PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 43 (57), 1988, 27–34

LES REPRESENTATIONS IRREDUCTIBLES COMPLEXES DES GROUPES SL(3,p), PSL(3,p)

Erhan Güzel

Résumé. Dans ce travall on obtient toutes les représentations irréductibles complexes des groupes $SL(3,p)$ et PSL $(3,p)$ définis sur le corps $\mathbf{Z}_p$.

.

1. Introduction. Les caractères irréductibles complexes des groupes $PSL(2,p); SL(2,q), GL(2,q); GL(3,q), GL(4,q); GL(n,q); SL(3,q), PSL(3,q)$ définis sur le corps $GF(q)(q=p^s; p$ primitif) ont été étudiés respectivement par Frobenius [**4**] (1986); Schur [**7**], Jordan [**6**] (1907); Steinberg [**9**](1951); Green [**5**] (1955); Simpson et Frame [**8**] (1973). Drobotenko [**3, 4**] a obtenu toutes les représentations irréductibles complexes des groupes $GL(3,q)$ et $GL(4,q)$ en 1967 et 1971.

2. Les Représentations Irréductibles Complexes du Groupe $SL(3,p)$. Soit $G = SL(3,p)$, considérons les éléments suivants de G:

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Soient A, B, C les groupes cycliques dont les génératurs sont respectivement a, b, c. Il existe donc les sous-groupes suivants de G:

$$D = A \times B,\ H = D.\ C, \mid D \mid = p^2, \mid H \mid = p^3.$$

Le tableau des caractères irréductibles complexes du groupe H est donné par le tableau 1 [**3**].

Nous pouvons donner les lemmes suivants:

Lemme 1. *Soit* $d = (p-1,3) = 3$, *soit* g *un générateur du groupe multiplicatif* $\mathbf{Z}_p^x$; $p \equiv 1 \pmod 6$ *et soit* $\mathbf{R} = \{\alpha \in \mathbf{Z}_p^x \mid \alpha = g^u,\ u \equiv 0 \pmod 3\} \subseteq \mathbf{Z}_p^x$.

AMS Subject Classification (1980): Primary 20 G 05

$(p-1)^{2/3}$ *classes de type* $\mathbf{C}_5$ *de* H *sont inclues respectivement dans les classes* $C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)*}$ *de* G *si, et seulement si, les conditions suivantes sont respectivement vérifiées:*

$X)\, k \equiv t \pmod{\mathbf{R}}$

$Y)\, (k,t) \in \mathbf{R} \times g\mathbf{R};\ \ (k,t) \in g\mathbf{R} \times g^2\mathbf{R}; (k,t) \in g^2\mathbf{R} \times \mathbf{R}$

$Z)\, (k,t) \in \mathbf{R} \times g^2\mathbf{R}:\ \ (k,t) \in g\mathbf{R} \times \mathbf{R};\ \ (k,t) \in g^2\mathbf{R} \times g\mathbf{R}.$

$k, t = 1, \dots, p-1$

Classes d'équivalence de H	Représentant de la Classe	Nombre de Classes	Nombre d'éléments de la Classe	$\varphi_{h,r};\ h \neq 0$	$\psi_{m,n}$
				$\varepsilon^p = 1$; $h, r = 0, \dots, p-1$	$\varepsilon^p = 1$; $m, n = 0, \dots, p-1$
$\mathbf{C}_1$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	1	p	1
$\mathbf{C}_2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$p-1$	1	$p\varepsilon^{kh}$	1
$\mathbf{C}_3$	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$p-1$	p	0	ε^{km}
$\mathbf{C}_4$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$p-1$	p	0	ε^{tn}
$\mathbf{C}_5$	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$	$(p-1)^2$	p	0	ε^{km+tn}

LEMME 2. *Soit* $d = 3$, *soient* $x, y \in \{1, \dots, p-1\}$; $x \equiv g^u \pmod{p}$, $y \equiv g^v \pmod{p}$

1) *Si* $x \equiv y \pmod{p}$ *et* $u \equiv v \pmod{3}$, *le nombre de couples* (x,y) *solutions de la congruence* $x + y \equiv 0 \pmod{p}$ *est* $p-1$.

2) *Le nombre de couples* (x,y) *solutions de la congruence* $x + y \equiv 1 \pmod{p}$ *est* $p-2$.

*[1] $C^{(0)}, C^{(1)}, C^{(2)}$ sont les classes d'équivalence dont les représentants sont respectivement $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & g & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & g^2 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}.$

3) *Si* $u \equiv v(\bmod 3)$, *le nombre de couples* (x, y) *solutions de la congruence* $x + y \equiv 1 \pmod p$ *est* $(p-4)/3$.

4) *Si* $u \equiv v(\bmod 3)$, *le nombre de couples* $(x, y) = (y, x)$ *solutions de la congruence* $x + y \equiv 1 \pmod p$ *est* $(p-1)/3$.

5) *Dans les cas* $2), 3), 4)$ *en replacant la congruence* $x + y \equiv 1 \pmod p$ *par la congruence* $x + y \equiv g^i \pmod p$ $(i = 1, \ldots, p-1)$ *le nombre de couples* (x, y) *solutions ne change pas.*

Considérons maintenant les caractères irrèductibles complexes du groupe $G = SL(3, p)$ [**8**]:

$$d = 1, 3, \xi_i^{(j)}; j = 1, \ldots, 11,\ i = 1, \ldots, t_j;$$
$$t_1 = t_2 = t_4 = 1,\ t_3 = t_5 = p-2,\ t_6 = [(p-1)(p-4) + 3 - d]/6,\ t_7 = p(p-1)/2,$$
$$t_8 = (p^2 + p + p + 1 - d)/3,\ t_9 = t_{10} = t_{11} = (d-1)3/2.$$

Soit $\xi_{iH}^{(j)} = \xi^{(j)}$. Les valeurs de $\xi^{(j)}$ sur les classes de H sont données par le tableau 2.

Soit $\beta = \varepsilon^{km+tn}; \varepsilon^p = 1;\ k, t, m, n = 1, \ldots, p-1$. Si le couple (k, t) vérifie la condition X (ou Y ou Z), nous écrivons $(k, t) \in X$ (ou $\in Y$ ou $\in Z$). Soient

$$x = \sum_{(k,t)\in X} \beta, \quad y = \sum_{(k,t)\in Y} \beta, \quad z = \sum_{(k,t)\in Z} \beta$$

Si $d = 3$, nous pouvons trouver le nombre de fois que $\xi_i^{(j)} (j = 9, 10, 11; i = 0, 1, 2)$ est contenu dans le caractére induit $\psi_{m,n}^G$:

D'après le tableau 1. le tableau 2, le théorème de Frobenius et le lemme 1:

$$(\psi_{m,n}^G \xi_i^{(j)} = p^{-3}[(p^3 - p)/3 + (p\delta_{oh} - (p-1)/3)px + (p\delta_{1h} - (p-1)/3)py +$$
$$+ (p\delta_{2h} - (p-1)/3)pz]^{(*)}$$

Si nous prenons $m \equiv g^u \pmod p$ et $n \equiv g^v \pmod p$, d'après le lemme 2

$$\begin{array}{ll} u \equiv v \,(\bmod\ 3) & \Rightarrow x = (2p+1)/3,\ y = z = -(p-1)/3 \\ (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1)^{(*)} & \Rightarrow x = z = -(p-1)/3,\ y = (2p+1)/3 \\ (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0) & \Rightarrow x = y = -(p-1)/3,\ z = (2p+1)/3 \end{array}$$

Ainsi, la décomposition de $\xi^{(j)} (j = 1, \ldots, 11)$ en somme de caractères irréductibles de H peut s'écrire comme ci dessous:

$$d = 1, 3$$

$$\begin{array}{lll} & \xi^{(1)} = \psi & \xi^{(6)} = (p+2)S_3 + 3S_4 + S_0 + S_1 + S_2 + 6\psi \\ (1) & \xi^{(2)} = S_3 + S_4 + 2\psi & \xi^{(7)} = pS_3 + S_4 + S_0 + S_1 + S_2 \end{array}$$

$(*)\delta_{ih} = \begin{cases} 1;\ i = h \\ 0;\ i \neq h \end{cases}$

$(*)(u, v) \equiv_3 (a, b) \Leftrightarrow u \equiv a \pmod 3,\ v \equiv b \pmod 3$

Class d'equivalence de H	Représentant de la Clase	$\xi^{(1)}$	$\xi^{(2)}$	$\xi^{(3)}$	$\xi^{(4)}$	$\xi^{(5)}$	$\xi^{(6)}$	$\xi^{(7)}$	$\xi^{(8)}$	$\xi^{(9)}$	$\xi^{(10)}$	$\xi^{(11)}$
C_1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	$p(p+1)$	p^2+p+1	p^3	$p(p^2+p+1)$	$(p+1)\times(p^2+p+1)$	$(p-1)\times(p^2+p+1)$	$(p-1)^2\times(p+1)$	$(p+1)\times(p^2+p+1)/3$	$(p-1)^2\times(p+1)/3$	$(p-1)^2\times(p+1)/3$
C_2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	$p+1$	0	p	$2p+1$	-1	$-(p-1)$	$(2p+1)/3$	$-(p-1)/3$	$-(p-1)/3$
C_3	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	$p+1$	0	p	$2p+1$	-1	$-(p-1)$	$(2p+1)/3$	$-(p-1)/3$	$-(p-1)/3$
C_4	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	$p+1$	0	p	$2p+1$	-1	$-(p-1)$	$(2p+1)/3$	$-(p-1)/3$	$-(p-1)/3$
C_5	$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ & 1 & t \\ & & 1 \end{bmatrix}$	1	0	1	0	0	1	-1	1	$p\,\delta_{ih}-(p-1)/3$	$p\,\delta_{ih}-(p-1)/3$	$p\,\delta_{ih}-(p-1)/3$

$i, h = 0, 1, 2$

$\xi^{(3)} = S_3 + S_4 + 3\psi$

$\xi^{(4)} = pS_3 + S_4 + S_0 + S_1 + S_2 + \psi$

$\xi^{(5)} = (p+1)S_3 + 2S_4 + S_0 + S_1 + S_2 + 3\psi$

$\xi^{(8)} = (p-1)S_3 + S_0 + S_1 + S_2$

$\xi^{(9)}_{iH} = (p-1)/3 \cdot S_3 + S_4 + S_i + 3\psi; \; ; i = 0,1,2$

$\xi^{(10)}_{iH} = \xi^{(11)}_{iH} = (p-1)/3 \cdot S_3 + S_i$

Ici

$$
\begin{aligned}
\psi &= \psi_{0,0} \\
S_0 &= \sum_m \sum_n \psi_{m,n}; && u \equiv v (\text{mod } 3) \\
S_1 &= \sum_m \sum_n \psi_{m,n}; && (u,v) \equiv_3 (0,2),\ (1,0), (2,1) \\
S_2 &= \sum_m \sum_n \psi_{m,n}; && (u,v) \equiv_3 (0,1), (1,2)\, (2,0) \\
S_3 &= \sum_{i=1}^{p-1} \Phi_i^H; && S_4 = \sum_{m,n} (\psi_{m,n} + \psi_{0,n})
\end{aligned}
$$

$$(m,n = 1, \ldots, , p-1;\ m \equiv g^u (\text{mod}\, p),\ \ n \equiv g^v (\text{mod}\, p))$$

D'après le théoreème de Frobenius et (1):

$$d = 1,3$$

$$\psi^G_{m,0} = \psi^G_{0,n} = \sum_{i=1}^{t_2} \xi_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{t_3} \xi_i^{(3)} + \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + 2\sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + 3\sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} +$$

$$+\Big(\frac{d-1}{2}\Big) \sum_{i=1}^{2} \xi_i^{(9)} \tag{2}$$

$$\xi^G_{m,n} = \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + \sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + \sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} + \sum_{i=1}^{t_8} \xi_i^{(8)} + \Big(\frac{d-1}{2}\Big) \sum_{j=9}^{11} \xi_0^{(j)};$$

$$u \equiv v\, (\text{mod}\, 3)$$

$$\xi^G_{m,n} = \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + \sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + \sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} + \sum_{i=1}^{t_8} \xi_i^{(8)} + \Big(\frac{d-1}{2}\Big) \sum_{j=9}^{11} \xi_1^{(j)};$$

$$(u,v) \equiv_3 (0,2),\ (1,0),\ (2,1)$$

$$\psi^G_{m,n} = \sum_{i=1}^{t_4} \xi_i^{(4)} + \sum_{i=1}^{t_5} \xi_i^{(5)} + \sum_{i=1}^{t_6} \xi_i^{(6)} + \sum_{i=1}^{t_7} \xi_i^{(7)} + \sum_{i=1}^{t_8} \xi_i^{(8)} + \Big(\frac{d-1}{2}\Big) \sum_{j=9}^{11} \xi_2^{(j)};$$

$$(u,v) \equiv_3 (0,1),\ (1,2),\ (2,0)$$

$$(m,n = 1, \ldots, p-1;\ \ m \equiv g^u\, (\text{mod}\, p),\ \ n \equiv g^v\, (\text{mod}\, p))$$

Soit $M_i^{(j)}$ le KG modul(*) irrèductible de caractère $\xi_i^{(j)}$ et soit $M_{m,n}$ le KG-modul de caractère $\psi_{m,n}^G$. D'après (2):

$$d = 1,3$$

$$\begin{aligned} M_{m,0} = M_{0,n} &= \sum_{i=1}^{t_2} M_i^{(2)} + \sum_{i=1}^{t_3} M_i^{(3)} + \sum_{i=1}^{t_4} M_i^{(4)} + 2\sum_{i=1}^{t_5} M_i^{(5)} + 3\sum_{i=1}^{t_6} M_i^{(6)} + \\ &+ \sum_{i=1}^{t_7} M_i^{(7)} + \left(\frac{d-1}{2}\right) \sum_{i=0}^{2} M_i^{(9)} \end{aligned} \tag{3}$$

$$M_{m,n} = \sum_{j=4}^{8}\sum_{i=1}^{t_j} M_i^{(j)} + \left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{j=9}^{11} M_0^{(j)};\ \ u \equiv v \pmod 3$$

$$M_{m,n} = \sum_{j=4}^{8}\sum_{i=1}^{t_j} M_i^{(j)} + \left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{j=9}^{11} M_1^{(j)};\ \ (u,v) \equiv_3 (0,2),(1,0),(2,1)$$

$$M_{m,n} = \sum_{j=4}^{8}\sum_{i=1}^{t_j} M_i^{(j)} + \left(\frac{d-1}{2}\right)\sum_{j=9}^{11} M_2^{(j)};\ \ (u,v) \equiv_3 (0,1),(1,2),(2,0)$$

$$(m,n = 1,\dots,p-1;\ \ m \equiv g^u \pmod p,\ \ n \equiv g^v \pmod p)$$

Si $\xi_i^{(j)}(1) = n_i^{(j)}$, $e_i^{(j)} = n_i^{(j)} \mid G \mid^{-1} \sum_{a \in G} \xi_i^{(j)}(a^{-1})a$ est l'idempotente centrale de KG. D'après (3):

$$d = 1,3$$

$$\begin{aligned} & e_j^{(j)} M_{m,0} = e_i^{(j)} M_{0,n} = M_i^{(j)};\ j = 2,3,\ i = 1,\dots,t_j \\ & e_i^{(j)} M_{m,n} = M_i^{(j)};\ j = 4,\dots,8,\ i = 1,\dots,t_j \\ & e_0^{(j)} M_{m,n} = M_0^{(j)};\ j = 9,10,11;\ u \equiv v \pmod 3 \\ & e_1^{(j)} M_{m.n} = M_1^{(j)};\ j = 9,10,11;\ (u,v) \equiv_3 (0,2),(1,0),(2,1) \\ & e_2^{(j)} M_{m.n} = M_2^{(j)};\ j = 9,10,11;\ (u,v) \equiv_3 (0,1),(1,2),(2,0) \\ & (m,n = 1,\dots,p-1;\ m \equiv g^u \pmod p, n \equiv g^v \bmod p)). \end{aligned} \tag{4}$$

Si $e_{m.n}$ est l'idempotente centrale du caractère $\psi_{m,n}$ de H, on a $M_{m,n} = \mathbf{K}Ge_{m,n}$. Alors, d'après (4):

$$d = 1,3$$

$$\begin{aligned} & M_i^{(j)} = \mathbf{K}Ge_i^{(j)} e_{m,0};\ \ j = 2,3,\ i = 1,\dots,t_j \\ & M_i^{(j)} = \mathbf{K}Ge_i^{(j)} e_{0,n};\ \ j = 4,\dots,8,\ i = 1,\dots,t_j \\ & M_0^{(j)} = \mathbf{K}Ge_0^{(j)} e_{m,n};\ \ j = 9,10,11,\ u \equiv v \pmod 3 \end{aligned} \tag{5}$$

(*)K est le corps des nombres complexes

$$M_1^{(j)} = \mathbf{K}Ge_1^{(j)}e_{m,n};\ j = 9, 10, 11, (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1)$$
$$M_2^{(j)} = \mathbf{K}Ge_2^{(j)}e_{m,n};\ j = 9, 10, 11, (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0)$$
$$(m, n = 1, \dots, p-1;\ m \equiv g^u \,(\operatorname{mod} p),\ n \equiv g^v \bmod p))$$

Ainsi, on a démontré le théorème suivant:

THÉORÈME. *Le* $\mathbf{K}G$*-modul du caractère irréductible* $\xi_i^{(j)}$ *du groupe* $G = SL(3,p)$ *est comme ci-dessous:*

$$d = 1, 3$$
$$\mathbf{K}Ge_i^{(j)}e_{m,0} = \mathbf{K}Ge_i^{(j)}e_{0,n};\ j = 2, 3,\ i = 1, \dots, t_j$$
$$\mathbf{K}Ge_i^{(j)}e_{m,n};\ j = 4, \dots, 8,\ i = 1, \dots, t_j$$
$$\mathbf{K}Ge_0^{(j)}e_{m,n};\ j = 9, 10, 11,\ u \equiv v \,(\operatorname{mod} 3)$$
$$\mathbf{K}Ge_1^{(j)}e_{m,n};\ j = 9, 10, 11,\ (u, v) \equiv_3 (0, 2), (1, 0), (2, 1)$$
$$\mathbf{K}Ge_2^{(j)}e_{m,n};\ j = 9, 10, 11,\ (u, v) \equiv_3 (0, 1), (1, 2), (2, 0)$$
$$(m, n = 1, \dots, p-1;\ m \equiv g^u \,(\operatorname{mod} p), n \equiv g^v \,(\operatorname{mod} p)$$

3. Les Représentations Irréductibles Complexes du Groupe

$PSL(3,p)$. Si nous écrivons $G = SL(3,p)$ et $PG = PSL(3,p)$, nous avons $PG = G/Z(G)$.$^{(*)}$ Les caractères irréductibles $\xi_i^{(j)}$ du groupe G qui verifiant la condition suivante sont les caractères irréductibles du groupe PG:

$$\xi_i^{(j)}(a) = \xi_i^{(j)}(1); \quad a \in Z(G).$$

Alors, les caractères irréductibles du groupe $PSL(3,p)$ sont comme ci-dessous [**8**]:

$$d = 1, 3, \xi_i^{(j)};\ j = 1, \dots, 9,\ i = 1, \dots, t'_j;$$
$$t'_1 = t'_2 = t'_4 = 1,\ t'_3 = t'_5 = (p-4)/3,\ t'_6 = (p^2 - 5p + 4)/18,$$
$$t'_7 = [p^2 - p + 3(d-3)]/6,\ t'_8 = (p^2 + p - 2)/9,\ t'_9 = (d-1)3/2$$

D'autre part, pour le groupe H considéré à § $2, H \cap Z(G) = \{I\}$. Le groupe H est donc isomorphe à un sous-groupe de PG.

Alors, si nous prenons PG au lieu de G, pour $j = 2, \dots, 9$ (1), (2), (3), (4), (5) et le théorème ne changent pas.

REFERENCES

[1] L. Dickson, *Linear Goups*, Dover, New York, 1958.

[2] E. S. Drobotenko, *Irreducible complex representations of the group* $GL(3,q)$, Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR. Ser. A (1967), 104–109.

$^{(*)}$ $Z(G)$ est le centre du groupe G

[3] E. S. Drobotenko, *Irreducible complex representations of the group GL* $(4, q)$, Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR. Ser. A (1971), 397–399, 476.

[4] G. Frobenius, *Über Gruppen Charactere*, Berliner Sitz. 1896.

[5] J. A. Green, *Characters of the finite general groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 407–477.

[6] H. Jordan, *Group-characters of various types of linear groups*, Amer. J. Math. **29** (1907), 397.

[7] I. Schur, *Unterschungen Über die Darstellung der Endlichen Gruppen durch Gebrochene Lineare Substitutionen*, J. für Math. **132** (1907), 85.

[8] W. A. Simpson and J. S. Frame, *The character tables for* $SL(3,q), SU(3,q^2), PSL(3,q), PSU(3,q^2)$, Cand. J. Math. **25** (1973), 486–494.

[9] R. Steinberg, *The representations of* $GL(3,q), GL(4,q), PGL(3,q)$ *and* $PGL(4,q)$, Cand. J. Math. **3** (1951), 225–235.

Department de Mathématiques
Université d' Istambul
34459 Vezneciler, Istambul
Turquie

(Received 25. 02. 1987)