PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 43 (57), 1988, 17–25

PERMANENCE DE RELATIONS DE RECCURENCE DANS CERTAINS DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES

Guy Robin

Résumé. On étudie dans cet article les polynômes que interviennent dans le développement asymptotique de nombreuses fonctions arithmétiques. On montre que, pour plusieurs classes de fonctions, ces polynômes vérifient une équation différentielle simple. C'est le cas par exemple pour la fonction $k^{ième}$ nombre premier.

I Introduction

Le Théorème d'analyse qui fait principalement l'objet de cet article est essentiellement un théorème sur des familles de polynômes liées par des relations de récurrence. La démonstration de cas relations est purement formelle et n'a pu être menée à bien que par l'utilisation d'un langage de calcul formel. Ce langage— en l'occurence MACSYMA—nous a servi à vérifier nos conjectures, à déterminer certaines relations et surtout à effectuer des calculs assez complexes; calculer à la main les 3 ou 4 premiers termes du développement asymptotique de la fonction $Li(\sqrt{(L^{-1}(x))}$ n'est pas simple.

Dans un article datant de 1970 (Comtet [**3**]) étudie le développement asymptotique de la fonction y, fonction réciproque de la fonction

$$x \to x/(\log x)^\alpha \quad (\alpha \neq 0).$$

On peut écrire ses résultats sous la forme suivante:
lorsque $x \to \infty$, pour tout N entier, il existe $Q_1, Q_1, \dots , Q_N$ tels que

$$y = x(\log)^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \alpha^n \frac{Q_n(\log\log x)}{(\log x)^n} + o\left(\frac{1}{(\log x)^N}\right)\right)$$

relation que l'on écrira:

$$y \approx x(\log x)^\alpha \left(1 + \sum_{n\geq 1} \alpha^n \frac{Q_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right). \tag{1}$$

AMS Subject Classification (1980): Primary 10 H 25, 41 A 10

On peut alors remarquer que les $(Q_n)_{n\geq 0}$ sont des polynômes vérifiant

$$Q_0 = 1, \qquad \forall n \geq 0 \ Q'_{n+1} = Q'_n - (n-\alpha)Q_n, \qquad \forall n \geq 1 \ \ Q_n(0) = 0.$$

En théorie anlytique des nombres, on recontre souvent des développements asymptotiques possédant des propriétés analogues.

Ainsi Cipolla ([**2**]) a, en 1902, étudié le développement asymptotique du $k^{i\grave{e}me}$ nombre premier p_k et prouvé que:

$$p_k \approx k \log k \left(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{Q_n(\log\log k)}{(\log k)^n}\right)$$

avec pour $n \geq 0 \, Q'_{n+1} = Q'_n - (n-1)Q_n$ et $Q_0 = 1$.

Or $p_k \approx Li^{-1}(k)$ avec $Li(x) = \int_2^x dt/\log t$ et l'on sait que

$$Li(x) \approx \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(n-1)!x}{\log^n x}. \tag{2}$$

Le démonstration de Comtet utilise la formule d'inversion de Lagrange, celle de Cipolla, le fait que $Li(x)$ a une dérivée simple. Aucune de ces deux démonstrations ne semble pouvoir s'éntre à des cas légr̀ement différents (par exemple, étude de la fonction réciproque de la fonction simple $x \to x/\log x + x/\log^2 x$).

Or nous avons besoin de résultats analogues pour des fonctions plus générales. Dans un article avec Massias et Nicolas (Cf. [**5**]) nous avons étudié le comportement asumptotique de la fonction $g(n)$, ordre maximum d'un élément du groupe symétrique S_n et nous avons démontré

$$g(n) \approx \sqrt{Li^{-1}(n)}. \tag{3}$$

Si $\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n on a:

$$\omega(g(n)) \approx Li(\sqrt{Li^{-1}(n)}). \tag{4}$$

Nous démontrons ici (voir théorèmes 1 et 2) une généralisation des résultats de Comtet et de Cipolla, ce qui permet d'obtenir pour la fonction $g(n)$ des renseignements plus précis. Ainsi:

$$\sqrt{Li^{-1}(x)} \approx \sqrt{x \log x}\left(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{B_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right) \tag{5}$$

avec $B'_{n+1} = B'_n - (n-1/2)B_n$ pour $n \geq 0$ et $B_0 = 1$.

$$Li(\sqrt{Li^{-1}(x)}) \approx 2\sqrt{\frac{x}{\log x}}\left(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{C_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right) \tag{6}$$

avec $C'_{n+1} = C'_n - (n+1/2)C_n$ pour $n \geq 0$ et $C_0 = 1$.

$$Li^2(\sqrt{Li^{-1}(x)}) \approx 4\frac{x}{\log x}\left(1 + \sum_{n\geq 1} \frac{D_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right) \tag{7}$$

avec $D'_{n+1} = D'_n - (n+1)D_n,\ \ n \geq$ et $D_0 = 1$.

Nous donnons en annexe des programmes qui nous ont permis de tester et vérifier nos résultats.

Remarque. Les polynômes recontrés ne sont pas nuls à l'origine (excepté les exemples orginaux de [**3**]). Aussi les relations de récurrence ne permettent pas de les connaître parfaitement.

C'est un probléme ouvert que l'étude des termes constants, en particulier ceux intervenant dans le développement du $k^{ème}$ nombre premier p_k.

II Théorèmes fondamentaux

THÉORÈME 1. *Soit $f(x)$ une fonction admettant un développement asymptotique, lorsque $x \to \infty$, de la forme $f(x) = e^x x^{-\alpha}(D_N(x^{-1}) + o(x^{-N}))$ avec $\alpha \in \mathbf{R}^*$, $D_N \in \mathbf{R}[x]$, degré $(D_N) \leq N$ et $D_N(0) \neq 0$.*

Supposons que f possède une fonction rèciproque g, alors on peut écrire le développement asymptotique de g, lorsque $x \to \infty$, sous la forme:

$$g(x) = \log x + \sum_{n=0}^{N} \alpha^{n+1} \frac{P_n(\log\log x)}{(\log x)^n} + o\left(\frac{1}{(\log x)^N}\right)$$

avec

(8)

$$\begin{cases} P_n = P_n(D_n, \alpha) \in \mathbf{R}[x] \ \ \textit{pour}\ \ 0 \leq n \leq N \\ P'_{n+1} = P'_n - nP_n \qquad \textit{pour}\ \ 0 \leq n \leq N-1 \end{cases} \quad \textit{et} \quad \begin{matrix} \textit{degré}\,(P_0) = \textit{degré}\,(P_1) \\ \textit{degré}\,(P_n) = n\,\textit{pour}\ 2 \leq n \end{matrix}$$

Preuve. La forme de la fonction réciproque est donnée dans de Bruijn [**1**]. Il nous faut prouver (8). Ecrivons $f(x) = e^x x^{-\alpha} D(1/x)$ où D est une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. La fonction réciproque $y = g(x)$ vérifie $e^y y^{-\alpha} D(1/y) = x$, d'où $y - \alpha \log y + \log D(1/y) = \log x$. Pesons $y = \log x + z$, on obtient alors

$$z - \alpha \log\log x - \alpha \log\left(1 + \frac{z}{\log x}\right) + \log D\left(\frac{1}{\log x + z}\right) = 0. \tag{9}$$

On peut donc écrire compte tenu de la forme du développement asymptotique de z

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{S_n(\log\log x)}{(\log x)^n} + o\left(\frac{1}{(\log x)^N}\right) = 0 \qquad \text{avec } \ S_n \in \mathbf{R}[x].$$

Par suite $\sum\limits_{n=1}^{N} \frac{S_n(\log\log x)}{(\log x)^n} = 0$. Comme x et $\log x$ sont algébriquement indépendants, il vient $\forall n = 0, \ldots, N,\ S_n = 0$. Tout se passe donc comme si l'équation (9) était remplacée par

$$F(x, \zeta) = z - \alpha\zeta - \alpha \log(1 + z/x) + \log D(1/(x+z)) = 0 \tag{10}$$

avec $z = z(x, \zeta)$.

Posons

$$h(x) = f(x)e^{-x}, \qquad (\forall M \leq N) \qquad A_M = \sum_{n=o}^{M} \alpha^{n+1} P_n(\zeta) x^{-n}$$

$$F_M(x,\zeta) = A_M - \alpha\zeta + \alpha \log x + \log h(x + A_M).$$

Il vient alors d'aprés (10)

$$F_M(x,\zeta) = o(x^{-M}) \tag{11}$$

$$\frac{\partial F_M}{\partial \zeta}(x,\zeta) = \frac{\partial A_M}{\partial \zeta}\left(1 + \frac{h'}{h}(x + A_M)\right) - \alpha = o(x^{-M}), \tag{12}$$

$$\frac{\partial F_M}{\partial x}(x,\zeta) = \frac{\partial A_M}{\partial x}\left(1 + \frac{h'}{h}(x + A_M)\right) + \frac{\alpha}{x} + \frac{h'}{h}(x + A_M) = o(x^{-M}), \tag{13}$$

d' où

$$\begin{aligned}\left(\frac{x\partial F_M}{\partial x} + \frac{\partial F_M}{\partial \zeta}\right)(x,\zeta) = \left(x\frac{\partial A_M}{\partial x} + \frac{\partial A_M}{\partial \zeta}\right)\left(1 + \frac{h'}{h}(x + A_M)\right) + \\ + x\frac{h'}{h}(x + A_M) = o(x^{-M}).\end{aligned} \tag{14}$$

D'autre part on a

$$x\frac{\partial A_M}{\partial x} + \frac{\partial A_M}{\partial \zeta} = \sum_{n=0}^{M} \alpha^{n+1} \frac{P_n' - nP_n}{x^n}. \tag{15}$$

Montrons, à partir de ces formules, et par récurrence, la relation (8) du théorème. Pour $M = 1$, les relations (14) et (15) donnent compte tenu du $D(0) \neq 0$ et de

$$\frac{h'}{h}(x) = -\frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(\alpha P_0' + \alpha^2 P_i'/x)(1 - \alpha/x) = o(1/x) \quad \text{d'où} \quad P_0' = P_1' = 1.$$

Supposons que (8) soit vérifié pour tout n tel que $0 \leq n \leq M - 1 \leq N - 2$, et montrons qu'il en est de même pour $n = M$. Le deuxième membre de l'équation (15) s'écrit:

$$\sum_{n=0}^{M} \alpha^{n+1} x^{-n}(P_n' - nP_n) = \sum_{n=0}^{M-1} \alpha^{n+1} P_{n+1}' x^{-n} + \alpha^{M+1} x^{-M}(P_M' - MP_M)$$

et l'on a

$$\sum_{n=0}^{M-1} \alpha^{n+1} P_{n+1}' x^{-n} = x \sum_{n=1}^{M} \alpha^n P_n' x^{-n} = x\left(\sum_{n=0}^{M+1} \alpha^N P_n' x^{-n} - P_0' - \alpha^{M+1} P_{M+1}' x^{-(M+1)}\right).$$

La relation (15) devient alors

$$x\frac{\partial A_M}{\partial x}+\frac{\partial A_M}{\partial \zeta}=\frac{x}{\alpha}\frac{\partial A_{M+1}}{\partial \zeta}-x+\alpha^{M+1}x^{-M}(P'_M-MP_M-P'_{M+1})$$

et la relation (14) s'écrit:

$$(16)\quad x\frac{\partial A_{M+1}}{\partial \zeta}+\alpha^{M+2}x^{-M}(P'_M-MP_M-P'_{M+1})\left(1+\frac{h'}{h}(x+A_M)\right)=\alpha x+o(x^{-M}).$$

En injectant (12) dans cette relation il vient

$$\alpha^{M+2}x^{-M}(P'_M-MP_M-P'_{M+1})=x\frac{\partial A_{M+1}}{\partial \zeta}\left(\frac{h'}{h}(x+A_{M+1})-\frac{h'}{h}(x+A_M)\right)+ \\ +o(x^{-M})=o(x^{-M})$$

d'où

$$P'_{M+1}=P'_M-MP_M.$$

Théorème 2. *Soit $F(x)$ une fonction admettant un développement asymptotique, lorsque $x\to\infty$, de la forme:*

$$F(x)=\frac{x}{\log^\alpha x}\left(D_N\left(\frac{1}{\log x}\right)+\left(\frac{1}{(\log x)^N}\right)\right)$$

avec $\alpha\in\mathbf{R}^*$, $D_N\in\mathbf{R}[x]$, degré $(D_N)\le N$ et $D_N(0)\ne 0$.

Supposons que F possède une fonction réciproque G, alors, on peut écrire le développement asymptotique de G, lorsque $x\to\infty$, sous la forme:

$$G(x)=\frac{x(\log x)^\alpha}{D_N(0)}\left(1+\sum_{n=1}^{N}\alpha^n\frac{Q_n(\log\log x)}{(\log x)^n}+o\left(\frac{1}{(\log x)^N}\right)\right)$$

avec $Q_n=Q_n(D_N,\alpha)\in\mathbf{R}[x]$ pour $0\le n\le N$,

$$(17)\qquad Q'_{n+1}=Q'_n-(n-\alpha)Q_n\quad \text{pour } 0\le n\le N-1,\ \text{et } Q_0=1.$$

Preuve. C'est une conséquence presque immédiate du théorème 1 par l'intermédiaire de la première partie de la proposition 1 ci-après.

III Autres résultats

La proposition suivante permet de passer du développement asymptotique d'une fonction f au développement asymptotique des fonctions $\log f$ et f^β pour $\beta\in\mathbf{R}^*$.

Proposition 1. *Supposons $f(x)\approx\sum_{n=O}^{N}Q_n(\log x)x^{-n}$ avec $Q_n\in\mathbf{R}[x]$ pour $0\le n\le N$, Q_0 constante non nulle et*

$$(18)\qquad Q'_{n+1}=aQ'_n+b(n+\mu)Q_n\qquad \text{pour } 0\le n\le N_1.$$

Alors a) $\log f(x) \approx \sum_{n=0}^{N} P_n(\log x) x^{-n}$ *avec*

$$
(19)\qquad \begin{aligned}
&P_n \in \mathbf{R}[x] \qquad \textit{pour } 0 \le n \le N\\
&P_0 = \log Q_0, \quad P_1' = b\mu\\
&P_{n+1}' = aP_n' + bnP_n \quad \textit{pour } 1 \le n \le N-1
\end{aligned}
$$

$$
(20)\qquad \begin{aligned}
&b)\ f^{\beta}(x) \approx \sum_{n=0}^{N} R_n(\log x)x^{-n}, \qquad \beta \in \mathbf{R}^* \ \textit{avec}\\
&R_n \in \mathbf{R}[x] \qquad \textit{pour } 0 \le n \le N\\
&R_0 = Q_0^{\beta}\\
&R_{n+1}' = aR_n' + b(n+\mu\beta)R_n \qquad \textit{pour } 0 \le n \le N-1
\end{aligned}
$$

Preuve. Elle se fait de façon formelle et de façon analogue à celle du théorème 1. On en déduit le corollaire.

Corollaire. *Si* $f(x) \approx 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{Q_n(\log\log x)}{(\log)^n}$ *avec* $Q_{n+1}' = aQ_n' + b(n+\mu)Q_n$, *si* $n \ge 0$ *et* $Q_0 = 1$.

Si $g(x) \approx 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{R_n(\log\log x)}{(\log x)^n}$ *avec* $R_{n+1}' = aR_n' + b(n+\mu')R_n$, *si* $n \ge)$ *et* $R_0 = 1$.

Alors $f(x)g(x) \approx 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{S_n(\log\log x)}{(\log x)^n}$ *avec* $S_{n+1}' = aS_n' + b(n+\mu+\mu')S_n$, *si* $n \ge 0$ *et* $S_0 = 1$

et $f(x)/g(x) \approx 1 + \sum_{n\ge 1} \frac{T_n(\log\log x)}{(\log x)^n}$ *avec* $T_{n+1}' = aT_n' + b(n+\mu-\mu')T_n$, *si* $n \ge 0$ *et* $T_0 = 1$.

La proposition qui suit permet de connaître le développement asymptotique de $g \circ f$ pour certains types de fonction g et f.

Proposition 2. *Soit* $f(x) \approx x^{\beta}(\log x)^{\alpha}\left(1 + \sum_{n\ge 1} \frac{Q_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right)$ *avec* $\alpha = \mu b/a$, $\beta = -\mu/a$, $Q_n \in \mathbf{R}[x]$ *pour* $n \ge 0$, $Q_0 = 1$, $Q_{n+1}' = aQ_n' + b(n+\mu)Q_n$.

Soit $g(x) \approx a_k \frac{x}{\log^k x} + a_{k+1}\frac{x}{\log^{k+1} x} + \cdots + a_p \frac{x}{\log^p x}$ *avec* $a_i \in \mathbf{R}$ *pour* $k \le i \le p$.

Alors $g \circ f(x) \approx a_k \beta^{-k} x^{\beta} (\log x)^{\alpha - k}\left(1 + \sum_{n\ge 1} \frac{S_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right)$ *avec* $S_n \in \mathbf{R}[x]$ *pour* $n \ge 0$, $S_0 = 1$, $S_{n+1}' = aS_n' + b(n+\mu+k)S_n$ *pour* $n \ge 0$.

Preuve. D'apres la proposition 1 il viet d'abord

$$
\log f(x) \approx \beta \log x\left(1 + \sum_{n\ge 1} \frac{T_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right) \quad \text{avec } T_{n+1}' = aT_n' + b(n-1)T_n,\ n \ge 0.
$$

puis pour tout j entier ≥ 1

$$\log^j f(x) \approx \beta^j \log^j x\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{U_{n,j}(\log\log x)}{(\log x)^n}\right) \text{ avec } U_{n,1}=U_n \text{ pour } n\geq 0, \text{ et}$$

$$U'_{n+1,j}=aU'_{n,j}+b(n-j)U_{n,j} \text{ pour } n\geq 0 \text{ et } j\geq 1.$$

D'aprés le corollaire on peut écrire

$$1+\sum_{n\geq 1}\frac{U_{n,j}(\log\log x)}{(\log x)^n}=\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{V_{n,j}(\log\log x)}{(\log x)^n}\right)^{-1}$$

avec $V'_{n+1,j}=aV'_{n,j}+b(n+j)V_{n,j}$ pour $n\geq 0$ et $j\geq 1$.

Ceci va nous permettre d'exprimer

$$\sum_{k\leq j\leq p} a_j/\log^j f(x).$$

Posons $C_n=V_{n,k}+\sum_{j=k+1}^{p} a_j a_k^{-1}\beta^{k-j}V_{n-j+k,j}$. Alors $C'_{n+1}=aC'_n+b(n+k)C_n,\ n\geq 0,\ C_0=1$ et

$$\sum_{k\leq j\leq p}\frac{a_j}{\log^j f(x)}\approx\frac{a_k}{\beta^k\log^k x}\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{C_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right).$$

Finalement

$$\begin{aligned} g\circ f(x) &= f(x)\sum_{k\leq j\leq p}\frac{a_j}{\log^j f(x)}\\ &\approx\frac{a_k}{\beta_k}x^\beta(\log x)^{\alpha-k}\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{Q_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right)\left(1+\sum_{n\geq 1}\frac{C_n(\log\log x)}{(\log x)^n}\right), \end{aligned}$$

et le corollaire permet de conclure.

IV Programmation

1) On considére d'abort le problème: trouver $x=x(z)$ tel que $x-H(x)=z,\ H(x)$ étant C^1 et $o(x)$ quand $x\to\infty$. Nous utilisons la méthode itérative décrite dans Dieudonné [**4**], p. 86 de préférence à la méthode de Newton.

Alogorithme.

Soit $x_0=z$

$x_m=z+H(x_{m-1})$ pour $m\geq 1$.

Alors $x(z)=x_m+O(H(z)H'(z)^m)$ quand $z\to\infty$.

2) Considérons maintenant

$$y=e^x x^{-a}D_N(x^{-1}) \quad \text{avec } D_N(x)=a_0+a_1+\cdots+a_N x^N.$$

En posant $H(x) = a\log x - \log D_N(1/x)$ et $z = \log y$, il vient $x - H(x) = z$ d'où

$$x(z) = x_{m+1}(z) + O(z^{-(m+1)}\log z) + o(z^{-N})$$

et $x = x_{m+1}(\log y) + o(\log y)^{-m}$ si $m \leq N$.

3) Si $y = x\log^{-a} x D_n((\log x)^{-1})$ posons

$$H(x) = a\log x - \log D_N(1/x),\ X = \log x,\ Z = \log y.$$

On calcule $X = X_{m+1}(z) + o(z^{-m})$ puis $x = e^{X_{m+1}(\log y)}(1 + O(\log y)^{-m}))$.

Annexe

(* On considere

cas 1:$\exp(x)/x\hat{}a * D(1/x)$

cas 2: $x/\log(x)\hat{}a * D(1/\log(x))$

avec $D(x) = a(0) + a(1)x + a(2)x\hat{}2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a(N)x\hat{}N$

le programme calcule les polynomes $p(n)$ (jusqu'a l'ordre M <= N) intervenant dans le developpement des fonctions reciproques des fonctions ci dessus.

cas 1:$\log(x)$+somme $(a\hat{}(n+1) * p(n)(\log\log(x))/\log(x)\hat{}n)$

cas 2:$(x\log(x))\hat{}a(1 +$ somme $(a\hat{}n * p(n)(\log\log(x))/\log(x)\hat{}n))$

le programme demande de rentrer: le cas, a, M, N, $a(0), \ldots a(N)$.

*)

```
reciproque ( ) : =block ([sa, sm, sn, sd, sv, z, sw],
        cas: read ("numero du cas"),
        sa: read("rentrez A"),
        sm: read ("rentrez M"),
        sn: read ("rentrez N"),
        for i:0 thru sn do
            (a[i]:read ("rentrez a[",i,"]")),
        sd: a[sn],
        for i: sn-1 thru 0 step -1 do
            (sd :sd/z+a[i]),
        sh: sa *log(z)—expand (taylor (log(sd), z. inf, sm))
        sv: z
        for i: 1 thru sm+1 do
            (sv :expand (sv),
            sv : z+ taylor (expand (ev (sh, z = sv)), z, inf, i - 1)),
        if cas =2 then
            (sv: sv-z - log(z)* sa,
```

$$\text{sv : taylor (exp (sv)}, z, \text{inf}, sm)),$$
$$\text{sw : ev (sv}, \log(z) : t),$$
for i :) **thru** sm **do**
$$(\text{swsw : coeff (sw}, z, -i),$$
print (sa $\hat{}(i + 2 - cas)$, "$*p$[",i,"]=",swsw))

REFERENCES

[1] N. G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, Noordhoff, Amsterdam, 1961.

[2] M. Cipolla, *La determinazione assintotica dell n^{imo} numero primo*, Rend. Acad. Sci. Fis. Mat. Napoli, Ser. 3, Bd. 8 (1902), 132–166.

[3] L. Comtet, *Inversion de $y^\alpha e^y$* et y $\log^\alpha$ *au moyen des nombres de Stirling*, C. R. Acad. Sci. Paris, **270** (1970).

[4] J. Dieudonne, *Calcul infinitesimal*, Hermann, Paris (1968).

[5] J. P. Massias, J. L. Nicolas, G. Robin, *Evaluation asymptotique de l'ordre maximum d'un élément du groupe symétrique*, Acta Arithm. (à paraitre en 1987).

Université de Limoges
GRECO de Calcul Formel
P. R. C. Mathématique-Informatique
123, rue Albert Thomas
F-87060 Limoges France

(Reçu le 29 08 1987)