PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 42 (56), 1987, pp. 63–70

UNE GÉNÉRALISATION NATURELLE DU PRODUIT SCALAIRE DANS UN ESPACE NORMÉ ET SON UTILISATION*

Pavle M. Miličić

Résumé. Pour un espace X normé, réel ou complexe, on définit avec (1), (2) et (5) la généralisation unique du produit scalaire. On démontre que cette généralisation a des propriétés meilleures que celles des généralisations correspondantes de Tapia [9] et Abreu, Canavati [1]. Mettant a profit la fonctionnelle g définie par (2), on établit certaines propriétés nouvelles des notions suivantes: convexité stricte (CS), complexe convexité stricte (cCS), convexité c_1-stricte (Cc_1S), lissité (L), complexe lissité absolue (cLA) et c_1-lissité absolue (c_1LA).

Nous nous tiendrons à la terminologie suivante.

X est un espace normé sur le corps Φ ($\Phi = R$ ou $\Phi = C$). X^* est le dual topologique de X. $S(X) := \{x \in X \mid ||x|| = 1\}$, $U(X) := \{x \in X \mid ||x|| \leq 1\}$. $J_x := \{f \in X^* \mid f(x) = ||f||\,||x||, ||f|| = ||x||\}$.

$$\tau_\pm(x,y) = \lim_{t\to\pm 0} t^{-1}(||x+ty|| - ||x||); \quad x,y \in X, x \neq 0. \tag{1}$$

$$g(x,y) := (||x||/2)(\tau_-(x,y) + \tau_+(x,y)). \tag{2}$$

$G_x := \{y \in X | \tau_-(x,y) = \tau_+(x,y)\}$. $d(y,G_x) := \inf ||y-g||$, $g \in G_x$. Pour $Y \subset X^*$, $Y_\perp = \{x \in X \mid (\forall f \in Y) f(x) = 0\}$. $(\mathrm{Re}J_x)_\perp := \{h \in X \mid (\forall f \in J_x)\mathrm{Re}f(h) = 0\}[x]$ désigne la combinaison linéaire sur $\{x\}$.

$$\Delta := \{z \in C \mid |z| = 1\},\ D := \{z \mid |z| < 1\},\ \overline{D} := D \cup \Delta.$$

$$\Delta_0 := \{-1,1\},\ D_0 := (-1,1) \subset R,\ \overline{D}_0 := [-1,1] \subset R.$$

$\Delta_1 = \{-1,1,-i,i\} \subset C$, D_1 est l'intérleur du carré dont les côtés sont les segments aux extremités -1, 1, $-i$, i. $\overline{D}$ est l'ensemble D_1 avec sa frontiére.

Soulignons que les fonctionnelles τ_-, τ_+ et g existent sur X^2, pour chaque espace X.

---

*) Communiqué au First lnternational Workshop in Analysis and its Applications, Dubrovnik — Kupari, 01–11 06 1986.

AMS Subject Classification (1980): Primary 46B20.

Il est bien connu que le point $x \in S(X)$ est un point lisse de la sphére $S(X)$ si et seulement si $\tau_-(x,y) = \tau_+(x,y)$ pour tout $y \in X$. Un espace X est lisse si et seulement si chaque $x \in S(X)$ est un point lisse. Le point $x \in S(X)$ est un point extrême de $U(X)$ si $||x+y|| \leq 1$ entraîne $y = 0$. Si chaque point de $S(X)$ est un point extrême de $U(X)$, on dit que l'espace X est strictement convexe (SC).

Ajoutons encore quelques définitions connues.

Définition 1. [10]. On dit que $x \in S(X)$ est un point complexe extrême de $U(X)$ (point c-extrême) si l'implication

$$||x + \varDelta y|| \leq 1 \Rightarrow y = 0 \tag{3}$$

est vraie.

On dit que X est un espace complexe strictement convexe (cSC) si chaque point $x \in X$ est un point c-extrême de $U(X)$. En substituant, dans (3), $\varDelta_1$, à $\varDelta$, on obtient la notion de convexité c_1-stricte (Cc_1S) et en substituant, dans (3), $\varDelta_0$ à $\varDelta$, on obtient (CS).

Definition 2. [5]. On dit que $x \in S(X)$ est un point complexe absolument lisse de $S(X)$ si pour chaque $y \in X$ il existe $\lambda \in \varDelta$ tel que

$$\tau_-(x, \lambda y) = \tau_+(x, \lambda y).$$

On dit que X est un espace absolument c-lisse (cLA) si chaque $x \in S(X)$ est un point complexe absolument lisse. Par reduction de l'ensemble $\varDelta$ à $\varDelta_1$ on obtient la définition de la notion de c_1-lissité absolue (c_1LA) d'un espace X, et en substituant $\{1\}$ à $\varDelta$ on obtient la noton de lissité (L) d'un espace X.

Sans doute, le produit scalaire $(.,.)$ est la fonctionnelle la plus importante sur X_2, pour chaque espace préhilbertien X. II est synonime de la méthodologie d'un espace préhilbertien. A causse de cela on a considéré beaucoup de généralisations du produit scalaire dans des espaces normés. Mais, la plupart de ces généralisations ne sont pas applicatives. A cause de cela citons une proposition de Tapia [9]: Pour qu'une application $\langle .,. \rangle : X^2 \to \varPhi$ soit une généralisation naturelle du produit scalaire, elle doit satisfaire aux conditions suivantes: (a) $\langle x,y \rangle$ est bien défini; (b) $\langle x,x \rangle = ||x||^2$; (c) $|\langle x,y \rangle| \leq ||x||\,||y||$ (l'inégalité de Cauchy-Schwarz-Buniakovsky); (d) s'il existe un produit scalaire $(.,.)$ sur X^2, alors on a $\langle x,y \rangle = (x,y)$, pour tout $x, y \in X$.

L'application $\langle .,. \rangle$ définie par Tapia [9] avec

$$\langle x,y \rangle := ||x|| \tau_+(x,y), \tag{4}$$

pour un espace reél posséde les propriétés (a)–(d).

L'application $[.,.]$ que nous avons définie [6] avec

$$[y,x] := g(x,y) - ig(x,iy), \tag{5}$$

pour un espace complexe posséde les propriétés (a)–(d).

Abreu et Canavati ont défini une génèralisation du produit scalaire [1] sous la forme suivante: Soit

$$\mathcal{F} := \{F \mid F \text{ est un ensemble compact, convexe et borné de } \Phi\}.$$

Alors, pour tout X par

$$(y;x) := \{\varphi(y) | \varphi \in J_x\} \tag{6}$$

on définit l'application $(.;.) : X^2 \to \mathcal{F}$ qui a les propriétés suivantes:
(i) $(x+y;z) \subset (x;z)+(y;z)$, (ii) $(\lambda x;y) = \lambda(x;y)$,
(iii) $(x;x) = \{||x||^2\}$, (iv) $\max|(x;y)| \leq ||x||\,||y||$.

Signalons que notre généralisation (5) (pour le cas réel (2)) est apparue avant les généralisations (4) et (6). Cependant les généralisations (5) et (2) ont de meilleures propriétés que les généralisations (4) et (6). En effet: 1) les fonctionnelles g et $[.,.]$ sont définies de maniére unique pour chaque espace normé et elles remplissent les conditions (a)-(d) (voir (9) et (13) de [6]); 2) la fonctionnelle g est homogéne par rapport au second argument, mais la fonctionnelle n'est pas homogene (voir (1) et [3] de 6); 3) dans quelques espaces non triviaux (les espaces qui ne sont pas lisses, par exemple L^1) la fonctionnelle g ($[.,.]$) est additive par rapporte au second argument (par rapport au premier argument), mais la fonctionnelle $\langle .,.\rangle$ (l'application $(.;.)$) ne l'est pas (exemple 1 et exemple 2 de [7]); 4) si X est lisse (par exemple $X = L^p$, $p > 1$, alors on a

$$\{\langle x,y\rangle\} = \{g(x,y)\} = (y;x), x,y \in X \text{ pour le cas réel,}$$
$$\{[y,x]\} = (y;x), x,y \in X \text{ pour le cas complexe.}$$

Le vrai rapport des généralisations $[.,.]$ et $(.;.)$ donne le théorème 1. Mais, disons d'abord que le nombre $c = \alpha + i\beta$ est le centre de l'ensemble $F \in \mathcal{F}$ si le nombre α est le centre de la projection de F sur l'axe Ox, et que β est le centre de la projection de F sur l'axe Oy du plan xOy.

Théorème 1. *Pour chaque $x, y \in X$, $x \neq 0$, $[y,x]$ est le centre de l'ensemble $(y;x)$.*

Démonstration. Tout d'abord soulignons que, pour tout $y \in X$ et tout $\varphi \in J_x$ on a

$$||x||\tau_-(x,y) \leq \operatorname{Re}\varphi(y) \leq ||x||\tau_+(x,y) \qquad [4, \text{p. } 349]. \tag{7}$$

Donc,

$$||x||\tau_-(x,iy) \leq \operatorname{Re}(iy) \leq ||x||\tau_+(x,iy). \tag{8}$$

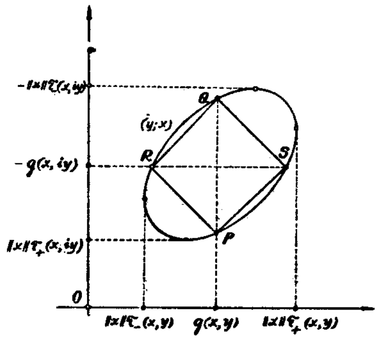
Comme on a $\operatorname{Re}\varphi(iy) = -\operatorname{Im}\varphi(y)$, l'inégalité (8) donne

$$-||x||\tau_+(x,iy) \leq \operatorname{Im}\varphi(y) \leq -||x||\tau_-(x,iy).$$

En outre, pour chaque $\alpha \in R$ tel que $||x||\tau_-(x,y) \leq \alpha \leq ||x||\tau_+(x,y)$, il existe un $\varphi \in J_x$ tel que $\operatorname{Re}\varphi(y) = \alpha$ [4, p. 349]. Étant donné qu'en plus

$$||x||\tau_-(x,y) \leq g(x,y) \leq ||x||\tau_+(x,y)$$

il existent des $\varphi, \psi \in J_x$ tels que $\operatorname{Re}\varphi(y) = g(x,y)$ et $\operatorname{Im}\psi(y) = -g(x,iy)$. Soient alors $A_x(y) = \{\varphi(y) \mid \varphi \in J_x, \operatorname{Re}\varphi(y) = g(x,y)\}$, $B_x(y) = \{\psi(y) \mid \psi \in J_x, \operatorname{Im}\psi(y) = -g(x,iy)\}$. L'ensemble $(y;x)$ est compact, convexe, fermé et borné dans $C(R)$. Cela signifie que les ensembles $A_x(y)$ et $B_x(y)$ sont deux segments orthogonaux (ou l'un d'eux est un singleton). Désignons par P et Q les extrémités du segment $A_x(y)$ et par R et S les extrémités du segment $B_x(y)$ (Fig. 1). Alors, $PSQR$ appartient à l'ensemble $(y;x)$ et l'intersection de leurs diagonales, le point $g(x,y) - ig(x,iy)$, appartient à cet ensemble.



Corollaire 1. *La fonctionnelle* $[.,.]$ *possède les propriétés suivanles:*

$$[\lambda x, y] = \lambda[x,y]; \quad x, y \in X, \tag{9}$$

$$|[x,y]| \leq ||x||\,||y||; \quad x, y \in X. \tag{10}$$

Démonstration. D'après (ii) les ensembles $(\lambda x; y)$ et $\lambda(x;y)$ ont des centres égaux, c'est-à-dire on a (9). En appliquant (iv) on obtient (10).

De l'inégalité (10) s'ensuit l'inégalité

$$g^2(x,y) + g^2(x,iy) \leq ||x||^2||y||. \tag{11}$$

Cette inégalité est plus exacte que l'inégalité correspondante dans [6].

Dans le cas réel, le théorème suivant a été démontré par Godini [2]. Nous donnons une démonstration nouvelle de ce théorème pour le cas complexe ou le cas réel.

Théorème 2. *Pour* X *sur* Φ ($\Phi = R$ *ou* $\Phi = C$) *on a la représentation*

$$G_x = (Re\, J_u)_\perp \oplus [x], \quad x \in X. \tag{12}$$

Démonstration. Soit $y \in (\operatorname{Re} J_x)_\perp \oplus [x]$. Alors il existe un scalaire unique $\lambda = \alpha + i\beta$ et un vecteur unique $h \in (\operatorname{Re} J_x)_\perp$ tels que $y = \lambda x + h$. D'après (3) dans [7] pour un espace X on a

$$\tau_\pm(x, ax + b) = a||x|| + b\tau_\pm(x,y); \quad a, b \in R, b \geq 0. \tag{13}$$

Cette égalité est valable aussi pour X complexe. En effect si X_r est l'espace normé réel associé a l'espace X complexe, alors, pour chaque $x, y \in X$ il s'ensuit que $x, y \in X_r$. Par conséquent,d'aprés (13), on a

$$\tau_\pm(x,y) = \tau_\pm(x, \alpha x + i\beta x + h) = \alpha||x|| + \tau_\pm(x, i\beta x + h).$$

Comme $\tau_\pm(x, i\beta x + h) \gtreqless \tau_\pm(x, i\beta x) + \tau_\pm(x, h)$ [6, (14)] et étant donné qu'il existe des $\varphi_1, \varphi_2 \in J_x$ tels que $\operatorname{Re}\varphi_1(h) = \tau_-(x,h)$ et $\operatorname{Re}\varphi_1(h) = \tau_+(x,h)$, il s'ensuit que $\tau_\pm(x,h) = 0$. De plus, on vérifie sans peine que $\tau_\pm(x, i\beta x) = \tau_\pm(x, ix) = 0$ pour $\beta > 0$ et $\tau_\pm(x, i\beta x) = \tau_\mp(x, ix) = 0$ pour $\beta < 0$. Par conséquent on a $\tau_-(x,y) = \tau_+(x,y) = \alpha||x||$. On déduit de ce qui précède que

$$(\operatorname{Re} J_x)_\perp \oplus [x] \subset G_x.$$

Soit maintenant $y \in X$. Alors il existe un $f \in J_x$ tel que le nombre $f(y)$ est le centre de l'ensemble $(y;x)$ (Théorème 1). Puisque $x \notin \operatorname{Ker} f$, il existe un $h \in \operatorname{Ker} f$ et un $\lambda \in \Phi$ tels que $y = \lambda x + h$. Suivant la démonstration du théorème 1, dans ce cas, il s'ensuit que $\operatorname{Re}(y;x)$ est un singleton; ainsi pour tout $\varphi \in J_x$, on a $\operatorname{Re}\varphi(y) = g(x,y) = \operatorname{Re} f(y)$ ou $\operatorname{Re}\varphi(h) + \operatorname{Re}\lambda||x||^2 = 0 + \operatorname{Re}\lambda||g||^2$. C'est-à-dire, $h \in \operatorname{Ker}\operatorname{Re}\varphi$, et nous avons $G_x \subset (\operatorname{Re} J_x)_\perp \oplus [x]$.

Théorème 3. *Pour tout X normé on a*

$$||x||(\tau_+(x,y) - d(y, G_x)) \le g(x,y) \le ||x||(\tau_-(x,y) + d(y, G_x)),\ x \ne 0. \tag{14}$$

Démonstration. Soit X_r l'espace normé réel associé a l'espace X. L'ensemble G_x est un sous-espace de l'espace X_r [2]. Soient $f_1, f_2 \in J_x$ tels que $\operatorname{Re} f_1(y) = ||x||\tau_+(x,y)$ et $\operatorname{Re} f_2(y) = ||x||\tau_-(x,y)$. De (12) il s'ensuit que $G_x \subset \operatorname{Ker}(f_1 - f_2)/2$ ou $\operatorname{Re}(f_1 - f_2)/2 \in G_x^\perp$. En outre $\operatorname{Re}(f_1 - f_2)/2 \in \operatorname{Re} X^*$ et $||\operatorname{Re}(f_1 - f_2)/2|| \le 1$. (8) dans [3] entraine pour X réel

$$d(y, G_x) = \max\{\varphi(y) \mid \varphi \in G_x^\perp, ||\varphi|| \le 1\}. \tag{15}$$

Pour $\varphi = \operatorname{Re}(f_1 - f_2)/2$ de (15) on obtient

$$d(y, G_x) \ge \operatorname{Re}(f_1 - f_2)/2(y) = (\tau_+(x,y) - \tau_-(x,y))/2.$$

Donc, pour tout X réel ou complexe on a

$$\tau_+(x,y) - \tau_-(x,y) \le 2\, d(y, G_x), \quad x, y \in X. \tag{16}$$

Par définition de la fonctionnelle g nous avons

$$\begin{aligned} g(x,y) &= ||x||\tau_-(x,y) + (||x||/2)\,(\tau_+(x,y) - \tau_-(x,y)) \\ &= ||x||\tau_+(x,y) - (||x||/2)\,(\tau_+(x,y) - \tau_-(x,y)). \end{aligned}$$

En appliquant encore (16) on obtient (14).

Corollaire 2. *Pour tout X réel ou complexe on a*

$$\begin{aligned} & g(x,y) + g(x,z) - ||x||(d(y, G_x) + d(z, G_x)) \le g(x, y+z) \le \\ & \le g(x,y) + g(x,z) + ||x||(d(y, G_x) + d(z, G_x)); \quad x, y, z \in X. \end{aligned} \tag{17}$$

Démonstration.

$$g(x,y)+g(x,z)\leq ||x||(\tau_-(x,y)+\tau_-(x,z)+d(y,G_x)+d(z,G_x))\leq$$
$$\leq ||x||\tau_-(x,y+z)+d(y,G_x)+d(z,G_x)\leq g(x,y+z)+||x||(d(y,G_x)+d(z,G_x))$$

De ce qui précède il s'ensuit que

$$g(x,y+z)\geq g(x,y)+g(x,z)-||x||(d(y,G_x)+d(z,G_x)).$$

Utiliser les inégalités (14),

$$\tau_\pm(x,y+z)\gtreqless\tau_\pm(x,y)+\tau_\pm(x,z)\quad\text{et}\quad ||x||\tau_-(x,y)\leq g(x,y)\leq||x||\tau_+(x,y).$$

On obtient de facon analogue

$$g(x,y+z)\leq g(x,y)+g(x,z)+||x||(d(y,G_x)+d(z,G_x)).$$

Nous allons prouver, maintenant, que la fonctionnelle g est trés importante pour certaines caracterisations geometriques de l'espace X.

Théorème 4. *$x\in S(X)$ est un point c-extrême (c_i-extrême $i=0,1$) si et seulement si pour tout $\lambda\in\Delta$ ($\lambda\in\Delta_i$) on a*

$$g(x+\lambda y,\lambda y)=0\Rightarrow y=0. \tag{18}$$

Démonstration. Premièrement citons le théorème 1 de [8]: Soit $x\in S(X)$ et $y\in X$ tels que $(\forall\lambda\in\Delta)||x+\lambda y||\leq 1$; alors:

$$(\forall f\in J_x)f(y)=0\quad\text{et}\quad(\forall\lambda\in\overline{D})\,||x+\lambda y||=1.$$

On vérifie sans peine que ce théorème reste vrai si l'on substitue Δ_i $(i=0,1)$ à Δ et $\overline{D_i}$ à $\overline{D}$. Nous allons prouver le théorème 4 pour le cas Δ. Soit $x\in S(X)$ un point c-extreme de $U(X)$ et $(\forall\lambda\in\Delta)g(x+\lambda y,\lambda y)=0$. Alors on peut écrire $g(x+\lambda y,\lambda y+x-x)=0$, d'ou, d'aprés (13), on aura $||x+\lambda y||^2=g(x+\lambda y,-x)\leq ||x+\lambda y||$. Donc, $(\forall\lambda\in\Delta)||x+\lambda y||\leq 1$ et par conséquent $y=0$.

Soit maintenent

$$(V\lambda\in\Delta)\,||x+\lambda y||\leq 1. \tag{19}$$

Cette condition d'aprés le resultat cité dans [8] donne

$$(\forall\lambda\in\overline{D})\,||x+\lambda y||=1. \tag{20}$$

Ceci signifie que, pour tout $\lambda\in\overline{D}$,

$$\tau_-(x+\lambda y,\lambda y)\leq g(x+\lambda y,\lambda y)\leq\tau_+(x+\lambda y,\lambda y)\quad\text{ou}$$

$$\lim_{t\to-0}t^{-1}[||x+\lambda(1+t)y||-1]\leq g(x+\lambda y,\lambda y)\leq\lim_{t\to+0}t^{-1}[||x+\lambda(t+1)y||-1]. \tag{21}$$

Pour $\lambda = e^{i\varphi}/3$, $\varphi \in R$ et $t \in [-1, 1]$ on a $||x + \lambda(1 + t)y|| = 1$, puisque les limites antérieures sont égales à zéro. Donc, pour $\lambda \in \Delta$ on a

$$g(x + \lambda y/2, \lambda y/2) = 0$$

et, d'aprés (18), $y/2 = 0$, c'est-à-dire $y = 0$.

COROLLAIRE 3. *Un espace X est c-strictement convexe (c_i-strictement convexe $i = 0, 1$) si et seulement si pour tout $x \in S(X)$ on a l'implication* (18).

Par conséquent nous obtenons un critére nouveau pour la convexité d'un espace X sous la forme:

COROLLAIRE 4. *Un espace X est strictement convexe si et seulement si pour tout $x \in S(X)$ on a l'implication $g(x \pm y, y) = 0 \Rightarrow y = 0$.*

THÉORÈME 5. *Un point $x \in S(X)$ est un point absolument c-lisse (c_i-lisse) de la sphére $S(X)$ si et seulement si pour tout $y \in X$ il existe un $\lambda \in \Delta$ ($\lambda \in \Delta_i$) tel que*

$$\lim_{t\to 0} g(x + t\lambda y, \lambda y) = g(x, \lambda y) \qquad (t \in R\backslash\{0\}) \text{ et} \tag{22}$$

$$d(x, G_{x+t\lambda y}) = o(t) \quad (t \to 0). \tag{23}$$

Démonstration. Soient $x \in S(X)$, $t > 0$, $\lambda \in X$, $x + t\lambda y \neq 0$, pour lesquels on a (22) et (23). En utilisant les proprietés: $|g(x, y)| \leq ||x||\,||y||$, $g(x, x) = ||x||^2$ et le corollaire 2, nous obtenons

$$||x + t\lambda y|| - ||x|| = \frac{||x + t\lambda y||^2 - ||x||\,||x + t\lambda y||}{||x + t\lambda y||} \leq \frac{g(x + t\lambda y, x + t\lambda y) - |g(x + t\lambda y, x)|}{||x + t\lambda y||} \leq$$
$$\frac{|g(x + t\lambda y, x)| + ||x + t\lambda y||\, d(x, G_{x+t\lambda y}) + g(x + t\lambda y, t\lambda y) + ||x + t\lambda y||\, d(t\lambda y, G_{x+t\lambda y})}{||x + t\lambda y||} -$$
$$- \frac{|g(x + t\lambda y, x)|}{||x + t\lambda y||} = \frac{t\, g(x + t\lambda y, \lambda y)}{||x + t\lambda y||} + d(x, G_{x+t\lambda y}) + d(t\lambda y, G_{x+t\lambda y}).$$

Comme
$$\begin{aligned} d(t\lambda y, G_{x+t\lambda y}) &= d(x + t\lambda y - x, G_{x+t\lambda y}) \\ &\leq d(x + t\lambda y, G_{x+t\lambda y}) + d(-x, G_{x+t\lambda y}) = d(x, G_{x+t\lambda y}) \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\frac{||x + t\lambda y|| - ||x||}{t} \leq \frac{g(x + t\lambda y, \lambda y||)}{||x + t\lambda y||} + 2\frac{d(x, G_{x+t\lambda y})}{t}. \tag{24}$$

Donc, l'inégalité (24) et les conditions (22) et (23) impliquent l'inégalité

$$\tau_+(x, \lambda y) \leq g(x, \lambda y) \tag{25}$$

Comme on a, encore, $g(x, \lambda y) \leq \tau_+(x, \lambda y)$, il s'ensuit que $g(x, \lambda y) = \tau_+(x, \lambda y) = \tau_-(x, \lambda y)$. Si, pour $t = t_0 \neq 0$ on a $x + t_0\lambda y = 0$ alors $y = -(t_0\lambda)^{-1}x$ et

$$u^{-1}(||x + uy|| - ||x||) = u^{-1}(|1 - (t_0\lambda)^{-1}u| - 1) = u^{-1}(\sqrt{1 - 2\varrho u\, \cos\varphi + u^2\varrho^2} - 1)$$

où $u \in R\backslash\{0\}$ et $(t_0\lambda)^{-1} = \varrho \cos\varphi + i\varrho \sin\varphi$. Par conséquent $\tau_\pm(x,y) = -\varrho\cos\varphi$, c'est-à-dire $\tau_-(x,y) = \tau_+(x,y)$.

Supposons maintenant, pour $x \in S(X)$, $y \in X$, qu'il existe un $\lambda \in \Delta$ tel que

$$\tau_-(x,\lambda y) = \tau_+(x,\lambda y). \tag{26}$$

Soit $f(x,\lambda y,t) := ||x+t\lambda y|| - ||x||$; $x,y \in X$, $x \neq 0$, $t \in R$. Il est évident que la fonction réelle f est convexe par rapport à t. Comme on a

$$\lim_{t\to\pm 0} \frac{f(x,\lambda y,t) - f(x,\lambda y,0)}{t} = \lim_{t\to\pm 0} \frac{||x+t\lambda y|| - ||x||}{t} = \tau_\pm(x,\lambda y)$$

de (26) on déduit que la fonction f est dérivable par rapport à t, pour $t=0$. Alors, d'apres le théorème sur une fonction convexe dérivable, il s'ensuit que la dérivée $\partial f/\partial t$ est une fonction continue á gauche dans le point $t=0$, et continue à droite dans $t=0$. Désignons par $f'_\pm(x,\lambda y,u)$ la dérivée à droite (à gauche) dans le point $t=u$. Il est évident que

$$f'_\pm(x,\lambda y,u) = \tau_\pm(x+\lambda uy,\lambda y), \quad f'_\pm(x,\lambda y,0) = \tau_\pm(x,\lambda y), \tag{27}$$

ce qui prouve qu'on a

$$\lim_{u\to 0} f'_\pm(x,\lambda y,u) = f'_\pm(x,\lambda y,0) = \tau_\pm(x,\lambda y). \tag{28}$$

Comme on a, encore,

$$||x+u\lambda y||\tau_-(x+u\lambda y,\lambda y) \le g(x+\lambda uy,\lambda y) \le ||x+u\lambda y||\tau_+(x+u\lambda y,\lambda y),$$

de (27) et (28) nous déduisons $\lim\limits_{u\to 0} g(x+u\lambda y,\lambda y) = g(x,\lambda y)$. Il faut, encore, vérifier que $d(x,G_{x+t\lambda y}) = o(t)$. Cependant, pour $x,y \in X$, $\lambda_0 \in \Delta$ et $t \in R$ fixés, il existe un $\lambda \in \Delta$ tel que $\tau_-(x+t\lambda_0 y,\lambda x) = \tau_+(x+t\lambda_0 y,\lambda x)$. Alors $\lambda x \in G_{x+t\lambda_0 y}$ et, d'aprés le théorème 2, $x \in G_{x+t\lambda_0 y}$. Par conséquent $d(x,G_{x+t\lambda_0 y}) = 0$.

COROLLAIRE 5. *Un espace X est absolument c-lisse (c_i-lisse) si et seulement si on a* (22) *et* (23) *pour chaque $x \in S(X)$.*

COROLLAIRE 6. *Un espace X est lisse si et seulement si, pour tout $x,y \in X$, on a $\lim\limits_{t\to 0} g(x+ty,y) = g(x,y)$ et $d(x,G_{x+ty}) = o(t)$ $(t\to 0)$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. L. Abreu, J. A. Canavati, *A generalization of semi-inner product spaces*, Boll. U. M. I (5) **18-B** (1981), 67–86.

[2] G. Godini, *On subspaces of smoothness and application to best aproximation*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. **17** (1972), 253–260.

[3] G. Godini, *Geometrical properties of a class of Banach spaces including the spaces c_1 and L^p $(1 \le p < \infty)$*, Math. Ann. **243** (1979), 197–212.

[4] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968.

[5] M. Hladnik, M. Omladič, *On complex rotundity and smoothness*, Glasnik Mat. **12** (**32**) (1977), 73–79.

[6] P. M. Miličić, *Sur le semi-produit scalaire dans quelques espaces vectoriel normés*, Mat. Vesnik **8** (**23**) (1971), 181–185.

[7] P. M. Miličić, *Sur les espaces semi-lisses*, Mat. Vesnik **36** (1984), 222–226.

[8] P. M. Miličić, *Sur les espaces strictement c-convexe et les espaces c-lisses*, Mat. Vesnik, to appear.

[9] R. Tapia, *A characterization of inner-prodact spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 569–574.

[10] E. Thorp, R. Whitley, *The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 640–646.

Institut za matematiku
Prirodno-matematički fakultet
11000 Beograd
Jugoslavija

(Reçu le 23 10 1986)