PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 50 (64), 1991, 96–104

SYMMETRISCHE INVERSE α-AREOLÄRE DIFFERENZEN UND α-INTERPOLATION

Miloš Čanak

Abstract. Applying previously introduced notion of symmetric, inverse α-areolar differences, we construct the α-interpolating complex continued fraction which, on given closed contours $\bar{z} = g_i(z)$, $(i = 0, 1, \dots, n)$, satisfies particular interpolation conditions. The question of the interpolation error is also considered.

In seiner Dissertation [**1**] hat der Verfasser den Begriff der areolären Reihe eingeführt und die Frage ihrer Konvergenz erforscht. Die areoläre Reihe ist die komplexe Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{z}^k \varphi_k(z) \tag{1}$$

wobei $\varphi_k(z)$ beliebige, analytische Funktionen sind. Der Verfasser hat auch den folgenden Satz beweist:

SATZ. *Es sei $w(z, \bar{z})$ eine stetige, komplexe Funktion in einem Gebiet G, das den Koordinatenursprung enthält. Nehmen wir an, dass sie stetige, areoläre Ableitungen beliebiger Ordnung in G besitzt.* (*Die areoläre Ableitung ist die Ableitung im Sinne von Kollossov*

$$Dw = (u'_x - v'_y) + i(u'_y + v'_x) = 2w'_{\bar{z}}\ ). \tag{2}$$

Dann lässt sich diese Funktion in der Umgebung G_1 vom Koordinatenursprung in eine areoläre Reihe der Form (1) *entwickeln. Für die Ausrechnung der Koeffizienten $\varphi_k(z)$ gilt die folgende Formel*

$$\varphi_k(z) = \frac{\alpha_0 D^k w}{2^k k!}. \tag{3}$$

AMS Subject Classification (1985): Primary 30 B 70

Bemerkung. Es sei $\{W \mid w = w(z,\bar{z})\}$ die Menge der stetigen, komplexen Funktionen in G, und es sei $\{\Omega \mid \omega = \omega(z)\}$ die Menge der analytischen Funktionen in G. Der Operator α_0 realisiert eine Abbildung der Menge W auf die Menge Ω auf folgende Art und Weise: Die Funktion $\omega = \alpha_0 w$ ist eine solche Funktion, die aus der Funktion $w = w(z,\bar{z})$ entstehen kann, wenn wir den Wert $\bar{z}$ mit 0 vertauschen und den Wert z unveränderlich lassen. Die Funktion $\omega = \alpha_0 w$ enthält keine Veränderliche $\bar{z}$ und darum ist sie analytisch.

Auf eine ähnliche Art und Weise können wir den Operator $\alpha_{g(z)}$ definieren, wobei $\bar{z} = g(z)$ die Gleichung einer glatten, einfachen, geschlossenen Kontur ist. Dieser Operator korrespondiert jeder stetiger, komplexer Funktion $w = w(z,\bar{z})$ eine analytische Funktion, die sich erhalten kann, wenn wir den Wert $\bar{z}$ mit $g(z)$ vertauschen und den Wert z unveränderlich lassen. Der geometrische Sinn dieses Operators ist folgender: Die Funktionen $w(z,\bar{z})$ und $\alpha_{g(z)}w$ besitzen einen gleichen Randwert auf der geschlossenen Kontur $\bar{z} = g(z)$.

Definition 1. Es sei ein komplexer Kettenbruch der Form

$$w_0(z) + \cfrac{w_1(z)\cdot\bar{z}}{1 + \cfrac{w_2(z)\cdot\bar{z}}{1 + \ddots + \cfrac{w_k(z)\cdot\bar{z}}{1+\ddots}}} \tag{4}$$

gegeben, wobei die Koeffizienten w_i $(i = 0,1,\dots,k)$ beliebige, analytische Funktionen sind. Die Brüche der Form

$$w_0(z) + \cfrac{w_1(z)\cdot\bar{z}}{1 + \cfrac{w_2(z)\cdot\bar{z}}{1 + \ddots + \cfrac{w_k(z)\cdot\bar{z}}{1+\ddots}}} = \frac{P_k(z,\bar{z})}{Q_k(z,\bar{z})}, \qquad (k = 1,2,\dots) \tag{5}$$

nennt man als *die gültigen Brüche* für den Kettenbruch (4). Für die Ausrechnung des Zählers und Nenners des k-ten gültigen Bruches gelten die folgenden rekurrenten Formeln

$$\begin{aligned} P_k(z,\bar{z}) &= P_{k-1}(z,\bar{z}) + w_k(z)\bar{z}\cdot P_{k-2}(z,\bar{z}) \\ Q_k(z,\bar{z}) &= Q_{k-1}(z,\bar{z}) + w_k(z)\bar{z}\cdot Q_{k-2}(z,\bar{z}) \end{aligned} \qquad (k = 1,2,\dots) \tag{6}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$P_0 = w_0, \qquad P_{-1} = 1, \qquad Q_0 = 1, \qquad Q_{-1} = 0 \tag{7}$$

(siehe [**2**]).

Definition 2. Für eine gegebene areoläre Reihe der Form (1) kann man einen solchen komplexen Kettenbruch bestimmen, dass die Entwicklung jedes seinen n-ten gültigen Bruches in die areoläre Reihe, mit der gegebenen Reihe einschliesslich

$\bar{z}^n$ identisch ist. Einen solchen Kettenbruch nennen wir als *der korrespondierende areoläre Kettenbruch* für die gegebene areoläre Reihe (1). Er lässt sich auf folgende Art und Weise bestimmen.

Es sei eine areoläre Reihe der Form (1) gegeben. Den korrespondierenden, areolären Kettenbruch suchen wir in de Form (4) oder

$$w_0(z) + \frac{w_1(z)\bar{z}\mid}{\mid 1} + \frac{w_2(z)\bar{z}\mid}{\mid 1} + \cdots + \frac{w_n(z)\bar{z}\mid}{\mid 1} + \cdots = w_0(z) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{w_i(z)\bar{z}\mid}{\mid 1} \tag{8}$$

wobei man die unbekannten analytischen Koeffizienten $w_i(z)$ bestimmen soll.

Schreiben wir die Reihe (1) in der Form $w(z,\bar{z}) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z)W_1(z,\bar{z})\bar{z}$ mit

$$W_1(z,\bar{z}) = 1 + \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}\bar{z} + \frac{\varphi_3(z)}{\varphi_1(z)}\bar{z}^2 + \cdots + \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_1(z)}\bar{z}^{n-1} + \cdots .$$

Führen wir die Substitution

$$1/W_1(z,\bar{z}) = 1 - \beta_1(z)\bar{z} + \beta_2(z)\bar{z}^2 + \cdots + (-1)^n\beta_n\bar{z}^n + \cdots \tag{9}$$

ein. Wenn man die beiden Seite von (9) mit $W_1(z,\bar{z})$ multipliziert und die entsprechenden Koeffizienten vergleicht, so erhält man

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)} - \beta_1(z) = 0\\
&\frac{\varphi_3(z)}{\varphi_1(z)} - \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_1(z)}\beta_1(z) + \beta_2(z) = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_1(z)} - \beta_1(z)\frac{\varphi_n(z)}{\varphi_1(z)} + \beta_2(z)\frac{\varphi_{n-1}(z)}{\varphi_1(z)} + \cdots + (-1)^n\beta_n(z) = 0.
\end{aligned}$$

Daraus finden wir sukzessiv die Koeffizienten $\beta_n(z)$, $(n = 1, 2, \dots)$

$$\beta_n(z) = (-1)^{n+1}\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_1(z)} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\beta_{n-k}(z)\frac{\varphi_{k+1}(z)}{\varphi_1(z)}. \tag{10}$$

Schreiben wir weiterhin $1/W_1(z,\bar{z})$ in der Form $1/W_1(z,\bar{z}) = 1 - \beta_1(z)\bar{z} \cdot W_2(z,\bar{z})$ mit

$$W_2(z,\bar{z}) = 1 - \frac{\beta_2(z)}{\beta_1(z)}\bar{z} + \frac{\beta_3(z)}{\beta_1(z)}\bar{z}^2 + \cdots + (-1)^n\frac{\beta_{n+1}(z)}{\beta_1(z)}\bar{z}^n + \cdots .$$

Führen wir wieder die Substitution $1/W_2(z,\bar{z}) = 1 + \gamma_1(z)\bar{z} + \gamma_2(z)\bar{z}^2 + \cdots$ ein. Wenn man die beiden Seite dieser Gleichung mit $W_2(z,\bar{z})$ multipliziert und die entsprechenden Koeffizienten vergleicht, so kann man die Funktionen $\gamma_i(z)$ bestimmen. Das gleiche Verfahren lässt sich ad infinitum fortsetzen. Dabei erhält man formal den Bruch

$$W(z,\bar{z}) = \varphi_0(z) + \frac{\varphi_1(z)\bar{z}\mid}{\mid 1} - \frac{\beta_1(z)\bar{z}\mid}{\mid 1} + \frac{\gamma_1(z)\bar{z}\mid}{\mid 1} + \cdots$$

oder

$$W(z,\bar z) = w_0(z) + \frac{w_1(z)\bar z \mid}{\mid 1} + \frac{w_2(z)\bar z \mid}{\mid 1} + \cdots + \frac{w_n(z)\bar z \mid}{\mid 1} \tag{11}$$
$$(w_0 = \varphi_0, \quad w_1 = \varphi_1, \quad w_2 = -\beta_1, \quad w_3 = \gamma_1, \quad \dots)$$

deren Koeffizienten mitels der Koeffizienten der Reihe (1) ausgedrückt werden.

Die Brüche die den gegebenen areolären Reihen (1) in der Form (11) entsprechen, werden als *die regulären, areolären Kettenbrüche* genannt.

Satz 2. *Die Ordnung der Polynome P_{2s}, Q_{2s}, P_{2s-1}, Q_{2s-1} der entsprechenden gültigen Brüche P_{2s}/Q_{2s} und P_{2s-1}/Q_{2s-1} für den areolären Kettenbruch* (11) *der der areolären Reihe*

$$1 + c_1(z)\bar z + c_2(z)\bar z^2 + \cdots + c_n(z)\bar z^n + \cdots \tag{12}$$

korrespondiert, kann nicht s-te Ordnng übertreffen. Die Koeffizienten dieser Polynome lassen sich eindeutig mittels der Funktionen $w_n(z)$ $(n = 1, 2, \dots)$ ausdrücken.

Beweis. Beweisen wir dass die Polynome P_{2s}, Q_{2s}, P_{2s-1}, Q_{2s-1} in der Form

$$\begin{aligned} P_{2s} &= \alpha_{s,0}(z) + \alpha_{s,1}(z)\bar z + \alpha_{s,2}(z)\bar z^2 + \cdots + \alpha_{s,s}(z)\bar z^s \\ Q_{2s} &= \beta_{s,0}(z) + \beta_{s,1}(z)\bar z + \beta_{s,2}(z)\bar z^2 + \cdots + \beta_{s,s}(z)\bar z^s \\ P_{2s-1} &= \gamma_{s,0}(z) + \gamma_{s,1}(z)\bar z + \gamma_{s,2}(z)\bar z^2 + \cdots + \gamma_{s,s}(z)\bar z^s \\ Q_{2s-1} &= \delta_{s,0}(z) + \delta_{s,1}(z)\bar z + \delta_{s,2}(z)\bar z^2 + \cdots + \delta_{s,s-1}(z)\bar z^{s-1} \end{aligned} \tag{13}$$

darstellbar sind. Auf Grund der rekurrenten Formel (6), gilt

$$P_n = P_{n-1} + w_n(z)\bar z P_{n-2}. \tag{14}$$

Leicht kann man einige von erster Glieder

$$\begin{aligned} P_1 &= w_0(z) + w_1(z)\bar z \\ P_2 &= w_0(z) + [w_1(z) + w_0(z)w_2(z)]\bar z \\ P_3 &= w_0(z) + [w_1(z) + w_0(z)w_2(z) + w_0(z)w_3(z)]\bar z + w_1(z)w_3(z)\bar z^2 \\ P_4 &= w_0(z) + [w_1(z) + w_0(z)w_2(z) + w_0(z)w_3(z) + w_0(z)w_4(z)]\bar z \\ &\qquad + [w_1(z)w_3(z) + w_1(z)w_4(z) + w_0(z)w_2(z)w_4(z)]\bar z^2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

dieser Folge ausrechnen.

Wenn wir annehmen, dass die Relationen (13) für $s = k$ erfüllt sind, d.h.

$$\begin{aligned} P_{2k} &= \alpha_{k,0}(z) + \alpha_{k,1}(z)\bar z + \alpha_{k,2}(z)\bar z^2 + \cdots + \alpha_{k,k}(z)\bar z^k \\ P_{2k-1} &= \gamma_{k,0}(z) + \gamma_{k,1}(z)\bar z + \gamma_{k,2}(z)\bar z^2 + \cdots + \gamma_{k,k}(z)\bar z^k \end{aligned}$$

so finden wir durch die Ausnützung der Formel (14) auch die Werte

$$
\begin{aligned}
P_{2k+1} &= \alpha_{k,0}(z) + \bar{z}[\alpha_{k,1}(z) + \gamma_{k,0}(z)w_{2k+1}(z)] \\
&\quad + \bar{z}^2[\alpha_{k,2}(z) + \gamma_{k,1}(z)w_{2k+1}(z)] + \cdots + \gamma_{k,k}(z)w_{2k+1}(z)\bar{z}^{k+1} \\
P_{2k+2} &= \alpha_{k,0}(z) + \bar{z}[\alpha_{k,1}(z) + \gamma_{k,0}(z)w_{2k+1}(z) + \alpha_{k,0}(z)w_{2k+2}(z)] \\
&\quad + \cdots + \bar{z}^{k+1}[\gamma_{k,k}(z)w_{2k+1}(z) + \alpha_{k,k}(z)w_{2k+2}(z)]
\end{aligned}
$$

und das heisst, dass P_{2k+1} und P_{2k+2} Polynome $(k+1)$-ter Ordnung sind. Dadurch wird mit Hilfe der Methode der mathematischen Induktion gezeigt, dass P_{2s-1} und P_{2s} Polynome s-ter Ordnung sind. Auf eine gleiche Art und Weise beweist man diese Tatsache für alle Werte (13).

Durch eine einfache Berechnung erhalten wir die folgenden Formeln

$$
\begin{aligned}
\alpha_{s,s}(z) &= w_1(z)w_2(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s}(z)\cdot\Bigg[1+\frac{w_1(z)}{w_2(z)}+\frac{w_1(z)w_3(z)}{w_2(z)w_4(z)} \\
&\qquad + \cdots + \frac{w_1(z)w_3(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s-1}(z)}{w_2(z)w_4(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s}(z)}\Bigg] \\
\beta_{s,s}(z) &= w_2(z)w_4(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s}(z) \\
\gamma_{s,s}(z) &= w_1(z)w_3(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s-1}(z) \\
\delta_{s,s-1}(z) &= w_2(z)w_3(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s-1}(z)\cdot\Bigg[1+\frac{w_2(z)}{w_3(z)}+\frac{w_2(z)w_4(z)}{w_3(z)w_5(z)}+ \\
&\qquad + \cdots + \frac{w_2(z)w_4(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s-2}(z)}{w_3(z)w_5(z)\cdot\ldots\cdot w_{2s-1}(z)}\Bigg].
\end{aligned} \tag{15}
$$

Definition 3. Es sei eine nichtanalytische komplexe Funktion $W(z,\bar{z})$ gegeben, und es seien L_0: $\bar{z}=g_0(z)$, L_1: $\bar{z}=g_1(z)$, $\ldots$, L_n: $\bar{z}=g_n(z)$ die Gleichungen von $(n+1)$-einfachen, glatten, geschlossenen Konturen, wobei alle analytische Funktionen $g_i(z)$ $(i=0,1,\ldots,n)$ verschiedene sind. Wir definieren die *α-Interpolation* der Funktion $W(z,\bar{z})$ als Approximation dieser Funktion mit einem komplexen, areolären Kettenbruch $s(z,\bar{z})$ der Form (4) wobei die folgenden Bedingungen

$$
\begin{gathered}
\alpha_{g_0(z)}W = \alpha_{g_0(z)}s(z,\bar{z}) = s_0(z), \quad \alpha_{g_1(z)}W = \alpha_{g_1(z)}s(z,\bar{z}) = s_1(z), \\
\ldots, \quad \alpha_{g_n(z)}W = \alpha_{g_n(z)}s(z,\bar{z}) = s_n(z)
\end{gathered} \tag{16}
$$

erfüllt sind.

Da der Interpolationsbruch auf der gegebenen Konturen $\bar{z}=g_i(z)$ $(i=0,1,\ldots,n)$, den gleichen Randwert wie die Funktion $W(z,\bar{z})$ hat, so ist der Sinn dieser Interpolation in der Approximation einer vielleicht komplizierten Funktion mit einem Kettenbruch der in vielen Fällen für die numerischen Berechnungen günstiger ist. Andererseits, kann diese Interpolation eine wichtige Rolle in der Theorie der Randwertaufgaben für die nichtanalytischen Funktionen spielen.

In seiner Arbeit [**3**] hat der Verfasser gezeigt, dass der gesuchte α-Interpolationskettenbruch die folgende Form

$$
s(z,\bar{z}) = \alpha_{g_0}W + \frac{\bar{z}-g_0\ |}{|\ F_1(g_0,g_1)} + \frac{\bar{z}-g_1\ |}{|\ F_2(g_0,g_1,g_2)} + \cdots + \frac{\bar{z}-g_{n-1}\ |}{|\ F_n(g_0,g_1,\ldots,g_n)} \tag{17}
$$

besitzt, wobei $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_k$, die sgn. k-ten inversen, α-areolären Differenzen der Funktion $W(z,\bar{z})$ für die Werte $g_0(z)$, $g_1(z)$, $\ldots$, $g_n(z)$ sind, die durch die Formeln

$$
\begin{aligned}
&F_0(g_0) = \alpha_{g_0} W, \qquad F_1(g_0, g_1) = \frac{g_1(z) - g_0(z)}{\alpha_{g_1} W - \alpha_{g_0} W} \\
&F_2(g_0, g_1, g_2) = \frac{g_2(z) - g_1(z)}{F_1(g_0, g_2) - F_1(g_0, g_1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F_k(g_0, g_1, \ldots, g_k) = \frac{g_k(z) - g_{k-1}(z)}{F_{k-1}(g_0, \ldots, g_{k-2}, g_k) - F_{k-1}(g_0, \ldots, g_{k-1})}
\end{aligned} \tag{18}
$$

gegeben werden.

Die inversen Differenzen (18) sind nicht symmetrisch. Aber, in der Interpolationstheorie spielen die Differenzen, die symmetrisch im Bezug auf die Argumenten g_i sind, eine wichtige Rolle. Darum hat der Verfasser in seiner Arbeit [**4**] den Begriff der *symetrischen, inversen, α-areolären Differenz* eingeführt. Aus der Definitionsrelation

$$
\begin{aligned}
r_k(g_0, g_1, \ldots, g_k) &= F_k(g_0, \ldots, g_k) + F_{k-2}(g_0, \ldots, g_{k-2}) \\
&+ F_{k-4}(g_0, \ldots, g_{k-4}) + \cdots + F_{k-2[k/2]}(g_0, \ldots, g_{k-2[k/2]})
\end{aligned} \tag{19}
$$

erhält man die folgende rekurrente Formel

$$
r_k(g_0, \ldots, g_k) - r_{k-2}(g_0, \ldots, g_{k-2}) = F_k(g_0, \ldots, g_k). \tag{20}
$$

Der Ausdruck

$$
\begin{aligned}
r_k(g_0, \ldots, g_{k-1}, g_k) &= \frac{g_k - g_{k-1}}{r_{k-1}(g_0, \ldots, g_{k-2}, g_k) - r_{k-1}(g_0, \ldots, g_{k-2}, g_{k-1})} \\
&+ r_{k-2}(g_0, \ldots, g_{k-2}), \qquad r_{-1} = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots)
\end{aligned} \tag{21}
$$

stellt die symmetrische, inverse, α-areoläre Differenz k-ter Ordnung für die Funktion $W(z,\bar{z})$ und für die Argumente $g_0, g_1, \ldots, g_k$ dar.

Auf Grund der Formeln (19) und (20) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&F_0(g_0) = \alpha_{g_0(z)} W, \qquad F_1(g_0, g_1) = r_1(g_0, g_1) \\
&F_2(g_0, g_1, g_2) = r_2(g_0, g_1, g_2) - \alpha_{g_0} W \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F_n(g_0, g_1, \ldots, g_n) = r_n(g_0, g_1, \ldots, g_n) - r_{n-2}(g_0, g_1, \ldots, g_{n-2}).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Wenn wir die Werte (22) in (17) einsetzen, so geht diese Formel in

$$
\begin{aligned}
s(z,\bar{z}) &= \alpha_{g_0(z)} W + \frac{\bar{z} - g_0 \mid}{\mid r_1(g_0, g_1)} + \frac{\bar{z} - g_1 \mid}{\mid r_2(g_0, g_1, g_2) - \alpha_{g_0} W} \\
&+ \cdots + \frac{\bar{z} - g_{n-1} \mid}{\mid r_n(g_0, \ldots, g_n) - r_{n-2}(g_0, \ldots, g_{n-2})}
\end{aligned} \tag{23}
$$

über. Die Formel (23) stellt die Verallgemeinerung der Interpolationsformel von Thiele (siehe [**5**]) für die reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen dar.

Satz 3. *Die symmetrischen, inversen, α-areolären Differenzen $r_s(g_0, g_1, \ldots, g_s)$ der stetigen komplexen Funktion $F(z,\bar{z})$ lassen sich eindeutig mittels der Werte g_s und $\alpha_{g_s}W$ $(s = 1, 2, \ldots)$, als Quotient von zwei Determinanten, die sich nur in der letzten Spalten unterscheiden, darstellen. Sie sind symmetrisch im Bezug auf alle Argumente.*

Beweis. Betrachten wir einen allgemeinen, komplexen Kettenbruch der Form

$$a_0(z,\bar{z}) + \frac{b_1(z,\bar{z})\,|}{|\,a_1(z,\bar{z})} + \frac{b_2(z,\bar{z})\,|}{|\,a_2(z,\bar{z})} + \cdots + \frac{b_k(z,\bar{z})\,|}{|\,a_k(z,\bar{z})} + \cdots \tag{24}$$

und seinen k-ten gültigen Bruch B_k/A_k. Die Formeln

$$B_k = a_k B_{k-1} + b_k B_{k-2}, \quad A_k = a_k A_{k-1} + b_k A_{k-2} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

die die Verallgemeinerungen der Formeln (6) darstellen, lassen sich in der Matrizenform

$$\begin{bmatrix} B_k & B_{k-1} \\ A_k & A_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{k-1} & B_{k-2} \\ A_{k-1} & A_{k-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ b_k & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

schreiben. Wenn wir das Verfahren (26) k-mal wiederholen, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} B_k & B_{k-1} \\ A_k & A_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ b_k & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

und speziell

$$\begin{bmatrix} B_k \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} a_{k-1} & 1 \\ b_{k-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_k \\ b_k \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Wenn der Kettenbruch (24) in (23) übergeht, so haben wir

$$\begin{aligned} &a_0 = \alpha_{g_0(z)}W, \quad b_1 = \bar{z} - g_0, \quad a_1 = r_1(g_0, g_1), \quad \ldots, \\ &b_k = \bar{z} - g_{k-1}, \quad , a_k = r_k(g_0, \ldots, g_k) - r_{k-2}(g_0, \ldots, g_{k-2}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_k \\ A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{g_0}W & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1(g_0, g_1) & 1 \\ \bar{z} - g_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_2(g_0, g_1, g_2) - \alpha_{g_0}W & 1 \\ \bar{z} - g_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \cdot \ldots \cdot \begin{bmatrix} r_{k-1} - r_{k-3} & 1 \\ \bar{z} - g_{k-2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k - r_{k-2} \\ \bar{z} - g_{k-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{29}$$

Unmittelbar aus (29), wie auch auf Grund des Satzes 2 sieht man, dass $B_{2k+1}(z,\bar{z})$, $A_{2k+1}(z,\bar{z})$ und $B_{2k}(z,\bar{z})$ areoläre Polynome k-ter Ordnung sind und

$A_{2k}(z,\bar{z})$ ein areoläres Polynom $(k-1)$-ter Ordnung darstellt. Diese Polynome haben die Form

$$\begin{aligned}
B_{2k} &= f_0(z) + f_1(z)\bar{z} + \cdots + f_{k-1}(z)\bar{z}^{k-1} + \bar{z}^k \\
A_{2k} &= e_0(z) + e_1(z)\bar{z} + \cdots + e_{k-2}(z)\bar{z}^{k-2} + \bar{z}^{k-1} r_{2k-1} \\
B_{2k+1} &= d_0(z) + d_1(z)\bar{z} + \cdots + d_{k-1}(z)\bar{z}^{k-1} + \bar{z}^k r_{2k} \\
A_{2k+1} &= c_0(z) + c_1(z)\bar{z} + \cdots + c_{k-1}(z)\bar{z}^{k-1} + \bar{z}^k.
\end{aligned} \tag{30}$$

Wenn wir den k-ten gültigen Bruch $Y(z,\bar{z}) = B_k/A_k$ als Approximation wählen, so haben wir $Y(z,\bar{z}) = B_k/A_k + R_k$ wobei R_k Approximationsfehler ist. Daraus folgt

$$\alpha_{g_s(z)} R_k = 0, \qquad \forall s = 0,1,\ldots,k-1$$

und $\alpha_{g_s} W = \alpha_{g_s}[B_k/A_k]$ oder

$$\alpha_{g_s} B_k - \alpha_{g_s} W \cdot \alpha_{g_s} A_k = 0. \tag{31}$$

Wenn wir jetzt in (31) k mit $2k$ vertauschen und nützen dabei (30) so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&f_0(z) + f_1(z) g_s(z) + \cdots + f_{k-1}(z)[g_s(z)]^{k-1} + [g_s(z)]^k \\
&- \alpha_{g_s} W \cdot [e_0(z) + e_1(z) g_s(z) + \cdots + e_{k-2}(z)[g_s(z)]^{k-2} \\
&\qquad + [g_s(z)]^{k-1} r_{2k-1}] = 0, \qquad (s = 0,1,\ldots,2k-1).
\end{aligned} \tag{32}$$

Durch Auflösen des Systems (32) von $2k$ lineären, algebraischen Gleichungen, finden wir die Werte $e_0(z)$, $e_1(z)$, $\ldots$, $e_{k-2}(z)$, $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\ldots$, $f_{k-1}(z)$, r_{2k-1} und dadurch auch B_{2k}/A_{2k}. Den Wert r_{2k-1} finden wir als Quotient von zwei Determinanten

$$r_{2k-1}(g_0, g_1, \ldots, g_{2k-1}) = \frac{|1, \alpha_{g_s} W, g_s, g_s \cdot \alpha_{g_s} W \ldots g_s^{k-1}, g_s^k|}{|1, \alpha_{g_s} W, g_s, g_s \cdot \alpha_{g_s} W \ldots g_s^{k-1}, g_s^{k-1} \cdot \alpha_{g_s} W|} \tag{33}$$

die sich nur in der letzten Spalten unterscheiden. Der Quotient (33) zeigt uns, dass $r_{2k-1}(g_0, g_1, \ldots, g_{2k-1})$ eine symmetrische Funktion im Bezug auf alle Argumente ist. Nähmlich, Änderung der Stelle beliebiger zwei Argumente bezeichnet die Änderung der gleichen Zahl von Spalten bei den beiden Determinanten und darum ändert sich der Wert (33) nicht.

Auf eine gleiche Art und Weise finden wir den Wert

$$r_{2k}(g_0, g_1, \ldots, g_{2k}) = \frac{|1, \alpha_{g_s} W, g_s, g_s \cdot \alpha_{g_s} W \ldots g_s^{k-1} \cdot \alpha_{g_s} W, g_s^k \cdot \alpha_{g_s} W|}{|1, \alpha_{g_s} W, g_s, g_s \cdot \alpha_{g_s} W \ldots g_s^{k-1} \cdot \alpha_{g_s} W, g_s^k|} \tag{34}$$

Diese Funktion ist auch symmetrisch im Bezug auf alle Argumente.

Aus diesem Ergebnis folgt, dass sich die Argumente g_k der symmetrischen, inversen, α-areolären Differenzen in einer beliebigen Anordnung wählen lassen, was eine grosse Bedeutung in der Interpolationstheorie hat.

Bemerkung 2. Ahnlich wie in der Arbeit [**3**] reduziert sich die Abschätzung des Interpolationsfählers auf die Abschätzung des Ausdrucks $\sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{z}^k \cdot \psi_k(z)$. Nehmen wir an, dass in einem endlichen, gechlossenen Gebiet

$$|z| \le E \qquad \text{und} \qquad |\psi_k(z)| \le C$$

für jede $k = n+1, n+2, \dots$ gilt, wobei E und C positive Konstanten sind. Daraus folgt

$$|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{z}^k \psi_k(z) \right| \le \frac{C \cdot E^{n+1}}{1-E} \tag{35}$$

und wir sehen dass $|R_n| \to 0$ für $E < 1$ und $n \to \infty$.

Beispiel. Es seien vier konzentrische Kreise K_1: $\bar{z} = 1/z$, K_2: $\bar{z} = 4/z$, K_3: $\bar{z} = 9/z$, K_4: $\bar{z} = 16/z$, gegeben. Man soll den α-areolären Interpolationskettenbruch $s(z, \bar{z})$ der Form (23) bestimmen, der auf den gegebenen Konturen den follgenden Randbedingungen

$$\alpha_{1/z} s = z^2, \quad \alpha_{4/z} s = z^2/4, \quad \alpha_{9/z} s = z^2/9, \quad \alpha_{16/z} s = z^2/16 \tag{36}$$

genügt.

Auf Grund der gegebenen Daten kann man die folgende Tafel

$g(z)$	$\alpha_{g(z)} s$	r_1	r_2
$g_0(z) = 1/z$	$\alpha_{g_0} s = z^2$		
$g_1(z) = 4/z$	$\alpha_{g_1} s = z^2/4$	$r_1(g_0, g_1) = -4/z^3$	
$g_2(z) = 9/z$	$\alpha_{g_2} s = z^2/9$	$r_1(g_1, g_2) = -36/z^3$	$r_2(g_0, g_1, g_2) = 0$
$g_3(z) = 16/z$	$\alpha_{g_3} s = z^2/16$	$r_1(g_2, g_3) = -144/z^3$	$r_2(g_1, g_2, g_3) = 0$

formieren. Durch Substitution der Werte aus dieser Tafel in die Formel (23) erhält man

$$s(z, \bar{z}) = z^2 + \cfrac{\bar{z} - 1/z}{-4/z^3 + \cfrac{\bar{z} - 4/z}{-z^2}} \tag{37}$$

oder nach Ausrechnung $s(z, \bar{z}) = z/\bar{z}$.

LITERATUR

[**1**] M. Čanak, *Metode diferencijalnih i funkcionalnih jednačina za rešavanje nekih tipova graničnih problema*, doktorska disertacija, PMF, Beograd, 1977.

[**2**] А. Хинчин, *Цепные дробы*, Москва, Наука, 1978.

[**3**] M. Čanak, *On α-interpolation by areolar continued fractions*, Numerical Methods and Approximation Theory, Novi Sad, September 4–6, 1985, pp. 155–161.

[**4**] M. Čanak, *Der Begriff der inversen areolären Ableitung in der Theorie der areolären Kettenbrüche*, Mat. Vesnik **38** (1986), 391–398.

[**5**] T. N. Thiele, *Interpolationsrechnung*, Leipzig, 1909.

Katedra za matematiku
Poljoprivredni fakultet
11080 Zemun, Jugoslavija

(Eingegangen den 08 02 1989)