PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 43 (57), 1988, 93–111

SUR LE PROBLÈME DE SATURATION DES INTÉGRALES SINGULIÈRS DANS UN ESPACE DE FONCTIONS

Miloš Tomić

Sommaire. Dans ce travail on considére le problème de saturation des intégrales singulièrs dans l'espace $M_\alpha(R_n)$ des fonctions localement intégrables dans R_n. Les classes de saturation sont caractérisées par le prodit $| x |^r \circ \hat{f}$ où $\hat{f}$ est la transformation de Fourier de la fonction $f \in M_\alpha(R_n)$, $0 < \alpha < r$. Nous donnons l'application des résultats obtenus pour les intégrales singulièrs de Weierstrass et de Poisson.

..

1. Introduction. Le probléme de saturation des integralés singulièrs dans l'espace $L_p(R_n)$ est considéré dans [**1, 3, 5, 6**] où certaines caractéristiques des classes de saturation sont données. Dans [**5**] et [**6**] les classes de saturation dans l'espace $L_p(R_n)$, $1 \leq p < \infty$, sont déterminées à l'aide du produit $(1+ | x |^2)^{r/2}\hat{f}$ où $| x |^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ et $\hat{f}$ et la transformation de Fourier de la fonction f. Dans [**10**] on considère le problème de saturation des intégrales singulièrs des fonction d'une variable localement intégrables et les classes de saturation sont caractérisées à l'aide du produit $| x |^r \circ \hat{f}$, $r > 0$. Le résultat du travail [**10**] est obtenu en utilisant la notion de la distribution bornée et les résultats concernant cette notion.

Nos résultats diffèrent des articles cités dans ce travail: 1) nous déterminons les classes de saturation dans l'espace $M_\alpha(R_n)$ des fonctions localement intégrables de plusieurs variables et ces classes sont caractérisées à l'aide du produit $| x |^r \circ \hat{f}$, 2) dans la démonstration des théoremès nous utilisons le résultat que $(1+ | x |^2)^{\alpha/2} | [| u |^r \; s(u)] \wedge (x) | \leq C$, $0 < \alpha < r$, $s \in S(R_n)$, (le théorème 2.1.), 3) nous appliquerons les théorèmes de saturation aux intégrales singulièrs de Weierstrass et de Poisson, 4) les classes de saturation dans $L_p(R_n)$, $1 \leq p < \infty$, sont caractérisées à l'aide du produit $| x |^r \circ \hat{f}$ (l'espace L_p est l'espace des fonctions à p-ième puissance integrables sur R_n).

AMS Subject Classification (1980): Primary 41A40
Mots-clés: Le produit des distributions, l'intégrale singulère. la classe de saturation

Maintenant nous donnerons les notions lesquelles nous utiliserons dans ce travail.

Le symbole R_n désigne, d'habitude, l'espace d'Euclide de dimension n dont chaque point x est défine par coordonnées réelles $x_1, \ldots, x_n$. La longueur du vecteur x est $\mid x \mid = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$.

Par le symbole $S = S(R_n)$, (v. [**9, 11, 16**]), nous désignerons l'espace des fonctions $s = s(x)$ indéfiniment dérivables, por lesquelles $\sup\limits_x (1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} \mid s^{(k)}(x) \mid < \infty$ pour n'importe quel nombre $\alpha \geq 0$ et le vecteur entier non négatif $k = (k_1, \ldots, k_n)$. On appelle $S' = S'(R_n)$ le dual de l'espace S, c'est-à-dire S' est l'espace des formes linéaires et continues définies pour $s \in S(R_n)$. La forme de S' est appellée la distribution à croissance lente ou tempérée.

La transformation de Fourier $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ de la distribution $f \in S'$ est définie par l'égalité $\langle \hat{f}, s \rangle = \langle f, \hat{s} \rangle$, $s \in S$. La transformation $\mathcal{F}^{-1}$ qui est réciproque à $\mathcal{F}$, est définie de la même manière.

Définition 1.1. L'espace $M_\alpha = M_\alpha(R_n)$, $\alpha > 0$, est l'espace des fonctions $f(x)$ qui sont sommables localement sur R_n et pour lesquelles la norme est

$$\|f\|_{M_\alpha} = \int \mid f(x) \mid (1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2} dx < \infty, \qquad \int = \int_{R_n}.$$

Si la fonction $\mathcal{H}$ vérifie la condition

$$(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} \mathcal{H}(x) \in L_1(R_n) \tag{1.1}$$

la convolutin $\mathcal{H} * f$ qui est donnée par l'égalié

$$(\mathcal{H} * f)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int f(u) \mathcal{H}(x-u) du \qquad \int = \int_{R_n} \tag{1.2}$$

existe pour $f \in M_\alpha(R_n)$ et on a

$$\|\mathcal{H} * f\|_{M_\alpha} \leq C_1 \|f\|_{M_\alpha} \|(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} \mathcal{H}(x)\|_1 \tag{1.3}$$

où la constante C_1 ne dépend pas de f et $\mathcal{H}$.

L'inégalité (1.3) résulte de (1.2) en vertu de l'inégalité

$$\frac{1}{1+ \mid x-y \mid^2} \leq C_2 \frac{1+ \mid x \mid^2}{1+ \mid y \mid^2}, \qquad (C_2 = \text{constante}) \tag{1.4}$$

et l'inégalité (1.4) résulte de (v.[**11, VII, 5; 7**])

$$1+ \mid \eta \mid^2 \leq C_2 (1+ \mid \xi \mid^2)(1+ \mid \xi + \eta \mid^2).$$

Definition 1.2. L'espace $N_\alpha = N_\alpha(R_n)$, $\alpha > 0$, est l'espace des fonctions d'ensembles ν régulières et denombrablement additives qui sont définies pour tout ensemble borélies borné $B \subset R_n$ et pour lesquelles la norme est

$$\|\nu\|_{N_\alpha} = \int (1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2} d \mid \nu \mid < \infty, \qquad \int = \int_{R_n}.$$

Définition. 1.3. L'espace $C_\alpha = C_\alpha(R_n)$, $\alpha \geq 0$, est l'espace des fonctions continues φ pour lesquelles

$$\lim_{|x|\to\infty}(1+\mid x\mid^2)^{\alpha/2}\varphi(x) = 0$$

et la norme

$$\|\varphi\|_{C_\alpha} = \sup_x (1+\mid x\mid^2)^{\alpha/2}\mid \varphi(x)\mid .$$

Nous allons prouver que l'espace N_α est le dual de C_α, $(\alpha > 0)$, et par N_α nous déterminerons les classes de saturation des intégrales singulièrs.

En particulier, nous considérons les intégrales singulièrs de Weierstrass et de Poisson pour lesquelles le noyau $\mathcal{H}(x) = H_r(x)$ est donné à l'aide de la transformation de Fourier, (v. [**5, 6**],

$$\hat{H}_r(x) = e^{-|x|^r}, \qquad r > 0. \tag{1.5}$$

Dans cela nous servons de la désignation suivante:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\rho^r(u) = \rho^n H_r(\rho u), \quad I_\rho^r(f,x) = (f * \mathcal{H}_\rho^r)(x), \qquad \rho > 0. \tag{1.6}$$

2. Sur un produit de distributions. Nous donnerons la définition du produit à l'aide duquel les classes de saturation sont caractérisées. En outre, nous prouverons les propriétés de ce produit que nous utilisons dans ce travail.

Définition 2.1. O_{M_α} est l'espace des fonctions $\lambda(x)$, $x \in R_n$, pour lesquelles $\lambda s \in L_1(R_n)$ pour toute $s \in S$, et

$$\sup_x (1+\mid x\mid^2)^{\alpha/2}\mid [\lambda(u)s(u)]\wedge(x)\mid < \infty.$$

Définition 2.2. Soient $f \in M_\alpha$ et $\lambda \in O_{M_\alpha}$. Le produit $\lambda \circ \hat{f}$ est donné par l'égalité

$$\langle \lambda \circ \hat{f}, s\rangle = \int f(x)[\lambda(u)s(u)]\wedge(x)dx, \qquad s \in S.$$

Remarque 2.1 Il est facile de voire que $O_M \subset O_{M_\alpha}$, où O_M est l'espace des fonctions indéfinament dérivables à croissance lente. Si $\lambda \in O_M$, alors $\lambda \circ \hat{f} = \lambda\hat{f}$. En outre, on peut avoir l'égalité $\lambda \circ \hat{f} = \lambda\hat{f}$ pour quelque f si λ n'appartient pas á O_M; par example, $\mid x\mid^r \circ \hat{s} = \mid x\mid^r \hat{s}$ pour $s \in S$ et $\mid x\mid^r \circ\hat{f} = \mid x\mid^r \hat{f}$ pour $f \in L_p(R_n)$, $1 \leq p \leq 2$.

La définition 2.2. donne la possibilité de définir la notion de la dérivée de Riesz pour les fonctions $f \in M_\alpha(R_n)$.

Définition 2.3. On dit que la distribution $g \in S'$ est la dérivée de Riesz d'ordre r de la fonction $f \in M_\alpha(R_n)$ si on a

$$\mid x\mid^r \circ \hat{f} = \hat{g}.$$

Cette dérivée est désignée par $g = f^{\{r\}} = D^r f$.

Nous allons utiliser les propriétés suivantes concernant le produit défini:

THÉORÈME 2.1 [**15**]. *Soit* $0 < \alpha < r$. *Alors pour toute fonction* $s \in S$ *on a*

$$\sup_x (1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} \mid [\mid y \mid^r \ s(y)] \wedge (x) \mid < \infty.$$

Pour n'importe quel nombre $r > 0$ *et pour toute fonction* $s \in S$, *la fonction* $[\mid y \mid^r \ s(y)] \wedge (x)$ *appartient à l'espace* $L_p(R_n)$ *pour tout* $p \in [1, \infty]$.

Ces assertions sont vraies aussi pour la transformation inverse de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$.

THÉORÈME 2.2. [**15**]. *Pour* $f \in M_\alpha(R_n)$, $0 < \alpha < r$, *le produit* $\mid x \mid^r \circ \hat{f}$ *est la distribution de* S'.

Les démonstration pour ces théorèmes sont données dans [**15**]. Dans la démonstration du théorème 2.2. on utilise le théorème 2.1.

Théorème 2.3. *Soit* $\xi_r = (\mid x \mid^r)\wedge$ *et* $f \in M_\alpha(R_n)$, $0 < \alpha < r$. *Alors pour toute fonction* $s \in S$ *on a*

$$s^r = \xi_r * s \tag{2.1.}$$

$$\langle \mid x \mid^r \circ \hat{f},\ s \rangle = \int f(x) \hat{s}^{\{r\}}(x) dx. \tag{2.2}$$

THÉORÈME 2.4. *Soit* $f \in M_\alpha$, $0 < \alpha < r$, *et supposons que la fonction* $g(x)$ *soit telle que l'intégrale de* $g(x)s(x)$ *existe pour toute* $s \in S$. *Alors l'égalité*

$$\int f(x) s^{\{r\}}(x) dx = \int g(x) s(x) dx, \qquad \forall\ s \in S, \tag{2.3}$$

est équivalente à l'égalité

$$g = f^{\{r\}}. \tag{2.4}$$

THÉORÈME *2.5. Supposons que la fonction* $\mathcal{H} \in L_1$ *soit paire et telle que, pour un certain nombre* $\alpha > 0$, *la condition (1.1) soit vraie. Alors pour* $f \in M_\alpha(R_n)$ *le produit* $\hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f}$ *est la distribution de* S' *et l'égalité*

$$(\mathcal{H} * f)\wedge = \hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f} \tag{2.5}$$

est vraie.

THÉORÈME 2.6. *Soit* $f^{\{r\}} \in M_\alpha$, $0 < \alpha < r$ *et supposons que la fonction* h *soit paire et qu'elle vérfie la condition* (1.1) *Alors on a*

$$(\mid u \mid^r \circ \hat{h}) \circ \hat{f} = \mid u \mid^r \circ (\hat{h} \circ \hat{f}) = \hat{h} \circ (\mid u \mid^r \circ \hat{f}).$$

Démonstration du théorème 2.3. D'aprés la définition de la dérivée de Riesz, en utilisant l'égalité $(\xi_r * s)\wedge = \hat{\xi}_r \hat{s} = \mid x \mid^r \hat{s}$, pour $\eta \in S$, on a

$$\langle (s^{\{r\}})\wedge, \eta \rangle = \langle \mid x \mid^r \circ \hat{s}, \eta \rangle = \langle \mid x \mid^r \ \hat{s}, \eta \rangle = \langle (\xi_r * s)\wedge, \eta \rangle. \tag{2.6}$$

De (2.6) nous déduisons (2.1). Puisque (v. [**11, VI, 8; 4**]

$$(uv)\wedge = \hat{u} * \hat{v}, \quad u \in S', \quad v \in S,$$

en vertu de la définition 2.2. et de l'égalité (2.1), nous obtenons (2.2).

Remarque 2.2. En vertu du théorème 2.1, nous concluons que, pour $0 < \alpha < r$, on a

$$(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} \mid s^{\{r\}} \mid = (1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} \mid \mathcal{F}^{-1}(\mid u \mid^r \hat{s}) \mid \leq C$$

où la constante C ne dépend pas de $x \in R_n$.

COROLLAIRE 2.1. *D' après* (2.2), *pour* $f \in M_\alpha$, $0 < \alpha < r$, *on obteint*

$$\langle f^{\{r\}}, s \rangle = \int f(x) s^{\{r\}}(x) dx, \quad s \in S.$$

Démonstration du théorème 2.4. En utilisant (2.3) on obtient

$$\langle \hat{g}, s \rangle = \langle g, \hat{s} \rangle = \int f(x) \hat{s}^{\{r\}}(x) dx$$

d'ou, en vértu de (2.2), nous déduisons $\langle \hat{g}, s \rangle = \langle \mid x \mid^r \circ f, s \rangle$. Cela, d'après la définition 2.3, signifie que (2.4) est vraie.

Inversement, supposons que (2.4) est vraie. Pour $\hat{\varphi} = s$, $(\varphi \in S)$, on a

$$\int g(s) s(x) dx = \langle g, s \rangle = \langle \hat{g}, \varphi \rangle = \langle \mid x \mid^r \circ \hat{f}, \varphi \langle =$$

$$= \int f(x) [\mid y \mid^r \varphi(y)] \wedge (x) dx = \int f(x)(\xi_r * \hat{\varphi})(x) dx = \int f(x)(\xi_r * s)(x) dx,$$

d'où, en vertu de (2.1 nous déduisons (2.3).

Démonstration du théorème 2.5. En vertu des suppositions du théorème, nous concluons que $\hat{\mathcal{H}} \in O_{M_\alpha}$, parce que, en utilisant l'égalité $(\hat{\mathcal{H}} s)\wedge = \mathcal{H} * \hat{s}$ et l'inégalité (1.4), on obtient

$$\mid (\hat{\mathcal{H}} s)\wedge \leq \int \mathcal{H}(u) \hat{s}(x-u) \mid du \leq$$

$$\leq C(1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2} \int (1+ \mid u \mid^2)^{\alpha/2} \mid \mathcal{H}(u) \mid du, \quad s \in S,$$

C'est pourquoi on a

$$\langle \hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f}, s \rangle = \int f(x)(\mathcal{H} * \hat{s})(x) dx. \tag{2.7}$$

En appliquant le théorème de Fubini et en tenant compte du fait que la fonction $\mathcal{H}$ est paire, de (2.7) nous obtenons:

$$\langle \hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f}, s \rangle = \int (\mathcal{H} * f)(x) \hat{s}(x) dx. \tag{2.8}$$

En vertu de (2.8) et (1.3) pour $s_j \in S$, on a

$$| \langle \hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f}, s_j \rangle |= \int \frac{| (\mathcal{H} * f)(x) |}{(1+ | x |^2)^{\beta/2}} (1+ | x |^2)^{\beta/2} | \hat{s}_j(x) | \, dx \leq C \cdot K(\beta, 0, \hat{s}_j)$$

pour $\beta \geq \alpha$, d'où n conclut que $\langle \hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f}, s_j \rangle \to 0$ lorsque $s_j \to 0$ dans S. Ainsi nous avons prouvé que $\hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f}$ est la distribution de S'.

Maintenant, en utilisant (2.7) et (2.8), nous obtenons

$$\langle (\mathcal{H} * f) \wedge, s \rangle = \langle \mathcal{H} * f, \hat{s} \rangle = \langle \hat{\mathcal{H}} \circ \hat{f}, \, s \rangle, \quad s \in S. \tag{2.9}$$

De (2.9) nous déduisons (2.5). Le théorème 2.5. est démontré

Remarque 2.3. Si, pour $f \in M_\alpha, 0 < \alpha < r$, nous posons

$$\langle \xi_r * f, s \rangle = \int f(x)(\xi_r * s)(x) dx, \quad s \in S,$$

alors $f^{\{r\}} = \xi_r * f$.

Remarque 2.4. Si nous supposons que la fonction paire h stisfait à la condition (1.1), alors $| u |^r \hat{h}(u) \in O_{M_\alpha}$ et $| u |^r \circ \hat{h} =| u |^r \hat{h}$.

En effet nous avons

$$\begin{aligned} & | [| u |^r \hat{h}(u) s(u)] \wedge |=| [| u |^r s(u)] \wedge * h | \leq \\ & \leq C_1 \int \frac{| h(u) |}{(1+ | x - v |^2)^{\alpha/2}} dv \leq \frac{C_2}{(1+ | x |^2)^{\alpha/2}}, \quad (C_i = \text{const.}). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Cela signifie que $\sup\limits_x (1+ | x |^2)^{\alpha/2} | (h * s^{\{r\}})(x) | < \infty$.

Démonstration du théorème 2.6. Pour $s \in S$ on a

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{F}^{-1}[(| u |^r) \circ \hat{h}) \circ \hat{f}], s \rangle = \langle (| u |^r \hat{h}) \circ \hat{f}, \mathcal{F}^{-1}(s) \rangle = \\ & = \int f(x)[| u |^r \hat{h} \mathcal{F}^{-1}(s)] \wedge (x) dx = \int f(x)[| u |^r \hat{h}) \wedge * s](x) dx = \\ & = \int f(x)(h^{\{r\}} * s)(x) dx = \int (f * h^{\{r\}})(x) s(x) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{F}^{-1}[(| u |^r \hat{h}) \circ \hat{f}] = f * h^{\{r\}}. \tag{2.11}$$

Puisque $f^{\{r\}} \in M_\alpha$ nous avons

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^{-1}[\hat{h} \circ (| u |^r \circ \hat{f})], \, s \rangle & = \int f^{\{r\}}(x)[\hat{h} \mathcal{F}^{-1}(s)] \wedge (x) dx = \\ & = \int f^{\{r\}}(x)(h * s)(x) dx = \int (f^{\{r\}} * h)(x) s(x) dx \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{h}(|\, u \,|^r \circ \hat{f})] = f^{\{r\}} * h. \tag{2.12}$$

En utilisant les théorèmes 2.4 et 2.5 nous avons aussi

$$\langle \mathcal{F}^{-1}[|\, u \,|^r \circ (\hat{h} \circ \hat{f})],\, s\rangle = \int (h * f)(x)[|\, u \,|^r\, \mathcal{F}^{-1}(s)] \wedge (x)dx =$$
$$= \int (h * f)(x) s^{\{r\}}(x)dx = \int (h * f)^{\{r\}}(x)s(x)dx$$

et puis

$$\mathcal{F}^{-1}[|\, u \,|^r \circ (\hat{h} \circ \hat{f})] = (h * f)^{\{r\}}. \tag{2.13}$$

Maintenant nous prouverons l'égalité des convolutions de (2.11), (2.12), (2.13). Pour $s \in S$ nous avons

$$\langle [(h * f)^{\{r\}}]\wedge, s\rangle = \rangle\, |\, u \,|^r \circ (h * f)\wedge, s\langle =$$
$$= \int (h * f)(x)(|\, u \,|^r\, s) \wedge (x)dx = \int f(x)[h * (|\, u \,|^r\, s)\wedge](x)dx =$$
$$= \int f(x)(h * \hat{s}^{\{r\}})(x)dx$$

en vertu duqel on obtient

$$\langle (h * f)^{\{r\}}, s\rangle = \int f(x)(h * s^{\{r\}})(x)dx. \tag{2.14}$$

En utilisant le théoreème 2.5. on obtient

$$\langle (f * h^{\{r\}})\wedge, s\rangle = \langle (h^{\{r\}}) \wedge \circ \hat{f}, s\rangle = \langle (|\, u \,|^r\, \hat{h}) \circ \hat{f}, s\rangle =$$
$$= \int f(x)(|\, u \,|^r\, \hat{h}s) \wedge (x)dx = \int f(x)(h * s^{\{r\}})(x)dx.$$

Cela signifie qu'on a

$$\langle f * h^{\{r\}}, s\rangle = \int f(x)(h * s^{\{r\}})(x)dx \tag{2.15}$$

Pour la convolution $h * f^{\{r\}}$ on a

$$\langle h * f^{\{r\}}, s\rangle = \int h(t)dt \int f^{\{r\}}(x - t)s(x)dx. \tag{2.16}$$

On peut voir qu'on a

$$\int f^{\{r\}}(x - t)s(x)dx = \int f^{\{r\}}(u)s(u + t)du, \tag{2.17}$$

$$[s(\cdot + t)]^{\{r\}}(u) = s^{\{r\}}(u + t). \tag{2.18}$$

En utilisant le théorème 2.4 et l'égalité (2.18) nous obtenons

$$\int f^{\{r\}}(u)s(u+t)du = \int f(u)s^{\{r\}}(u+t)du \tag{2.19}$$

Maintenant en vertu de (2.16), (2.17) et (2.19) nous déduisons

$$\begin{aligned}\langle h * f^{\{r\}}, s\rangle &= \int h(t)dt \int f(u)s^{\{r\}}(u+t)du = \\ &= \int h(t)dt \int f(x-t)s^{\{r\}}(x)dx = \int (h*f)(x)s^{\{r\}}(x)dx\end{aligned}$$

et puis

$$\langle h * f^{\{r\}}, s\rangle = \int f(x)(h * s^{\{r\}})(x)dx. \tag{2.20}$$

Finalement, en vertu de (2.14), (2.15), (2.20) on obtient

$$(h*f)^{\{r\}} = h^{\{r\}} * f = h * f^{\{r\}}. \tag{2.21}$$

Le théoreme 2.6. est démontré.

3. Le dual de l'espace C_α. Pour caractériser les classes de saturation dans M_α nous utiliserons le dual de l'espace C_α.

THÉORÈME 3.1. [**4, IV**, 6.3]. *Pour tout fonctionnel f sur $C_0(R_n)$, c'est-à-dire pour $f \in C_0'$, il existe une fonction d'ensemble ν régulière et dénombrablement additive définie sur l'algebre σ des ensembles boréliens de R_n telle que*

$$f(\varphi) = \int \varphi(x)d\nu, \qquad \varphi \in C_0,$$

avec $\|f\| = var\,\nu = \mid \nu \mid$.

Remarque 3.1. Une assertion sur le dual des certaines est donnée dans [**7**], (proposition 4.11.2). Nous avons besoin du théorème 3.2 pour lequel nous donnerons la démonstration en utilisant le théoréme 3.1. de Riesz et le théorème de Radon-Nikodym.

THÉORÈME 3.2. *Pour tout fonctionnel f sur $C_\alpha(R_n)$, $\alpha > 0$, $(f \in C_\alpha')$, il existe $\eta \in N_\alpha(R_n)$ telle que*

$$f(\varphi) = \int \varphi(x)d\eta, \qquad \varphi \in C_\alpha, \tag{3.1}$$

avec $\|f\| = \|\eta\|_{N_\alpha}$. Cela signifie que $N_\alpha(R_n)$ est le dual de l'espace $C_\alpha(R_n)$, c'est-à-dire $C_\alpha' = N_\alpha$.

Démonstration du théorème 3.2. Nous predrons l'application $\Phi : C_2 \to C_0$ définie par l'égalité $\Phi(\varphi) = (1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2}\varphi(x)$, $(\varphi \in C_\alpha, \Phi(\varphi) \in C_0, \|\Phi\| = 1)$.

Pour $f \in C'_\alpha$, $\varphi \in C_\alpha$, on a $f(\varphi) = (f\Phi^{-1})\Phi(\varphi)$ et puis, en vertu du théorème 3.1, nous concluons qu'il existe une fonction d'ensembles ν convenant au fonctionnel $f\Phi^{-1} \in C'_0$, telle que

$$(f\Phi^{-1})(\Phi(\varphi)) = \int \Phi(\varphi)\delta\nu \quad \text{et} \quad |\, \nu \,| = \|f\|.$$

On obtient

$$f(\varphi) = \int \varphi(x)(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} d\nu.$$

La fonction d'ensembles η est définie par l'égalité

$$\eta(E) = \int_E (1 + x^2)^{\alpha/2} d\nu.$$

Alors (v. [**4, III, 10.6**]) on a

$$\int_{R_n} \varphi(x)(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} d\nu = \int_{R_n} \varphi(x) d\eta. \tag{3.2}$$

Cela signifie qu'on a

$$f(\varphi) = \int_{R_n} f(x) d\eta. \tag{3.3}$$

Nous introduisons la désignation suivante:

$$\lambda(E) = \int_E (1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2} d\eta \tag{3.4}$$

Alors on a

$$\int_{R_n} \varphi(x)(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} d\lambda = \int_{R_n} \varphi(x) d\eta. \tag{3.5}$$

En comparant (3.2) et (3.5) nous obtenons que $\nu = \lambda$ et cela, d'aprés (3.4), signifie que

$$\nu(E) = \int_E (1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2} d\eta. \tag{3.6}$$

De (3.6) il résulte que

$$|\, \nu \,| = \|\eta\|_{N_\alpha}, \qquad (|\, \nu \,| = \|f\|) \tag{3.7}$$

Maintenant, d'aprés (3.3) et (3.7), on obtient l'affirmation du théorème 3.2.

COROLLAIRE 3.1. *Pour toute fonction $g \in M_\alpha$ il existe une $\eta \in N_\alpha$ telle que*

$$\int_{R_n} g(x)\varphi(x) dx = \int_{R_n} \varphi(x) d\eta, \qquad \forall \varphi \in C_\alpha. \tag{3.8}$$

Démonstration. La fonction $g \in M_\alpha$ définit le fonctionnel f sur C_α par l'égalité

$$f(\varphi) = \int_{R_n} g(x)\varphi(x)dx$$

et, en vertu du théorème 3.2, il existe une $\eta \in N_\alpha$ pour laquelle (3.8) est vraie. Dans cela on a $\mid f(\varphi) \mid \leq \|g\|_{M_\alpha}\|\varphi\|_{C_\alpha}$ c'est-à-dire $\|f\| \leq \|g\|_{M_\alpha}$.

En outre, en vertu du théorème 3.2 on a $\|f\| = \|\eta\|_{N_\alpha}$. Donc on a

$$\|\eta\|_{N_\alpha} = \|g\|_{M_\alpha}.$$

COROLLAIRE 3.2. *Toute suite bornée $\{\psi_\rho\}$ dans $M_\alpha(R_n)$ contient une sous-suite qui converge faiblement vers $\lambda \in N_\alpha(R_n)$.*

Démonstration. Soit pour $\psi_\rho \in M_\alpha$, $\|\psi_\rho\|_{M_\alpha} \leq K$ où la constante K ne dépend pas de ρ. Supposons que, pour $\eta = \lambda_{\psi_\rho} \in N_\alpha$, on ait (3.8) et

$$\|\lambda_{\psi_\rho}\|_{N_\alpha} \leq \|\psi_\rho\|_{M_\alpha} \leq K.$$

En vertu du théorème sur la compacité faible résulte l'existence de la sous-suite ρ_j et $\lambda \in N_\alpha$ telles que $\lambda_{\psi_{\rho_j}}$ converge faiblement vers λ, c'est-à-dire

$$\lim_{\rho_j \to \infty} \int_{R_n} \varphi(x)d\lambda_{\psi_{\rho_j}} = \int_{R_n} \varphi(x)d\lambda, \qquad \forall\varphi \in C_\alpha. \tag{3.9}$$

De (3.9) en vertu de (3.8) on obtient

$$\lim_{\rho_j \to \infty} \int_{R_n} \varphi(x)\psi_{\rho_j}(x)dx = \int_{R_n} \varphi(x)d\lambda, \qquad \forall\varphi \in C_\alpha.$$

Remarque 3.2. On peut associer à la fonction $g \in M_\alpha(R_n)$ la fonction d'ensembles $\lambda_g \in N_\alpha(R_n)$ à l'aide de l'égalité

$$\lambda_g(B) = \int_B \mid g(x) \mid dx$$

oú B est l'ensemble borélien borné. Alors (v. [**4**], III, 10.6) on a

$$\|\lambda_g\|_{N_\alpha} = \int (1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2} d\lambda_g = \int (1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2} \mid g(x) \mid dx = \|g\|_{M_\alpha}.$$

Cela signifie que l'espace M_α est isométrique à un sous-espace de N_α.

Remarque 3.3. Pour $\mathcal{H}$ satisfaisant à la condition (1.1) et pour $\eta \in N_\alpha$ la convolution $\mathcal{H} * d\eta$ appartient à M_α. En outre, si pour $f \in M_\alpha$, $g = \eta \in N_\alpha$, $s \in S$ l'égalité (2.4) est vraie, alors $\hat{\eta} =\mid x \mid^r \circ \hat{f}$, c'est-à-dire $\eta = f^{\{r\}}$.

Remarque 3.4. Nous utiliserons aussi le symbole L_p^*, $1 \leq p < \infty$, où $L_p^* = L_p$ pour $1 < p < \infty$ et L_1^* est l'espace des mesures bornées sur R_n.

4. La convergence des intégrales singulières dans M_α. Dans ce paragraphe nous allons considérer la convergence des intégrales singuliéres (1.2) dans l'espace $M_\alpha(R_n)$.

THÉORÈME 4.1. *Soit* $\mathcal{H}(u,\rho), \rho>0$, *le noyau satisfaisant aux conditions*

$$\int_{R_n} \mathcal{H}(u,\rho)du = (2\pi)^{n/2}, \tag{4.1.}$$

$$\int_{R_n} (1+\mid u\mid^2)^{\alpha/2} \mid \mathcal{H}(u,\rho)\mid du \le C_1 \tag{4.2}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \int_{|u|\ge\delta} (1+\mid u\mid^2)^{\alpha/2} \mid \mathcal{H}(u,\rho)\mid du = 0, \quad (\delta>0), \tag{4.3}$$

où la constante C_1 *ne dépend pas de* $\rho > 0$.

Alors, pour $f \in M_\alpha(R_n)$, *on a*

$$\|[\mathcal{H}(u,\rho) * f(u)](x)\|_{M_\alpha} \le C_2 \tag{4.4}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \|[\mathcal{H}(u,\rho) * f(u)](x) - f(x)\|_{M_\alpha} = 0 \tag{4.5}$$

où la constante C_2 *ne dépend pas de* ρ.

COROLLAIRE 4.1. *Soit* $\mathcal{H}$ *une fonction satisfaisant aux conditions* (1.1) *et* (4.1) *et soit* $\mathcal{H}_\rho(u) = \rho^n\mathcal{H}(\rho u)$, $\rho>0$. *Alors, pour* $f\in M_\alpha(R_n)$, *on a*

$$\begin{gathered} \|\mathcal{H}_\rho * f\|_{M_\alpha} \le C_3 \\ \lim_{\rho\to\infty} \|\mathcal{H}_\rho * f - f\|_{M_\alpha} = 0 \end{gathered} \tag{4.6}$$

où la constante C_3 *ne dépend pas de* ρ.

Démonstration du théorème 4.1. En utilisant l'inégalité (1.4) on obtient (4.4).

Nous allons démontrer (4.5). On a

(4.7)

$$\|[\mathcal{H}(u,\rho) * f(u)](x) - f(x)\|_{M_\alpha} \le \int \mid \mathcal{H}(u,\rho)\mid \|f(x-u)-f(x)\|_{M_\alpha} du =$$

$$= \Big(\int_{|u|\le\delta} + \int_{|u|>\delta}\Big) \mid \mathcal{H}(u,\rho\mid \|f(x-u)-f(x)\|_{M_\alpha} du = I_1 + I_2.$$

Pour éveluer l'intégrale I_1 de (4.7) nous avons besoin du lemme suivante:

LEMME 4.1. *Pour* $f\in M_\alpha(R_n)$ *on a*

$$\lim_{h\to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{M_\alpha} = 0. \tag{4.8}$$

Démonstration du lemme 4.1. Nous avons

$$\|f(x+h)-f(x)\|_{M_\alpha} \le \Big\| \frac{f(x+h)}{1+\mid x\mid^2)^{\alpha/2}} - \frac{f(x+h)}{(1+\mid x+h\mid^2)^{\alpha/2}} \Big\|_1 + \tag{4.9}$$

$$+ \Big\| \frac{f(x+h)}{(1+\mid x+h\mid^2)^{\alpha/2}} - \frac{f(x)}{1+\mid x\mid^2)^{\alpha/2}} \Big\|_1$$

où le symbole $\|\cdot\|_1$ désigne la norme dans l'espace $L_1(R_n)$. Puisque

$$\varphi(x) = f(x)(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} \in L_1(R_n).$$

de (4.9) on obtient

$$\lim_{h\to 0}\|f(x+h) - f(x)\|_{M_\alpha} \leq \lim_{h\to 0}\left\| \frac{f(x+h)}{1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2}} - \frac{f(x+h)}{(1+ \mid x+h \mid^2)^{\alpha/2}} \right\|_1. \tag{4.10}$$

On a

$$\int\left|\frac{f(x+h)}{(1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2}} - \frac{f(x+h)}{(1+ \mid x+h \mid^2)^{\alpha/2}}\right|dx = \int\left|\frac{f(u)}{(1+ \mid u-h \mid^2)^{\alpha/2}} - \frac{f(u)}{(1+ \mid u \mid^2)^{\alpha/2}}\right|du$$

En vertu de (1.4) nous avons

$$\left|\frac{f(u)}{(1+ \mid u-h \mid^2)^{\alpha/2}} - \frac{f(u)}{(1+ \mid u \mid^2)^{\alpha/2}}\right| \leq C_4(\alpha)\frac{\mid f(u) \mid}{(1+ \mid u \mid^2)^{\alpha/2}}$$

si $\mid h \mid \leq 1$ (puisque $h \to 0$ nous pouvons considérer que $\mid h \mid \leq 1$). Cela signifie que nous pouvons faire l'operation lim sous le signe d'intégration, en vertu de quoi en utilisant (4.10) on obtient (4.8). Le lemma est démontré.

Nous continuons la démonstration du théorème 4.1. En vertu du lemme 4.1. pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$I_1 < \varepsilon. \tag{4.11}$$

Maintenant démontrons que

$$\lim_{\rho\to\infty} I_2 = 0. \tag{4.12}$$

Il suffit de démontrer que

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_{|u|>\delta} \mid \mathcal{H}(u,\rho) \mid \|f(x-u)\|_{M_\alpha} du = 0 \tag{4.13}$$

On a

$$\int_{|u|>\delta}\|f(x-u)\|_{M_\alpha} \mid \mathcal{H}(u,\rho) \mid du = \int_{|u|>\delta}\left(\int \frac{\mid f(y) \mid dy}{(1+ \mid u+y \mid^2)^{\alpha/2}}\right)\mid \mathcal{H}(u,\rho) \mid du \leq$$
$$\leq C_5 \int_{|u|>\delta}(1+ \mid u \mid^2)^{\alpha/2} \mid \mathcal{H}(u,\rho) \mid du \int (1+ \mid y \mid^2)^{-\alpha/2} \mid f(y) \mid dy$$

d'ou, en utilisant (4.3), nous obtenons (4.13). De (4.13) on obtient (4.12).

Maintenant de (4.7), en vertu de (4.11), (4.12), on obtient (4.5). Le théorème 4.1. est démontrè.

5. Sur les classes de saturation dans M_α et L_p. Dans ce paragraphe nous allons démontrer les théorèmes sur la saturation en utilisant les résultats précédents.

THÉORÈME 5.1. *Soit* $\mathcal{H}(u)$ *une fonction paire satisfaisant aux conditions* (1.1) *et* (4.1), *et supposons qu'il existe des nombres* $r > 0$, $b \neq 0$ *et une fonction* $h(u)$ *satisfaisant aux conditions* (1.1) *et* (4.1), *telle que*

$$1 - \hat{\mathcal{H}}(\nu) = b \mid \nu \mid^r \hat{h}(\nu). \tag{5.1}$$

Alors, pour la convolution $\mathcal{H}_\rho * f$ *de la fonction* $f \in M_\alpha(R_n)$, $0 < \alpha < r.$ *et du noyau* $\mathcal{H}_\rho(u) = \rho^n \mathcal{H}(\rho u)$, $\rho > 0$, *les assertions suivantes sont vraies:*

(i) *Si*

$$\|\mathcal{H}_\rho * f - f\|_{M_\alpha} = o(\rho^{-r}), \ \rho \to \infty, \tag{5.2}$$

alors $f^{\{r\}} = 0$.

(ii) *Si*

$$\|\mathcal{H}_\rho * f - f\|_{M_\alpha} = O(\rho^{-r}), \ \rho \to \infty, \tag{5.3}$$

alors $f^{\{r\}} \in N_\alpha(R_n)$.

(iii) *Si pour* $f \in M_\alpha$ *la dérivée* $f^{\{r\}}$ *appartient à* N_α, *alors* (5.3) *est vraie.*

THÉORÈME 5.2. *Supposons que la foction paire* $\mathcal{H}(u) \in L_1(R_n)$ *vérifie la condition* (4.1) *et supposons qu'il existe des nombres* $r > 0$, $b \neq 0$ *et une fonction* $h(u) \in L_1(R_n)$ *satisfaisant à la condition* (4.1) *telle que* (5.1) *est vraie.*

Alors, pour la convolution $\mathcal{H}_\rho * f$ *de la fonction* $f \in L_p(R_n)$, $1 \leq p < infty$, *et du noyau* $\mathcal{H}_\rho(u) = \rho^n \mathcal{H}(\rho u)$ *les assertins (i), (ii), (iii) du théorème* 5.1 *sont vraies où nous écrivons* $\|\cdot\|_p$ *au lieu de* $\|\cdot\|_{M_\alpha}$ *et* L_p^* *au lieu de* N_α. *Dans cela* $L_p^* = L_p$ *pour* $1 < p < \infty$ *et* L_1^* *est l'espace des mesures bornée sur* R_n.

Pour démentrer les théorèmes 5.1 ot 5.2 nous avons besoin du lemme suivant

LEMME 5.1. *Soit* $\mathcal{H}$ *une fonction satisfaisant aux conditions du théorème* 5.1. *Alors, pour* $f \in M_\alpha(R_n)$ *et* $s \in S(R_n)$, *on a*

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{R_n} f(x)\{\rho^r[s(x) - (\mathcal{H}_\rho * s)(x)] - bs^{\{r\}}(x)\}dx = 0 \tag{5.4}$$

Démonstration du lemme 5.1. Puisque $\mathcal{H}_\rho(u) = \rho^n \mathcal{H}(\rho u)$, on a $\hat{\mathcal{H}}_\rho(u) = \hat{\mathcal{H}}(u/\rho)$. C'est pourquoi, en vertu de (5.1), on obtient

$$\rho^r(s - \mathcal{H}_\rho * s)\wedge = \rho^r(1 - \hat{\mathcal{H}}_\rho)\hat{s} = \rho^r[1 - \hat{\mathcal{H}}(u\rho)]\hat{s}(u) = b \mid u \mid^r \hat{s}(u)\hat{h}(u/\rho)$$

et ensuite

$$\rho^r(s - \mathcal{H}_\rho * s)(x) = b(s^{\{r\}} * h_\rho)(x). \tag{5.5}$$

En utilisant (5.5), nous concluons que (5.4) est équivalent à

$$\lim_{\rho \to \infty} \int_{R_n} f(x)\{(s^{\{r\}} * h_\rho)(x) - s^{\{r\}}(x)\}dx = 0$$

En tenant compte de la condition (1.1) pour h, en vertu de (2.10), (remarque 2.4), nous obtenons

$$\mid (s^{\{r\}} * h_\rho)(x) \mid \leq C(1+ \mid x \mid^2)^{-\alpha/2}, \qquad (C = \text{const.})$$

Cela signifie que nous pouvons faire l'opération lim sous le signe d'intégration, en vertu de laquelle, en tenant compte de

$$\lim_{\rho\to\infty} \sup_x \mid (s^{\{r\}} * h_\rho)(x) - s^{\{r\}}(x) \mid = 0.$$

on obtient (5.4). Le lemme 5.1. est démontré.

Remarque 5.1. De la même manière nous concluons que (5.4) est vraie aussi pour $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, $s \in S$, si les fonction $\mathcal{H}$ et h sont telles que les convolutions $\mathcal{H}_\rho * f$ et $h_\rho * f$ convergent dans l'espace L_p. Alors $s^{\{r\}} * h_\rho \in L_q$ parce que $s^{\{r\}}$ pour tout $q \in [1, \infty]$, (théorème 2.1), et il s'ensuit que $\mid f(s^{\{r\}} * h_\rho) \mid \leq \psi$ où $\psi \in L_1$. Cela signifie qu'on peut faire l'opération lim dans l'intégrale (5.4), et puis on obtient l'affirmation de (5.4).

Démonstration du théorème 5.1. (i) Du fait que le noyau $\mathcal{H}$ est pair on a

$$\int f(x)(\mathcal{H}_\rho * s)(x)dx = \int (\mathcal{H}_\rho * f)(x)s(x)dx.$$

C'est pourquoi, en vertu du lemme 5.1, on obtient

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^r \int [f(x) - (\mathcal{H}_\rho * f)(x)]s(x)dx = b \int f(x)s^{\{r\}}(x)dx. \tag{5.6}$$

De la condition (5.2) il résulte

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^r \int (f - \mathcal{H}_\rho * f)(x)s(x)dx = 0 \tag{5.7}$$

pour toute $s \in S$.

De (5.6) et (5.7) on obtient

$$\int f(x)s^{\{r\}}(x)dx = 0. \tag{5.8}$$

De (5.8), en utilisant le théorème 2.4, on déduit $\langle f^{\{r\}}, s\rangle = 0$ et cela signifie que $f^{\{r\}} = 0$.

(ii) De (5.3) il résulte que l'ensemble des fonctions $\rho^r(f - \mathcal{H}_\rho * f)$ est borné dans M_α. En vertu du corrollaire 3.2, nous concluons qu'il existe un $g \in N_\alpha(R_n)$ et une sous-suite ρ_j telle que

$$\lim_{\rho_j\to\infty} \rho_j^r \int (f - \mathcal{H}_{\rho_j} * f)(x)s(x)dx = \int s(x)dg \tag{5.9}$$

pout toute $s \in S(R_n)$.

Les assertions (5.9) et (5.6) etrainent

$$b\int f(x)s^{\{r\}}(x)dx = \int s(x)dg. \tag{5.10}$$

Maintenant de (5.10), en vertu du théorème 2.4, il résulte que $bf^{\{r\}} = g$ et cela signifie que $f^{\{r\}} \in N_\alpha$.

(iii) Soit $f^{\{r\}} = g \in N_\alpha$. En vertu du théorème 2.5 et de l'égalité (5.1) on a

$$(f - \mathcal{H}_\rho * f)\wedge = [1 - \hat{\mathcal{H}}(u/\rho)] \circ \hat{f} = [b(\mid u \mid /\rho)^r \hat{h}(u/\rho)] \circ \hat{f}$$

et ainsi

$$\rho^r[f(x) - (\mathcal{H}_\rho * f)(x)]\wedge = [b \mid u \mid^r \hat{h}(u\rho)] \circ \hat{f} = [b \mid u \mid^r \hat{h}_\rho(u)] \circ \hat{f}. \tag{5.11}$$

De (5.11) il résulte que

$$\rho^r[f(x) - (\mathcal{H}_\rho * f)(x)] = \mathcal{F}^{-1}\{[b \mid u \mid^r \hat{h}_\rho(u)] \circ \hat{f}\}.$$

En vertu du théorème 2.6, ((2.11) et (2.21)), on déduit

$$\rho^r[f(x) - (\mathcal{H}_\rho * f)(x)] = bh_\rho * f^{\{r\}}. \tag{5.12}$$

Du fait que $f^{\{r\}} \in N_\alpha$ il résulte que $(h_\rho * f^{\{r\}}) \in M_\alpha$. C'est pourquoi de (5.12), en vertu de (4.6), on déduit (5.2). Le théorème 5.1. est démontré.

Démonstration du théorème 5.2. En tenant compte des faits précédents, la démonstration du théorème 5.2 coïncide avec la démonstration du théorème 5.1.

Corollaire 5.1. *Sous les suppositions du théorème* 5.2 *les classes de saturation F_p^r des intégrales singulièrs $\mathcal{H}_\rho * f$ dans l'espace $L_p(R_n)$, $1 \leq p < \infty$, sont caractérises par l'égalité*

$$F_p^r(R_n) = \{f \in L_p(R_n) : \mathcal{F}^{-1}(\mid x \mid^r \circ \hat{f}) \in L_p^*\}.$$

Dans [**5**] le théorème sur la saturation dans l'espace $L_p(R_n)$ est démontré d'une autre maniére et la caractérisation des classes de saturation L_r^p est donnée par l'égalité

$$L_r^p = \{f \in L_p : \mathcal{F}^{-1}[(1 + \mid x \mid^2)^{r/2}\hat{f}] \in L_p^*\}.$$

Donc on a $F_p^r = L_r^p$. En outre, on a

Corollaire 5.2. *Soient $f \in L_p(R_n)$, $1 \leq p < \infty$ et $r > 0$. Pour que $\mathcal{F}^{-1}[(1+ \mid x \mid^2)\hat{f}]$ appartienne à L_p^*, il faut et il suffit que $\mathcal{F}^{-1}(\mid x \mid^r \circ \hat{f})$ appartienne à L_p^*.*

Remarque 5.2. Pour $f \in L_p(R_n)$, $1 \leq p \leq 2$, on a $\mid x \mid^r \circ \hat{f} = \mid x \mid^r \hat{f}$. Cela signifie que, pour $1 \leq p \leq 2$, la caractérisation des classes de saturation $F_p^r(R_n)$ est donnée par le produit habituel $\mid x \mid^r \hat{f}$.

6. Les classes de saturation pour les intégrales singulièrs de Weierstrass et de Poisson. Finalement nous allons prouver les théorèmes concernant l'intégrale singulière $I_\rho^r(f,x)$, donnée par (1.6), dans l'espace $M_\alpha(R_n)$, $\alpha > 0$, pour $r = 1, 2$ et dans l'espace $L_p(R_n)$, $1 \leq p < \infty$, pour tout $r > 0$.

THÉORÈME 6.1. *Soient $r = 1, 2$ et $f \in M_\alpha(R_n)$ où $\alpha > 0$ pour $r = 2$ et $0 < \alpha < 1$ pour $r = 1$.*

Alors, pour l'intégrale singulière $I_\rho^r(f,x)$ on a

$$\lim_{\rho\to\infty} \|I_\rho^r(f,x) - f(x)\|_{M_\alpha} = 0.$$

THÉORÈME 6.2. *Soient $r = 1, 2$ et $f \in M_\alpha(R_n)$, $0 < \alpha < r$. Alors, pour l'intégrale singulière $I_\rho^r(f,x)$, donnée par* (1.6), *les assertions suivantes sont vraies:*

(i) *Si*

$$\|I_\rho^r(f,x) - f(x)\|_{M_\alpha} = o(\rho^{-r}),\ \rho \to \infty,$$

alors $f^{\{r\}} = 0$.

(ii) *Si*

$$\|I_\rho^r(f,x) - f(x)\|_{M_\alpha} = O(\rho^{-r}),\ \rho \to \infty, \tag{6.1}$$

alors $f^{\{r\}} \in N_\alpha$.

(iii) *Si pour $f \in M_\alpha$ la dérivée la dérivée $f^{\{r\}} \in N_\alpha$, alors* (6.1) *est vraie.*

THÉORÈME 6.3. *Soinet $r > 0$ et $f \in L_p(R_n)$, $1 \leq p < \infty$. Alors, pour l'intégrale singulière $I_\rho^r(f,x)$ les assertions suivantes sont vraies:*

(i) *Si*

$$\|I_\rho^r(f,x) - f(x)\|_p = o(\rho^{-r}),\ \rho \to \infty,$$

alors $f^{\{r\}} = 0$.

(ii) *Si*

$$\|I_\rho^r(f,x) - f(x)\|_p = O(\rho^{-r}),\ \rho \to \infty, \tag{6.2}$$

alors $f^{\{r\}} \in L_p^*$.

(iii) *Si pour $f \in L_p$ la dérivée $f^{\{r\}}$ appartient à L_p^*, alors* (6.2) *est vraie.*

Remarque 6.1. Nous pouvons prouver le théorème 6.3, concernant l'espace L_p, pour tout $r > 0$ parce que nous n'avons pas besoin de la codition (1.1) pour les fonctions $\mathcal{H}$ et h, ce qui n'était pas le cas pour le théorème 6.2, concernant l'espace M_α, où nous avons besoin de cette condition pour les fonctions $\mathcal{H}$ et h.

Démonstration du théorème 6.1. Nous prouverons que la fonction $H_r(x)$, donnée par (1.5), satisfait aux conditions (1.1) et (4.1), (c'est-à-dire (4.1) et (4.2)), pour $r = 1, 2$, et puis nous appliquerons le corollaire 4.1, en vertu duquel on obtient le théorème 6.1.

En posant $x = 0$ dans (1.5) on obtient que $H_r(x)$ vérifie la condition (4.1).

Nous considérons la condition (4.2) séparément pour $r = 1$ et $r = 2$. On peut déterminer les fonctions H_2 et H_1 en utilisant le résultats de [**14**], ch I, 1.

En effet, on a $H_2(x) = 2^{-n/2}e^{-|x|^2/4}$.

La fonction H_2 vérifie la condition (4.2) parce que

$$\int_{R_n} (1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} e^{-|x|^2/4} dx = C(n) \int_0^\infty (1+u^2)^{\alpha/2} u^{n-1} e^{-u^2/4} du = C(n, \alpha).$$

Pour $r = 1$ on a (v. [**14**, ch I, t. 14])

$$H_1(x) = \frac{2^{n/2}\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(1+ \mid x \mid^2)^{(n+1)/2}}.$$

La fonction $H_1(x)$ vérifiera la condition (4.2) si

$$\int_0^\infty t(1+t^2)^{(\alpha-n-1)/2} dt < \infty$$

c'est-à-dire pour $\alpha < 1$. Le théorème 6.1. est démontré.

Démonstration du théorème 6.2. Dans la démonstration du théorème 6.1. nous avons prouvé que les fonction $H_r(x)$ vérifient les conditions (1.1) et (4.1) pour $r = 1, 2$. Pour prouver ce théorème nous devons prouver que les fonctions $h_r(x)$, déterminées par (5.1), satisfont aux conditions (1.1) et (4.1) pour $0 < \alpha < r$.

A l'aide de l'égalité

$$(1 - e^{-qu}) q^{-1} = \int_0^u e^{-qt} dt$$

pour $u = 1$, $q =\mid v \mid^r$, on a

$$(1 - \hat{H}_r(v)) \mid v \mid^{-r} = \int_0^1 e^{-t|v|^r} dt$$

et, en vertu de l'égalité (5.1), nous concluons que

$$b\hat{h}_r(v) = \int_0^1 e^{-(|v|t^{1/r})^r} dt = \int_0^1 H_r(vt^{1/r}) dt. \tag{6.3}$$

En tenant compte de l'égalité

$$\hat{f}(v/\rho) = [\rho^n f(\rho \cdot)] \wedge (v), \quad f \in L_1(r_n), \ v \in R_n, \quad \rho > 0$$

de (6.3) il résulte que

$$\begin{aligned} b\hat{h}_r(v) &= \int_0^1 [t^{-n/r} H_r(t^{-1/r})] \wedge (v) dt = \\ &= \int_0^1 \{(2\pi)^{-n/2} \int_{R_n} t^{-n/r} H_r(t^{-1/r}x) e^{-ixv} dx\} dt. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Par substitution $x = t^{1/r}u$, $(x, u \in R_n,\ t > 0)$, nous obtenons

$$\int_{R_n} t^{-n/r} H_r(t^{1/r}x) e^{-ixv} dx = \int_{R_n} H_r(u) e^{-i(t^{1/r}v)u} du \tag{6.5}$$

Maintenant de (6.4), en vertu de (6.5), il résulte que $| \ b \ || \ h_r(v) \ | \leq \|H_r\|_1, (r > 0)$.

Cela signifie que nous pouvons appliquer le théorème de Fubini à l'intègale de (6.4), en vertu de quoi nous obtenons

$$b\hat{h}_r(v) = \Big[\int_0^1 t^{-n/r} H_r(t^{-1/r}x) dt\Big] \wedge (v).$$

Il s'ensuit que

$$bh_r(x) = \int_0^1 t^{-n/r} H_r(t^{-1/r}x) dt, \quad r > 0 \tag{6.6}$$

Pour déterminer la constante b, utilisons la condition (4.1) pour la fonction $h_r(x)$ donnée par (6.6). On obtient $b = 1$.

Donc, la fonction h_r, donnée par (6.6) pour $b = 1$, vérifie (4.1) pour tout $r > 0$. Nous allons prouver que cette fonction h_r, pour $r = 1, 2$, vérifie aussi la condition (1.1).

En vertu de (6.6), pour $r = 1, 2$, on a

(6.7)

$$\int_{R_n} (1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} h_r(x) dx = \int_0^1 t^{-n/r} \Big\{ \int_{R_n} (1+ \mid x \mid^2)^{\alpha/2} H_r(t^{-1/r}x) dx \Big\} dt =$$
$$= \int_0^1 \Big\{ \int_{R_n} (1+ \mid u \mid^2 t^{2/r})^{\alpha/2} H_r(u) du \Big\} dt \leq$$
$$\leq \int_0^1 \Big\{ \int_{R_n} (1+ \mid u \mid^2)^{\alpha/2} H_r(u) du \Big\} dt = \int_{R_n} (1+ \mid u \mid^2)^{\alpha/2} H_r(u) du < \infty$$

parce que nous avons prouvé, dans la démonstration du théorème 6.1, que les fonctions H_1 et H_2 vérifiant la condition (1.1). Maintenant le théorème 6.2 résulte du théorème 5.1.

Remarque 6.2. En vertu de (6.7) nous concluons que la condition (1.1) pour la fonction h_r est la conséquence de la même condition pour la fonction $H_r (r = 1, 2)$.

Démonstration du théorème 6.3. Pour $r > 0$ la fonction H_r appartient à $L_1(R_n)$ et vérifie la condition (4.1). Nous avons prouvé dans la démonstration du théorème 6.2 que la fonction h_r vérifie la condition (4.1). En utilisant (6.6) et la substitution $x = t^{1/r}u (x, u \in R_n,\ t > 0)$, nous concluons que $h_r \in L_1(R_n)$ pour tout $r > 0$. En appliquant le théorème 5.2, on obtient le théorème 6.3.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Berens, R. J. Nessel, *Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, V, Saturation in* $L_p, 2 < p < \infty$, Nederl. Akad. Wetensch., Ser A, **72**, No 1, Math. **31**, No 1, (1969), 71–76.

[2] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation, vol. I*, Birkhäuser-Verlag, Basel und Stutgart, 1971.

[3] P. L. Butzer, R. J. Nessel, *Contributions to the theory of saturation, I*, Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A, **69**, No 5, Math. **28**, (1966), 515–531.

[4] N. Danford, J. T. Schwartz *Applications linéaires, théorie generale, I*, Izd. in. lit. Moscou, 1962, (russe).

[5] E. Görlich, *Saturation Theorems and Distributional Methods*, ISNM 10, Birkhäuser-Verlag, 1969, 218–232.

[6] E. Görlich, *Distributional Methods in Saturation Theory*, J. Approx. Theory **1** (1968), 111–136.

[7] J. Horvath, *Topological Vector Space and Distributions*, Addison Wesley, 1966.

[8] R. J. Nessel, *Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables, II, III*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **29** (1967), 52–64, 65–73.

[9] S. M. Nikolski, *L'approximation des fonctions de plusieurs variables et les théorèmes d'inclusions*, Nauka, Moscou, 1969, (russe).

[10] T. Ostrogorski, *Global and local saturation theorems in some spaces of temperate functions*, Publ. Inst. Math. (N. S.), (Beograd), **20** (**44**), (1979), 199–213.

[11] L. Schwartz, *Théorie des distributions, t. 2*, Hermann, Paris, 1951.

[12] L. Schwartz, *Analyse, topologie générale et analyse fonctionnelle* Hermann, Paris, 1970.

[13] E. M. Stein, *Les intégrales singulièrs et les propriértés différentiables des fonctions*, Mir, Moscou, 1973 (russe).

[14] E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Mir, Moscou, 1974, (russe).

[15] M. Tomić, *One product of distributions*, Proc. Internat. Conf. GFCA, Dubrovnik, 1987, (to appear).

[16] V. S. Vladimirov, *Les fonction génèrales dans les physique mathématiqye*, Nauka, Moscou, 1976, (russe).

Mašinski fakultet
71000 Sarajevo
Jugoslavija

(Received 14 11 1986)
(Revised 09.12 1987)