c_j|} = z_{j+1} \tag{10}$$

und nach (8) und (9) folgt es, daß $|c_j| \leq k_{j+1} - 1$ ist.

Außerdem gilt es auch;

$$(c_j\alpha^{k_j-1}\beta^{k_j-1}=c_j)\&(z_{j+1}\alpha^{|c_j|}=c_j) \qquad \text{(nach (9))}$$
$$\Rightarrow z_{j+1}\alpha^{|c_j|+k_j-1}\beta^{k_j-1}=z_{j+1}\alpha^{|c_j|} \qquad \text{(nach (10))}$$
$$\Rightarrow z_{j+1}\alpha^{|c_j|+k_j-1}\beta^{|c_j|+k_j-1}=z_{j+1}$$

Es liefert (nach (8))

(11) $$k_j+|c_j|\le k_{j+1}$$

Daraus folgt es durch Induktion, daß

$$k_{j+1}\ge k_0+\sum_{i=0}^{j}|c_i|$$

ist.

Setzen wir $s_k=\sum_{i=0}^{k}|c_i|$. Dann leiten wir ab:

$$k_{j+1}>s_j,$$
$$(c_{j+1}=c_{j+1}\alpha^{k_{j+1}-1}\beta^{k_{j+1}-1})\&(s_j\le k_{j+1}-1)\overset{\text{nach }(9)}{\Longrightarrow}$$

(12) $$c_{j+1}\alpha^{s_j}\beta^{s_j}=c_{j+1}\Rightarrow$$

(13) $$|c_{j+1}\alpha^{s_j}|=|c_{j+1}+s_j=s_{j+1}$$

Offensichtlich, falls die Summe s_{k+1} difiniert ist, gilt die Ungleichunhg $s_k<s_{k+1}$. Treten wir zum Beweis des Lemmas ein. Am Anfang betrachten wir den Fall, falls

(14) $$0<w\le|c_0|\quad \text{hgilt.}$$

Dann ist Gleichung $z\beta^w=c\beta^w$nach (7) von dem Element $c=c_0\alpha^{|z|}$ und die Zahl $n=k_0-|z|$ erfüllt. Es sei weiter

(15) $$s_{p-1}<w\le s_p,\qquad p=1,2,\dots$$

Wir haben

$$z_0\beta^w=c_0\beta^w=z_1\alpha^{|c_0|}\beta^w=(z_1\alpha^{|c_0|}\beta^{|c_0|})\beta^{w-|c_0|}=z_1\beta^{w-|c_0|}\ \text{(nach (10))},$$
$$z_0\beta^w=(z_1\beta)\beta^{w-|c_0|-1}=c_1\beta^{w-|c_0|}=(z_2\alpha^{|c_1|})\beta^{w-|c_0|}=c_2\beta^{w-s_1},$$
$$z_0\beta^w=c_0\beta^w=c_1\beta^{w|c_0|}=c_2\beta^{w-s_1}=\cdots=c_p\beta^{w-s_p-1}.$$

Also $z_0\beta^w=c_0\beta^w=\overline{c}_p\beta^w$, wobei

$$\overline{c}_p=c_p\alpha^{s_{p-1}}\ \text{ und }\ |\overline{c}_p|=s_p\ge w\quad \text{(nach (12)) ist.}$$

Schließlich, wenn wir mit c das Element $\overline{c}_p\alpha^{|c_p|}$:

$$c = \overline{c}_p\alpha^{|z|} = c_p\alpha^{s_{p-1}+|z|} \quad (p = 1, 2, \dots) \tag{16}$$

bezeichnen, errichen wir

$$z\beta^w = \overline{c}_p\beta^{w-|z|} = (\overline{c}_p\alpha^{|z|})\beta^w = c\beta^w, \text{ für } p = 1, 2, \dots$$

Hier gilt es noch

$$|c| = |\overline{c}_p\alpha^{|z|}| = s_p + |z| \geq w + |z| > w, \quad (p = 1, 2, \dots).$$

Es bleibt noch zu beweisen, daß eine solche Zahl n mit $z\alpha^n = c\alpha^n$ und $z\alpha^{n-1} \neq c\alpha^{n-1}$ existiert, wenn $|z| < w$ ist. Zu diesem Zwecke ergänzen wir die Bedingungen (7) und (8) mit den Beziehungen

$$z_j\alpha^{k_j}\beta^{k_j} = c_j\alpha^{k_j}\beta^{k_j} = c_j \ (j = 0, 1, \dots). \tag{17}$$

die aus P. (ii) folgen.

Weiter führen wir den Beweis durch Induktion über die Anzahl der "erzeugenden" Elemente p von $\overline{c}_p : \overline{c}_p = c_p\alpha^{s_{p-1}}$, indem wir am Anfang die Relationen

$$z_0\alpha^n = \overline{c}_p\alpha^n, \qquad z_0\alpha^{n-1} \neq c_p\alpha^{n-1} \tag{18}$$

für $n = n_p = k_p - s_{p-1}$ $(p = 1, 2, \dots), n_0 = k_0$ beweisen werden.

Tatsächtlich gilt die Behauptung für $p = 0$ und $n = k_0$. Nehmen wir an, daß sie für jedes Element c_j mit $j \leq p$ gilt. Dann leiten wir für $n = k_{j+1} - s_j$ und

$$u_j - k_{j+1} - k_j - |c_j| \geq 0 \quad \text{(nach (11)) ab :}$$
$$z_0\alpha^n = (z_0\alpha^{k_j - s_{j-1}})\alpha^{uj} = \overline{c}_j\alpha^{k_{j+1}-s_j} = c_j\alpha^{k_{j+1}-s_j+s_{j-1}} =$$
$$= c_j\alpha^{k_{j+1}-|c_j|} = z_{j+1}\alpha^{k_{j+1}} = c_{j+1}\alpha^{k_{j+1}} = \overline{c}_{j+1}\alpha^n.$$
$$(c_j\beta^{|c_j|} = z_{j+1})\&(z_{j+1}\alpha^{k_{j+1}} = c_{j+1}\alpha^{k_{j+1}}) \Rightarrow$$
$$c_j\alpha^{k_{j+1}-|c_j|} = c_{j+1}\alpha^{k_{j+1}}.$$
$$z_0\beta^{s_j} = c_0\beta^{s_j} = z_1\beta^{s_j-|c_0|} = c_1\beta^{s_j-|c_0|} = \dots = z_j\beta^{s_j-s_{j-1}} = z_{j+1},$$
$$z_0\alpha^{k_{j+1}-s_j-1} = (z_0\beta^{s_j})\alpha^{k_{j+1}-1} = z_{j+1}\alpha^{k_{j+1}-1} \neq c_{j+1}\alpha^{k_{j+1}-1} = \overline{c}_{j+1}\alpha^{k_{j+1}-s_j-1}.$$

Außerdem (nach 9)

$$\begin{gathered} c_j\alpha^{k_j}\beta^{k_j} = c_j \Rightarrow c_j\alpha^{k_j}\beta^{k_j-s_{j-1}} = c_j\alpha^{s_{j-1}}, \\ \overline{c}_j\alpha^n\beta^n = \overline{c}_j. \end{gathered} \tag{19}$$

Hierher folgt die Richtigkeit des Lemmas bei $z = z_0\alpha^{|z|}$, $c = \overline{c}_{j+1}\alpha^{|z|}$ und $n = n_p - |z|$.

Korollar 4. *Es seien a eine Abbildung (von X) mit einem endlichen Index, β eine unter den Bedingungen der Punkte* (i) *und* (ii) *des Satzes bestimmte Abbildung. Dann sind*

$$\alpha^w \beta^w \alpha^w = \alpha^w, \ \ \beta^w \alpha^w \beta^w = \beta^k = \quad (w = 1, 2, \dots).$$

Beweis. Die erste von den beiden Gleichungen ergibt sich leicht aus P. (i) und der Ungleichung $w \leq w + |x| \leq |x\alpha^w|$.

Die zweite Gleichung prüft man leicht für jenige Elemente $x \in X$, fur die $|x\beta^w| = \infty$ ist. Es seien nun x ein Element von X mit $|x\beta^w| < \infty$ und x_0 das jenige Element von X mit für die

$$a\beta^w = x\beta^w, \qquad w \leq |a| \ \text{ und } \ x_0 = a\beta^{|a|}$$

gilt. Dann haben wir:

$$x\beta^w \alpha^w \beta^w = a\beta^w \alpha^w \beta^w = (x_0 \alpha^{|a|}) \eta^w \alpha^w \beta^w = \\ (x_0 \alpha^{|a|-w}) \alpha^w \beta^w = a\beta^w = x\beta^w.$$

Beweis des Satzes. Die Notwendigkeit von Satz läßt sich nach einem Schema beweisen, das jenem von den Lemmata 1,2 analog ist.

Umgekehrt, erfüllen die Abbildungen α und β die Bedingungen des Satzes, dann ist es zu beweisen, daß $\langle \alpha, \beta \rangle$ eine zyklisch-inverse Unterhalbgruppe von $\mathcal{I}_X$ darstellt, d.h. α zusammen mit β die Bedingungen des Lemmas von Schem - Gluskin genügt.

Der Beweis von (1) folgt aus dem Korollar 4.

Also brauchen wir noch die Gleichung (3) zu beweisen. Es seien x ein beliebiges Element; a, b Elemente von X; u, v und n die Zahlen für die

$$x\beta^v = a\beta^v, \ \ v \leq |a|, \ \ b = x\alpha^u \beta^u, \qquad x\alpha^n = a\alpha^n, \ \ x\alpha^{n-1} \neq a\alpha^{n-1}.$$

Daher ist es (nach dem Korollar 4):

$$b = x\alpha^u \beta^u \Rightarrow b = b\alpha^u \beta^u \Rightarrow |x| \leq |b| \tag{20}$$

$$b = x\alpha^u \beta^u \Rightarrow x\alpha^u = b\alpha^u. \tag{21}$$

Nach dem Tiefe vom Element x unterscheiden wir die folgenden zwei Fälle:

I. $v \leq |x|$. In diesem Fall erhalten wir, daß die Gleichungen (nach (21) und (20))

$$x\alpha^u \beta^u \beta^v \alpha^v = b\alpha^u \beta^u \beta^v \alpha^v = b\beta^v \alpha^v = b, \\ b\beta^v \alpha^v \alpha^u \beta^u = x\alpha^u \beta^u = b\alpha^u \beta^u = b,$$

gelten, d.h. $x\alpha^u \beta^{u+v} \alpha^v = x\beta^v \alpha^{v+u} \beta^u$.

II. $|x| < v$. Hier betrahcten wir wieder zwei Unterfälle.

1. $n \leq u$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&(x\alpha^n = a\alpha^n)\&(n \leq u) \Rightarrow x\alpha^u = a\alpha^u = b\alpha^u \ \text{(nach 21))}\\
&a\alpha^u\beta^u = b\alpha^u\beta^u = b \Rightarrow |a| \leq |b| \Rightarrow v \leq |b| \Rightarrow b\beta^v\alpha^v = b,\\
&x\alpha^u\beta^u\beta^v\alpha^v = b\beta^v\alpha^v = b,\\
&x\beta^v\alpha^v\alpha^u\beta^u = a\beta^v\alpha^v\alpha^u\beta^u = a\alpha^u\beta^u = b\alpha^u\beta^u = b.
\end{aligned}$$

2. $u < n$. Bemerken wir vorher: nach dem Lemma 4 und ihr Beweis lassen sich für $u < n$ von den Gleichungen

$$x\alpha^u = b\alpha^u, \ \ x\alpha^n = a\alpha^n, \ \ x\beta^v = a\beta^v$$

die Gleichungen (nach (19))

$$a\alpha^u\beta^u = a, \qquad a\beta^v = x\beta^v = b\beta^v$$

erhalten. Weiter haben wir:

$$\begin{aligned}
&x\alpha^u\beta^u\beta^v\alpha^v = b\alpha^u\beta^u\beta^v\alpha^v = b\beta^v\alpha^v = a\beta^v\alpha^v = a,\\
&x\beta^v\alpha^v\alpha^u\beta^u = a\beta^v\alpha^v\alpha^u\beta^u = a\alpha^u\beta^u = a.
\end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen.

Zur Ergänzung des Beweises lassen wir bemerken, daß im Falle, wenn für eine gewisse Klasse $x\pi_\alpha$ der Schnitt $X \cap x\pi_a lpha$ unendliche viel Elemente mit möglichst größter Tiefe enthält, werden dann $(x\alpha)\beta$ durch Auswahlpostulat versihert.

Korollar 5. *Der Abbildung a von X mit einem endlichen Index entspricht eine einzelne quasiinverse Abbildung von X dann und nur dann, wenn jede Klasse $x\pi_\alpha$ ($x \in X$) nur ein einzelnes Element mit möglichst größter Tiefe enthält und gleichzeitig ihre anderen Elemente eine und dieselbe Tiefe haben.*

Beispiel 1. Die Abbildung

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 4 & 4 & 12 & 14 & 15 & 16 & 13 & 13 & 18 & 20 & 19 & 22 & 5 & 5 & 24 & 26 & 25 & 25 & 28 & 29 \end{pmatrix}$$

hat z. B. als quasiinverse Abbildung die Abbildungen

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 \\ 1 & 3 & 6 & 12 & 24 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 1 & 14 & 18 & 15 & 16 & 17 & 11 & 20 & 22 & 21 & 17 & 23 & 17 & 26 & 28 & 27 & 16 & 30 & 31 & 32 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\beta_2 : x\beta_2 = x\beta_1 \ \text{ für } \ x \neq 30, 31 \ \text{ und } \ 30\beta_2 = 31\beta_2 = 16;\\
&\beta_3 : x\beta_3 = x\beta_1 \ \text{ für } \ x \neq 27, 30, 31 \ \text{ und } \ 27\beta_3 = 30\beta_3 = 31\beta_3 = 9.
\end{aligned}$$

Die Paare (27, 30); (15, 20) ((30, 31); (20, 22)) sind die Verwandten (hinsichtlich α, β_1) von Grad 3 (von Grad 2).

Die Paare (27, 30); (15, 15) ((30, 31); (15, 15)) sind die Verwandten (hinsichtlich α, β_2) von Grad 3 (von Grad 2).

Die Paare (27, 30); (8, 8) ((30, 31); (8, 8)) sind die Verwandten (hinsichtlich α, β_3) von Grad 3 (von Grad 2).

Laut Djadcenko, Schein [**2**] ist die Ordnungszahl jeder endlichen zyklisch-inversen Halbgruppe

$$G_{rp} = [\alpha] : \alpha^{r+p} = \alpha^r \text{ gleich } r(r+1)(2r+1)/6 + p - 1.$$

Wir wenden diese Ergebnisse auf das Problem von Schein [**3**] an: Welche Zahlen können Ordnungszahlen der Unterhalbgruppen der symmetrischen Halbgruppe $\mathcal{I}_n$ sein? Dann gilt

Korollar 6. *Jede Zah1 des Intervals*

$$[r(r+1)(2r+1)/6, r(r+1)(2r+1)/6 + n - r - 1],$$

wobei $1 \leq r \leq n-1$ *ist, ist eine Ordnung der (zyklisch-) inversen Unterhalbgruppe von* $\mathcal{I}_n$. *Für* $r(r+1) \leq n+1$ *(d.h. für* $r \leq -0,5 + \sqrt{0,25+n+1}$ *sind Ordnungen alle Zahlen von dem Interval*

$$[1, r(r+1)(2r+1)/6 + n - r - 1].$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß für die Elemente von $\mathcal{I}_n$ bei fixiertem r von $[1, n-1]$, $p \in [1, n-r]$ und da die Funktion $f(r) = r(r+1)(2r+1)/6$ eine monoton wachsende Funktion ist, sind Ordnungen alle Zahlen des Intervals $[1, f(r) + p - 1]$, wenn $f(r) \leq f(r-1) + p = f(r-1) + n - (r-1)$ ist.

Herrn L.M. Gluskin sei für einige Bemerkungen zum Manuscript der Arbeit gedankt.

LITERATUR

[1] Л.М. Глускин, *Элементарные обобщенные группы*, Матем. Сборник **41**(1957), 23—36.

[2] Г.Г. Дядченко и Б.М. Шаин, *Строенный конечныхмонгоенных инвесых полугрупах*, Мат. записки Ур. Г.У. **9**(1974), 15–21.

[3] *Свердловская тетрадь* (*Нерешенные задачи теории полугрупп*), Свердловск 1969, проблем **43** (Semigroup Forum **4**(1972), 274–280.

[4] Б.М. Шаин, *Симметрическая полугруппа преобразований покриваеця своими инверсными подполугруппами.*

[5] A.H. Clifford, and G.B. Preston, *The Algebraic Thenry of Semigroups*, vol. 1, Amer. Math. Soc. Providence, 1967.

[6] J. Dénes, *Transformations and transformation semigroups*, to appear.

[7] K. Todorov, *Über die inversen Unterhalbgruppen der endlichen symmetrischen Halbgruppe*, Arch. Math. **33**(1979), 23–28.

Math. Fakultät
Bul. "A. Ivanov" 5
1126 Sofia

(Eingegangen den 25 01 1985)