PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 38 (52), 1985, pp. 111–117

NICHTLINEARES RANDWERTPROBLEM 4. ORDNUNG

H. Herold

Abstract. Mittels eines Iterationsverfahrens wird die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des nichtlinearen Randwertproblems

$$w^{(4)} = f(x, w),\ w(a) = w'(a) = 0 = w(b) = w'(b)$$

nachgewiesen, wobei f bei $x = a$ und $x = b$ Singularitäten aufweisen darf. Der Definitionsbereich von f unterliegt einer Minimalforderung (was eine optimale Aussage über den Lösungsverlauf ermöglicht) und die Konvergenzbedingung ist nicht abschwächbar. Als Anwendung wird der Abstand zweifacher Nullstellen der Lösungen gewisser komplexer Differentialgleichungen 4. Ordnung abgeschätzt.

Picard [**3**] bewies mit einem die Greensche Funktion benutzenden Iterationsverfahren einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung des Randwertproblems

$$y'' = f(x, y) \qquad y(a) = y(b) = 0.$$

Das Picardsche Resultat wurde von Avakumović [**1**] in mehrfacher Hinsicht unter nicht abschwächbaren Bedingungen und Erzielung optimaler Aussagen verallgemeinert. Aus der Reihe späterer das 2. Randwertproblem betreffender, hier nicht weiter in Betracht zu ziehender Veröffentlichungen, sei noch die Arbeit von Grunsky [**2**] genannt, in der das Randwertproblem 2. Ordnung im Komplexen unter Heranziehung eines auf einer Flächenintegralformel beruhenden Iterationsverfahrens behandelt wird.

Im folgenden wird nun ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz fr̈ die Lösung des Randwertproblems 4. Ordnung

$$w^{(4)} = f(x, w), \quad w(a) = w'(a) = 0 = w(b) = w'(b)$$

hergeleitet, wobei die komplexwertige Funktion f (die unabhängige Variable x kann o.E. reell angenommen werden) Singularitäten f"ur $x = a$ und $x = b$ aufweisen kann. Dieser Satz enthält in einem Spezialfall insbesondere die Aussagen, welche denjenigen in [**1**] hinsichtlich des 2. Randwertproblems erzielten gänzlich analog sind. Als

AMS Subject Classification (1980): Primary 34B15.

Anwendung des Satzes wird dann der Abstand zweifacher Nullstellen der Lösungen einer Klasse nichtlinearer sowie linearer komplexer Differentialgleichungen 4. Ordnung abgeschätzt.

Im folgenden werden Eigenschaften einer Greenschen Funktion benötigt: Sei $h : (a,b) \to [0,\infty)$ stetig und $h(x) = O((x-a)^\alpha (b-x)^\beta)$ mit $\alpha, \beta \geq -2$. Die Lösung H des Randwertproblems

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} w^{(4)} = h(x) & (a < x < b), \\ w(a) = w'(a) = 0 = w(b) = w'(b) \end{cases}$$

läßt sich mittels der Greenschen Funktion G in der Form darstellen

$$\text{(2)} \qquad H(x) = \int_a^b G(x,s)h(s)ds \qquad (a \leq x \leq b).$$

(*Anmerkungen*: zunächst wäre $\lim_{x\to a} w(x) = 0$ usw. zu schreiben; es genügte, $\alpha, \beta > -3$ zu fordern).

G ist symmetrisch: $G(x,s) = G(s,x)$ für $a \leq x$, $s \leq b$, es gilt

$$\text{(3)} \qquad G(x,s) > 0 \quad \text{für } a < x,\ s < b,$$

$$\text{(4)} \qquad \int_a^b G(x,s)ds = (x-a)^2(b-x)^2/24 \text{ fï } a < x < b$$

und

$$\text{(5)} \qquad G(x,s) \leq \frac{1}{2}\frac{(s-a)^2(b-s)^2}{b-a} \text{ für } a \leq x,\ s \leq b.$$

Bemerkung. In (5) gilt Gleichheit für $x = s = 1/2$.

Zum Beweis dieser Aussagen über G werde o.E. $a = 0$, $b = 1$ angenommen. Dann ist G gegeben durch

$$\text{(6)} \qquad G(x,s) = \begin{cases} 1/6 \cdot s^2(1-x)^2[2x(1-s)+x-s] & \text{für } O \leq s \leq x \leq 1 \\ 1/6 \cdot x^2(1-s)^2[2s(1-x)+s-x] & \text{für } 0 \leq x \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Hier können Symmetrie und Eigenschaft (3) von G unmittelbar abgelesen werden. Die Darstellung (2) für die Lösung von (1) läßt sich mit (6) an Hand der Aufspaltung

$$\int_0^1 G(x,s)h(s)ds = \int_0^x G(x,s)h(s)ds + \int_x^1 G(x,s)h(s)ds$$

verifizieren. Formel (4) ergibt sich durch die Spezialisierung $h(x) \equiv 1$ in (1), (2).

Für die Abschätzung (5) kann man sich auf den Fall $0 < s \leq x$ beschränken. Für festes s sei

$$g(x) := (1-x)^2[2x(1-s)+x-s] \text{ für } 0 < x < 1.$$

Mann findet

$$g(x) \leq \left(\frac{1}{3-2s}\right) = 4\frac{(1-s)^3}{(3-2s)^2} \leq \frac{(1-s)^2}{2}.$$

Also gilt $G(x,s) \leq s^2(1-s)^2/12$ für $O \leq s \leq x$.

Bezeichnung. Eine reell- oder komplexwertige Funktion f mit $|f(x,w)| \leq h(x)$ für alle (x,w) mit $a < x < b$, $|w| < H(x)$ ($w \in \mathbf{R}$ oder $w \in \mathbf{C}$) heißt *zulässig.*

Beispiele zulässiger Funktionen. Stets sei A eine positive Konstante.

1. $|f(x,w)| \leq A$ für $a < x < b$, $|w| \leq A(x-a)^2(b-x)^2/24$ (man beachte (4)).
2. $|f(x,w)| \leq A/(x-a)(b-x)$ für $a < x < b$, $|w| \leq A(b-a)^2/72$

$\left(\text{denn wegen (5) gilt } H(x) \leq \dfrac{A}{12(b-a)} \displaystyle\int_a^b (s-a)(b-s)ds = A(b-a)^2/72\right)$; oder $(a = 0, b = 1$ angenommen):

$$|f(x,w)| \leq A/x(1-x) \text{ für } O < x < 1,$$
$$|w| \leq H(x) = A/6 \cdot [x(1-x) + x^3 \ln x + (1-x)^3 \ln(1-x)]$$

(man beachte: $H(x) = Ax(1-x)/6$, $H(x) \leq H(1/2) = A(1-\ln 2)/24$).

3. $|f(x,w) \leq A/(x-a)^2(b-x)^2$ für $a < x < b$, $|w| \leq A/12$

(denn wegen (5) gilt $H(x) \leq A/12$).

Satz. *Sei $\varphi : (a,b) \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion ($\varphi(x) \not\equiv 0$), so daß $\lim(x-a)^2(b-x)^2\varphi(x)$ für $x \to a$, b existieren. Der kleinste Eigenwert des positiv definiten Eigenwertprohlems*

$$\begin{cases} y^{(4)} - \lambda\varphi(x)y = 0 & (a < x < b), \\ y(a) = y'(a) = 0 = y(b) = y'(b) \end{cases} \tag{7}$$

sei > 1.

Sei f eine zulässige Funktion mit $|f(x,w) - f(x,\widetilde{w}) \leq \varphi(x)|w - \widetilde{w}|$ für alle (x,w), $(x,\widetilde{w})$ mit $a < x < b$ und $|w|$, $\widetilde{w}| \leq H(x)$.

Dann besitzt das Randwertproblem

$$\begin{cases} w^{(4)} = f(x,w) & (a < x < b), \\ w(a) = w'(a) = 0 = w(b) = w'(b) \end{cases} \tag{8}$$

genau eine Lösirng w und für diese gilt $|w(x)| \leq H(x)$ für $a \leq x \leq b$.

Bemerkungen. 1. Für den kleinsten Eigenwert λ_0 von (7) mit $\varphi(x) \equiv L$, L eine positive Konstante, gilt

$$\lambda_0 L(b-a)^4 = \rho^4,$$

wobei $\rho = 4,730\ldots$ die kleinste positive Lösung von $\cos\rho\cos h\rho = 1$ ist.

2. Im Falle $\varphi(x) = A(x-a)^{-2}(b-x)^{-2}$, $(A > 0)$ ist $24A^{-1}$ der kleinste Eigenwert von (7).

3. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß der kleinste Eigenwert von (7) größer 1 ist, lautet

$$\int_a^b (s-a)^2(b-s)^2\varphi(s)ds \le 12(b-a).$$

4. Die Lösung von (8) mit $f(x,w) \equiv h(x)$ ist gerade $w(x) = H(x)$.

5. Ist f auf $[a,b]\times\mathbf{R}$ oder $[a,b]\times\mathbf{C}$ stetig, kann die Forderung der Zulässigkeit von f entfallen (bei Verzicht auf die Aussage über den Lösungsverlauf).

6. Die Bedingung für den kleinsten Eigenwert von (7) kann nicht abgeschwächt werden.

Auf die Beweise der 3. und 5. Bemerkung wird beim Beweis des Satzes eingegangen. Zum Beweis der letzten Bemerkung beachtet man zunächst, daß $\lambda = 1$ der kleinste Eigenwert von (7) mit $\varphi(x) = \lambda_0 L$ ist.

Sei y_0 mit $y_0(x) > 0$ für $a < x < b$ eine Eigenfunktion zu λ_0. Betrachtet wird (8) mit $f(x,w) = \lambda_0 Lw$. Mit $h(x) = \lambda_0 L y_0(x)$ und $H(x) = y_0(x)$ ist f eine zulässige Funktion, für die $f(x,w) \equiv f(x,\widetilde{w}) = \lambda_0 L(w-\widetilde{w})$ gilt. Das betrachtete Randwertproblem besitzt die unendlich vielen Lösungen

$$w(x) = cy_0(x), \ \ |c| \le 1, \ \text{mit } |w(x)| \le H(x).$$

Weiterhin sei festgestellt, daß (8) mit $f(x,w) = \lambda_0 Lw + g(x)$, $g \in \mathbf{C}[a,b]$, i.a. unlösbar ist.

Dem Beweis des Satzes sei noch eine Überlegung vorangestellt:

Das Eigenwertproblem (7) ist gemäß (1), (2) äquivalent der mit einem wegen (5) stetigen und wegen (3) positiven Kern versehenen Fredholmschen Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x,s)\varphi(s)y(s)ds \tag{9}$$

im Raum $\mathbf{C}[a,b]$, die abzählbar viele Eigenwerte ohne endlichen Häufungspunkt bezitzt (Anmerkung: die hier nicht benötigte) Existenz eines Eigenwerts folgt ($\varphi(s) \not\equiv 0$ in einem Teilintervall) aus dem 1. Satz in [**4**]. Es wird gezeigt, daß sämtliche Eigenwerte von (7) positiv sind:

Sei Λ ein komplexer Eigenwert von (7) und Y zugehörige (komplexwertige) Eigenfunktion. Das Y aufgrund der gemäß (9) bestehenden Integraldarstellung bei $x = a$ und $x = b$ von höherer als erster Ordnung verschwindet, ergibt sich aus der Identität

$$Y^{(4)}(x) - \Lambda\varphi(x)Y(x) \equiv 0 \qquad (a < x < b)$$

durch Integration die Existenz von

$$\lim Y'''(x) \ \text{ und } \ \lim Y''(x) \ \text{ für } \ x \to a, \ b$$

Damit folgt durch Multiplikation der Identität mit $\overline{Y}(x)$ und anschließende partielle Integration aufgrund der von Y erfüllten Randbedingungen:

$$\Lambda \int_a^b \varphi(s)|Y(S)|^2 ds = \int_a^b Y^{(4)}(s)\overline{Y}(s)ds = Y'''\overline{Y}\,\Big|^b -$$
$$- \int_a^b Y'''(s)\overline{Y}'(s)ds = -Y''\overline{Y}'\,\Big|_a^b + \int_a^b |Y''(s)|^2 ds = \int_a^b |Y''(s)|^2 ds.$$

Also gilt

$$\Lambda = \int_a^b |Y''(s)|^2 ds \left(\int_a^b \varphi(s)|Y(s)|^2 ds \right)^{-1} > 0.$$

Damit ist gezeigt, daß (7) positiv definit ist.

Die Lösung des Randwertproblems (8) soll nun mittels des Iterationsverfahrens

$$w_{n+1}(x) = \int_a^b G(x,s)f(s,w_n(s))ds \qquad (n \in \mathbf{N}) \tag{10}$$

gewonnen werden.

Ist $w_n \in \mathbf{C}[a,b]$ mit $|w_n(x)| \le H(x)$ für $a \le x \le b$, so gilt nach Voraussetzung

$$|f(s,w_n(s)) \le h(s)ds \text{ für } a < s < b,$$

so daß aus (1) wegen (3)

$$|w_{n+1}(x)| \le \int_a^b G(x,s)h(s)ds = H(x) \text{ für } a \le x \le b$$

folgt. Die unbegrenzte Durchführbarkeit des Iteratonsprozesses (1) ist damit gewährleistet. Für eine Grenzfunktion w der Folge $\{w_n\}$ gilt ebenfalls

$$|w_(x)| \le H(x) \text{ für } a \le x \le b.$$

Aus (10) erhält man aufgrund der für f vorausgesetzten varallgemeinerten Lipschitzbedingung für $n \ge 2$

$$|w_{n+1}(x) - w_n(x)| \le \int_a^b G(x,s)h(s)|w_n(s) - w_{n-1}(s)|ds. \tag{11}$$

Setzt man $p_1(x) := |w_2(x) - w_1(x)|$ und definiert für $n \ge 2$

$$p_n(x) := \int_a^b G(x,s)\varphi(s)p_{n-1}(s)ds, \tag{12}$$

so folgt wegen (11) für alle $n \in \mathbf{N}$

$$|w_{n+1}(x) - w_n(x)| \le p_n(x).$$

Setzt man $Pn(x) := \sum_{k=1}^{n} p_k(x)$, dann erhält man aus (12) für $n \geq 2$

$$P_n(x) = \int_a^b G(x,s)\varphi(s)P_{n-1}(s)ds + P_1(x).$$

Da voraussetzungsgemäß die Integralgleichung (9) keinen Eigenwert λ mit $|\lambda| \leq 1$ hat ergibt sich bekanntlich die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{P_n\}$ auf $[a,b]$, weshalb dann auch gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{w_n\}$ auf $[a,b]$ vorliegt.

Um die Eindeutigkeit der Lösung nachzuweisen, nimmt man an, w und $\widetilde{w}$ seien zwei Lösungen des Randwertproblems (8). Dann folgt

$$|x_n(x)\widetilde{w}(x)| \leq \int_a^b G(x,s)\varphi(s)P_{n-1}ds + P_1(x).$$

Setzt man $p_1(x) := |w(x) - \widetilde{w}(x)|$ und definiert p_n durch (12), so läßt sich $|w(x) - \widetilde{w}(x)| \leq p_n(x)$ folgern, woraus $w(x) - \widetilde{w}(x) \equiv 0$ geschlossen wird.

Die 5. Bemerkung folgt daraus, daß beim Konvergenzbeweis nur verwendet wird, daßdie Bildung einer Iterationsfolge nach (10) gewährleistet ist.

Beweis der 3. Bemerkung: Sei λ_1 der kleinste Eigenwert von (9) und y_1 eine zugehörige Eigenfunktion. Dann folgt

$$|y_1(x)| < \lambda_1 \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x)| \int_a^b G(x,s)\varphi(s)ds.$$

Setzt man hier speziell $x = x_0$, wobei $|y_1(x_0)| = \max_{a \leq x \leq b} |y_1(x)|$ gelte, so erhält man hieraus und mit (5)

$$1 < \lambda_1 \int_a^b G(x_0,s)\varphi(s)ds < \lambda_1 \frac{1}{12(b-a)} \int_a^b (s-a)^2(b-s)^2\varphi(s)ds.$$

Aufgrund der Voraussetzung folgt also $\lambda_1 > 1$.

Schließlich wird noch eine Anwendung des Satzes gegeben:

Die Funktion f erfülle neben den Ioraussetzungen im Satz mit $\varphi(x) \equiv L > 0$ noch die Bedingung $f(x,0) \equiv 0$. Sind dann a und b aufeinarrderfolgende zweifache Nullstellen einer nichttrivialen Lösung der Differentialgleichung $w^{(4)} = f(x,w)$, so gilt $b - a \geq \rho/\sqrt[4]{L}$.

Wäre diese Ungleichung nämlich falsch, könnte aufgrund des Satzes in Verbindung mit der 1. Bemerkung das Randwertproblem (8) neben der Lösung $w(x) \equiv 0$ keine weitere Lösung besitzen.

Entsprechend folgt unter Beachtung der 5. Bemerkung:

Ist $g : [a,b] \to \mathbf{C}$ stetig mit $|g(x)| \leq L$ für $a \leq x \leq b$ und sind a, b aufeinanderfolgende zweifache Nullstellen einer nichttrivialen Lösung der Differentialgleichung $w^{(4)} + g(x)w = 0$, so gilt $b - a \geq \rho/\sqrt[4]{L}$.

Bemerkung. Diese Abschätzung ist bestmöglich.

LITERATUR

[1] V.G. Avakumović, *Über die Randwertaufgabe zweiter Ordnung*, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. **4**(1952), 1–8.

[2] H. Grunsky, *Ein nichtlineares Randwertproblem im Komplexen*, Math. Nachr. **19**(1958), 255–264.

[3] E. Picard, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations diffé無retielles*, Paris, 1930.

[4] H. Herold, *Ein singuläres lineares Eingenwertproblem*, ZAMM **54**(1974), 741–743.

Fachbereich Mathematik
Universität Marburg
Marburg/Lahn, BRD

(Eingegangen den 20 02 1984)