PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 56 (70), 1994, 41–53

SUR L'ITERE DE SIN X

Farid Bencherif and **Guy Robin**

Communicated by Aleksandar Ivić

Résumé. On montre dans cet article que le développement asymptotique de la suite $x_n = \sin x_{n-1}$ avec $x_0 = x (x \in]0,\pi[)$, pour $n \to \infty$, fait intervenir une famille de polynômes, à coefficients rationnels, liés par des relations de récurrence. L'étude faite s'applique à une large classe de suites. On termine par une étude fine dans le cas de la foncition sinus.

Abstract. We show that the asymptotic expansion of the sequence $x_n = \sin x_{n-1}$ with $x_0 = x (x \in]0,\pi[)$, as n goes to $+\infty$, uses a family of polynomials (with rational coefficients) which are linked by relations of recurrency. The study applies to a large class of sequences. We finish by a sharp study of the sinus function.

I. Introduction

Considérons la suite réelle (x_n) définie par

$$x_0 = x \in \;]0,\pi[$$
$$x_n = \sin x_{n-1} = \sin_n x \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Il est bien connu que, $\sin_n x \sim \sqrt{3/n}$, pour $n \to \infty$, [**1**, ex. 21, p. 117]. De Bruijn, [**2**, p. 159], a établi plus précisément que, pour $n \to \infty$,

$$\sin_n x = \sqrt{\frac{3}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\left(-\frac{3}{10}\log n - \frac{C(x)}{2}\right) + \frac{1}{n^2}(a\log^2 n + b\log n + c) + O\left(\frac{\log^3 n}{n^3}\right)\right)$$

avec $a = \frac{27}{200}$; $b = \frac{9}{20}C(x) - \frac{9}{50}$; $c = \frac{3}{8}C(x)^2 - \frac{3}{10}C(x) + \frac{79}{700}$, $C(x)$ étant une fonction de x indépendante de n.

Nous généralisons ces résultats dans le théorème suivant qui est un cas particulier du théorème 2.

AMS Subject Classification (1990): Primary 10 H 25, 41 A 10.

Théorème 1. *Il existe une famille de polynômes* $(S_m)_{m\geq 0}$ *de* $\mathbf{Q}[X]$ *et une fonction* $C(x)$ *telles que le développement asymptotique de la suite* $\sin_n x$ *s'écrive, pour tout* $N \geq 1$,

$$\sqrt{\frac{3}{n}}\left(1+\sum_{m\geq 1}^{N} S_m n^{-m}\left(-\frac{3}{10}\log n-\frac{1}{2}C(x)\right)+O\left((\log n/n)^{N+1}\right)\right).$$

Les polynômes S_m, *pour* $m \geq 0$, *sont de degré* m *et vérifie l'équation différentielle*

$$S'_{m+1} = 3/5S'_m + (2m+1)S_m.$$

Les premières valeurs des polynômes S_m *sont:* $S_0 = 1$, $S_1 = X$, $S_2 = 3/2X^2 + 3/5X + 79/700$, $S_3 = 5/2X^3 + 12/5X^2 + 647/700X + 411/3500$.

La fonction $C(x)$ *est dérivable sur* $]0,\pi[$*; elle est décroissante sur* $]0,\pi/2[$ *et admet, lorsque* $x \to 0$, *un développement asymptotique vérifiant, pour tout* k *entier* ≥ 2,

$$C(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{5}\log(3/x^2) + d_1x^2 + d_2x^4 + \ldots + d_{k-2}x^{2(k-2)} + O\left(x^{2(k-1)}\right),$$

avec $d_1 = 79/1050$, $d_2 = 29/2625, \ldots$

Ce théorème est principalement conséquence du théorème plus général suivant, puisque

$$x_{n+1} = \sin x_n = x_n + \sum_{m=1}^{N} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x_n^{2m+1} + O\left(x_n^{2N+3}\right) \quad \text{quand } n \to \infty,$$

La dernière partie du théorème est démontrée au dernier paragraphe.

Théorème 2. *Soit* $(a_1, a_2, \ldots, a_k, t)$ *une suite de* $(k+1)$ *réels avec* $k \geq 1$, $a_1 < 0$ *et* $t > 0$. *Posons* $\lambda = -1/ta_1$ *et pour* $k \geq 2$, $b_1 = (1 + t - (2a_2/a_1^2))/2t$.

• *Pour* $k \geq 2$, *il existe une suite de* $(k+1)$ *polynômes* $(P_m)_{0\leq m\leq k}$ *à coefficients dans* $\mathbf{Q}(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}, t)[X]$ *et vérifiant l'équation différentielle* $P'_{m+1} = b_1P'_m + (tm+1)P_m$, *pour* $0 \leq m \leq k-1$, *tels que la propriété suivante soit vraie:*

si une suite (u_n), *réelle, positive, convergente vers zéro, vérifie*

$$u_{n+1} = u_n + \sum_{m=1}^{k} a_m u_n^{mt+1} + O\left(u_n^{(k+1)t+1}\right), \tag{1}$$

quand $n \to \infty$, *alors, elle a un développement asymptotique de la forme*

$$u_n = (\lambda/n)^{1/t}\left(1 + \sum_{m=1}^{k} P_m n^{-m}(-t^{-1}(b_1 \log n - C)) + O(1/n^k)\right),$$

pour $n \to \infty$, C *étant la constante définie par* $C = \lim_{n\to\infty}(\lambda u_n^{-t} - n - b_1 \log n)$. *De plus,* $P_0 = 1$, $P_1 = X$ *et* $P_k \in \mathbf{Q}(a_1, a_2, \ldots, a_k, t)[X]$.

• *Pour $k=1$, on peut seulement écrire $u_n = (\lambda/n)^{1/t}(1+O(\log n/n))$.*

Pour démentrer ce théorème, nous étudions au paragraphe suivant la suite $n \to \lambda(u_n)^{-t} = v_n$. Nous déterminons son développement asymptotique au paragraphe 3 et nous en déduisons celui de u_n au paragraphe 4.

Les paragraphes 5 et 6 traitent plus particulièrement de la fonction sinus afin de préciser les propriétés de la fonction $C(x)$ du théorème 1.

II. Etude de la suite $n \to \lambda(u_n)^{-t}$

Définissons v_n par l'égalité $(u_n)^t = \lambda/v_n$. Avec (1), on obtient quand $n \to \infty$,

$$\text{si } k \geq 2 \qquad v_{n+1} - v_n = 1 + \sum_{m=1}^{k-1} b_m/v_n^{-m} + O\left(1/v_n^k\right) \tag{2}$$

$$\text{si } k = 1 \qquad v_{n+1} - v_n = 1 + O\left(1/v_n\right) \tag{2'}$$

$(b_m)_{1\leq m\leq k-1}$ étant une suite d'éléments de $\mathbf{Q}\,(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}, t)$. En particulier

$$b_1 = (1/2t)\left(1 + t - \left(2a_2/a_1^2\right)\right).$$

LEMME 1. (i) *Pour $k \geq 2$, la suite $n \to v_n - n - b_1 \log n$ est convergente vers une limite C.*

(ii) *Il existe une unique famille de réels $(c_m)_{1\leq m\leq k-2}$, $c_m \in \mathbf{Q}\ (b_1, b_2, \ldots, b_{m+1})$, pour laquelle la foncition Ψ définie par*

$$\begin{array}{ll} \text{si } k=1 & \Psi(x) = x \\ \text{si } k=2 & \Psi(x) = x - (b_1 \log x + C) \\ \text{si } k\geq 3 & \Psi(x) = x - (b_1 \log x + C) + c_1/x + \ldots + c_{k-2}/x^{k-2} \end{array}$$

vérifie $\Psi(v_{n+1}) - \Psi(v_n) = 1 + O(1/n^k)$, pour $n \to \infty$.

De plus la fonction Ψ ainsi définie admet, au voisinage de $+\infty$, une fonction réciproque Ψ^{-1} et on a

$$\begin{array}{ll} \text{si } k=1 & v_n = n + O(\log n), \\ \text{si } k\geq 2 & v_n = \Psi^{-1}(n) + O\left(1/n^{k-1}\right). \end{array}$$

Preuve. (i) Comme $v_n \to \infty$, on déduit $v_{n+1} - v_n \sim 1$ de (2) ou (2′), ce qui entraîne $v_n \sim n$ et permet d'écrire de nouveau avec (2) ou (2′), $v_{n+1} - v_n = 1 + O(1/n)$ et par conséquent, $v_n = n + O(\log n)$, ce qui termine la démonstration pour $k=1$. Pour $k \geq 2$, on injecte cette expression de v_n dans le second membre de (2) pour obtenir

$$v_{n+1} - v_n = 1 + n^{-1}b_1 + O\left(n^{-2}\log n\right).$$

En posant $t_n = v_n - n - b_1 \log n$, cette relation s'écrit

$$t_{n+1} - t_n = O\left(n^{-2}\log n\right).$$

On en déduit que la suite $n \to t_n$ converge vers une limite C.

(ii) Soit $(c_m)_{0 \leq m \leq k-2}$ une suite de réels et $\Psi\colon x \to x + c_0 \log x - C + \sum_{m=1}^{k-2} c_m / x^m$. (Si $k = 2$, la somme disparaît). Comme $v_n \sim n$, on a d'après (2)

$$\log\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{v_n} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{b_j}{v_n^{j+1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)\right) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_{0j}}{v_n^j} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

et pour $1 \leq i \leq k-2$

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{-i} - v_n^{-i} &= v_n^{-i}\left(\left(1 + \frac{1}{v_n} + \sum_{j=1}^{k-2} \frac{b_j}{v_n^{j+1}} + O\left(\frac{1}{n^k}\right)\right)^{-1} - 1\right) \\ &= \sum_{j=i+1}^{k-1} \frac{a_{ij}}{v_n^j} + O\left(\frac{1}{n^k}\right), \end{aligned}$$

$(a_{ij})_{0 \leq i \leq k-2.\ i+1 \leq j \leq k-1}$ étant une suite de réels, $a_{ij} \in \mathbf{Q}[b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}]$ avec $a_{01} = 1$ et $a_{i\,i+1} = -i$, pour $1 \leq i \leq k-2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \Psi\left(v_{n+1}\right) - \Psi\left(v_n\right) &= c_0 \log\left(v_{n+1}/v_n\right) + \sum_{i=1}^{k-2} c_i \left(v_{n+1}^{-i} - v_n^{-i}\right) + v_{n+1} - v_n \\ &= \left(1 + \sum_{j=1}^{k-1} A_j / v_n^{-j}\right) + O\left(n^{-k}\right) \end{aligned}$$

avec $A_j = \sum_{i=0}^{j-1} a_{ij} c_i + b_j$, pour $1 \leq j \leq k-1$. On a alors $\Psi(v_{n+1}) - \Psi(v_n) = 1 + O(n^{-k})$, pour $1 \leq j \leq k-1$, si et seulement si $A_j = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $(c_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ est solution du système

$$(\mathbf{S}) \qquad \sum_{i=0}^{j-1} a_{ij} c_i = -b_j \ \text{ pour } \ 1 \leq j \leq k-1.$$

Le déterminant Δ du système $(\mathbf{S})$

$$\Delta = \prod_{i=0}^{k-2} a_{i\,i+1} = (-1)^k (k-2)!,$$

est non nul et le système $(\mathbf{S})$ admet une solution unique pour laquelle $c_0 = -b_1$ et $c_m \in \mathbf{Q}(b_1, b_2, \ldots, b_{m+1})$ pour $1 \leq m \leq k-2$. Définissons une nouvelle suite w_n par $\Psi(v_n) = n + w_n$. On a alors $w_{n+1} - w_n = O(1/n^k)$ avec, d'après la définition de C,

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} (v_n - b_1 \log n - n - C) = 0.$$

On en déduit que

$$w_n = -\sum_{m\geq n}(w_{m+1}-w_m) = O\left(\sum_{m\geq n} 1/m^k\right) = O\left(1/n^{k-1}\right)$$

et ainsi $\Psi(v_n) = n + O\left(1/n^{k-1}\right)$. Il est immédiat de constater que Ψ admet au voisinage de $+\infty$ une fonction réciproque Ψ^{-1} dérivable telle que $\left(\Psi^{-1}\right)'(x) \sim 1$ pour $x \to \infty$. On en conclut que $v_n = \Psi^{-1}(n) + O\left(n^{1-k}\right)$, pour $n \to \infty$.

Remarque. La démonstration précédente s'applique aussi pour montrer le résultat suivant qui nous sera utile au paragraphe 5.

Soit $k \geq 2$ et g une function telle que, pour $x \to \infty$,

$$g(x) = x + 1 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots + \frac{b_{k-1}}{x^{k-1}} + O\left(\frac{1}{x^k}\right),$$

et soit $\Psi^* = \Psi + C$, alors $\Psi^*(g(x)) - \Psi^*(x) = 1 + O(1/x^k)$, pour $x \to \infty$.

III. Développement asymptotique de V_n

Commençons par préciser un résultat dû à Robin ([**3**, th. 1], voir aussi [**5**]).

PROPOSITION 1. *Soit f une fonction admettant un développement asymptotique de la forme $f(x) = h(x) + o(1/x^q)$ avec $h(x) = x - (\alpha \log x + \beta) + \gamma_1/x + \ldots + \gamma_q/x^q$, lorsque $x \to +\infty$, $(\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q) \in \mathbf{R}^{q+2}$ et q un entier positif.*

Si f possède une fonction réciproque g dans un voisinage de $+\infty$, alors cette fonction g et la fonction réciproque de h admettent un même développement asymptotique, lorsque $x \to +\infty$, qui s'écrit

$$x\left(\sum_{m=0}^{q+1} x^{-m}\Gamma_m(\alpha \log x + \beta) + o\left(1/x^{q+1}\right)\right),$$

$(\Gamma_m)_{0\leq m\leq q+1}$ étant une suite de polynômes de $\mathbf{Q}[\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{m-1}, \alpha][X]$, pour $2 \leq m \leq q+1$, $\Gamma_0 = 1$, $\Gamma_1 = X$, vérifiant les relations de récurrence $\Gamma'_{m+1} = \alpha\Gamma'_m - (m-1)\Gamma_m$, pour $0 \leq m \leq q$.

Preuve. Déterminons d'abord la forme du développement asymptotique. Posons $u = g(x)/x$ et $y = \alpha \log x + \beta$. En utilisant la forme du développement asymptotique de f et les relations $f(ux) = x$ et $u \sim 1$, pour $x \to \infty$, on peut écrire, pour $x \to \infty$,

$$u = 1 + \frac{y}{x} + \frac{\alpha}{x}\log u - \frac{\gamma_1}{x^2}u^{-1} - \ldots - \frac{\gamma_q}{x^{q+1}}u^{-q} + o\left(\frac{1}{x^{q+1}}\right). \tag{3}$$

On en déduit que $u = 1 + y/x + o(1/x)$, pour $x \to \infty$. Un raisonnement par récurrence permet alors de mettre en évidence l'existence d'une famille de polynômes $(\Gamma_m)_{0\leq m\leq q+1}$ de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant

$$u = x^{-1}g(x) = \sum_{m=0}^{q+1} x^{-m}\left(\Gamma_m(y)\right) + o\left(1/x^{q+1}\right),$$

Γ_m étant, pour $0 \leq m \leq q+1$, un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ indépendant de β, les coefficients de Γ_m étant des polynômes en $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}$ et α à coefficients dans $\mathbf{Q}$. Il suffit pour cela de remarquer qu'une expression de u s'écrivant

$$u = 1 + \sum_{m=1}^{p} x^{-m}\left(\Gamma_m(y)\right) + o\left(1/x^p\right), \text{ avec } 0 \leq p \leq q-1,$$

injectée au second membre de (3) permet d'obtenir

$$u = 1 + \sum_{m=1}^{p+1} x^{-m}\left(\Gamma_m(y)\right) + o\left(1/x^{p+1}\right),$$

Γ_{p+1} pouvant s'écrire

$$\Gamma_{p+1} = -\gamma_p + \sum_{1 \leq k \leq p} \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \dots \leq i_k \leq p} \lambda_{i_1,\dots,i_k} \Gamma_{i_1} \Gamma_{i_2} \dots \Gamma_{i_k}$$

avec $\lambda_{i_1,\dots,i_k} \in \mathbf{Q}[\gamma_1, \dots, \gamma_p, \alpha]$ pour $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq p$. On obtient aisément

$$\Gamma_0 = 1;\ \Gamma_1 = X;\ \Gamma_2 = \alpha X - \gamma_1;\ \Gamma_3 = -(\alpha/2)X^2 + \left(\alpha^2 + \gamma_1\right) X - \gamma_1 \alpha - \gamma_2.$$

Déterminons maintenant les relations de récurrence. Posons

$$G(x) = x \left(\sum_{m=0}^{q+1} x^{-m} \Gamma_m(\alpha \log x) \right),$$

soit

$$G(x) = x + \alpha \log x + \sum_{m=1}^{q} x^{-m} \Gamma_{m+1}(\alpha \log x),$$

$$G'(x) = 1 + \sum_{m=1}^{q} x^{-m}\left(\alpha \Gamma'_m - (m-1)\Gamma_m\right)(\alpha \log x) + o\left(x^{-q}\right)$$

et pour $p \geq 2$,

$$G^{(p)}(x) = \sum_{m=1}^{q} x^{-m} T_{pm}(\alpha \log x) + o\left(x^{-q}\right),$$

T_{pm} étant, pour $2 \leq p \leq m \leq q$, un polynôme de $\mathbf{R}[X]$ à coefficients indépendants de β. De plus $T_{pp} = (-1)^{p-1}(p-1)!\alpha$ pour $2 \leq p \leq q$. On a alors, pour $x \to \infty$, d'une part

$$\begin{aligned} g(x) &= G(x+\beta) + o\left(x^{-q}\right) \\ &= G(x) + \beta G'(x) + \dots + \beta^q G^{(q)}(x)/q! + o\left(x^{-q}\right) \\ &= x + \alpha \log x + \beta + \sum_{m=1}^{q} x^{-m} Q_{\beta m}(\alpha \log x) + o\left(x^{-q}\right) \end{aligned}$$

avec, pour $1 \leq m \leq q$,

$$Q_{\beta m} = \Gamma_{m+1} + \beta\left(\alpha \Gamma'_m - (m-1)\Gamma_m\right) + \sum_{p=2}^{m} \beta^p T_{pm}/p!, \tag{4}$$

et d'autre part

$$g(x) = x + \alpha \log x + \beta + \sum_{m=1}^{q} x^{-m} \Gamma_{m+1}(\alpha \log x + \beta) + o\left(x^{-q}\right).$$

En identifiant les deux développements de g ainsi obtenus, on obtient pour $\alpha \neq 0$

$$Q_{\beta m}(X) = \Gamma_{m+1}(X + \beta). \tag{5}$$

Ceci montre, avec l'expression de $Q_{\beta m}(X)$ donnée par (4) que Γ_{m+1} est un polynôme de degré au plus éqal à m, le coefficient de X^m étant égal à $T_{mm}/m! = (-1)^{m-1}\alpha/m$. De plus, en développant le second membre de (5) à l'aide de la formule de Taylor, on obtient avec (4) deux expressions de $Q_{\beta m}$ comme polynôme en β; on peut donc identifier les coefficients de β dans ces deux expressions. On obtient $\Gamma'_{m+1} = \alpha \Gamma_m - (m-1)\Gamma_m$, pour $1 \leq m \leq q$. Dans le cas où $\alpha = 0$, on a d'une part

$$\begin{aligned} g(x) &= x + \beta + \sum_{r=1}^{q} \Gamma_{r+1}(0)(x+\beta)^{-r} + o\left(1/x^k\right) \\ &= x + \beta + \sum_{r=1}^{q} \sum_{j=0}^{q-r} (-1)^j \binom{r+j-1}{j} \frac{\beta^j \Gamma_{r+1}(0)}{x^{r+j}} + o\left(x^{-q}\right), \end{aligned}$$

et d'autre part

$$g(x) = x + \beta + \sum_{m=1}^{q} x^{-m} \Gamma_{m+1}(\beta) + o\left(x^{-q}\right).$$

En identifiant les deux développements de g obtenus dans ce cas, on déduit que

$$\Gamma_{m+1}(X) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \binom{m-1}{k} \Gamma_{m-k+1}(0) X^k.$$

La propriété bien connue

$$k\binom{m-1}{k} = (m-1)\binom{m-2}{k-1}, \quad \text{pour } 1 \leq k \leq m-1,$$

permet alors de constater que $\Gamma'_{m+1} = -(m-1)\Gamma_m$ pour $1 \leq m \leq q$. Les relations de récurrence sont donc aussi vérifiées dans le cas où $\alpha = 0$.

Remarque concernant le degré du polynôme Γ_m. Si $\alpha \neq 0$, alors pour tout entier m, $2 \leq m \leq q+1$, Γ_m est un polynôme de degré $m-1$ et de coefficient dominant $(-1)^m \alpha/(m-1)$. Si $\alpha = 0$ et si pour un entier s, $1 \leq s \leq q$, on a $\gamma_m = 0$ pour $1 \leq m \leq s-1$ et $\gamma_s \neq 0$ alors $\Gamma_m = 0$ pour $2 \leq m \leq s$, $\Gamma_{s+1} = -\gamma_s$ et degré $(\Gamma_m) = m - (s+1)$ pour $s+1 \leq m \leq q+1$.

En exploitant le lemme 1 et en appliquant la proposition 1 à

$$\Psi(x) = x - (b_1 \log x + C) + c_1/x + \ldots + c_{k-2}/x^{k-2} + O\left(x^{k-1}\right),$$

nous obtenons la

Proposition 2. *Pour $k \geq 2$, il existe une famille de polynômes $(T_m)_{0 \leq m \leq k}$ de $\mathbf{R}[X]$ telle que*

$$v_n = n \left(\sum_{m=0}^{k} n^{-m} T_m \left(b_1 \log n + C \right) + O \left(n^{-k} \right) \right)$$

avec $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T'_{m+1} = b_1 T'_m - (m-1) T_m$ pour $0 \leq m \leq k-1$. De plus, pour $0 \leq m \leq k-1$, les coefficients du polynôme T_m sont dans $\mathbf{Q}[a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}, t]$ et sont indépendants de la constante C. T_k a ses coefficients dans $\mathbf{Q}[a_1, a_2, \ldots, a_k, t]$.

IV. Démonstration du théorème 2

Nous commençons d'abord par démontrer un résultat déjà signalé par Robin ([**3**, prop. 1, p. 21], voir aussi [**5**]).

Proposition 3. *Soit $\gamma \in \mathbf{R}^*$ et soit $(Q_m)_{m \geq 0}$ une famille de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $Q_0 = 1$ et $Q'_{m+1} = aQ'_m + b(m + \mu) Q_m$ pour $m \geq 0$, $(a, b, \mu) \in \mathbf{R}^3$. Alors, dans $\mathbf{R}[[X, Y]]$, on a pour $\gamma \in \mathbf{R}^*$,*

$$\left(\sum_{m \geq 0} Q_m(X) Y^m \right)^{\gamma} = \sum_{m \geq 0} R_m(X) Y^m,$$

$(R_m)_{m \geq 0}$ étant une famille de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant

$$R_0 = 1, \;\; R_1 = \gamma Q_1, \;\; \text{et} \;\; R'_{m+1} = aR'_m + b(m + \mu\gamma) R_m \;\; \text{pour} \;\; m \geq 0.$$

R_m n'est fonction que des polynômes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$; de plus si $Q_m \in \mathbf{Q}[X]$ pour $m \geq 0$ et si $\gamma \in \mathbf{Q}$, alors $R_m \in \mathbf{Q}[X]$ pour $m \geq 0$.

Preuve. Posons $S = \sum_{m \geq 0} Q_m(X) Y^m$ et $F = S^{\gamma}$. L'expression de F sous la forme $F = \sum_{m \geq 0} R_m Y^m$, $(R_m)_{m \geq 0}$ étant une famille de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ avec $R_0 = 1$ et $R_1 = \gamma Q_1$ est immédiate. En dérivant cette relation par rapport à X puis par rapport à Y, on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial X} = \gamma S^{\gamma - 1} \sum\limits_{m \geq 0} Q'_m Y^m = \sum\limits_{m \geq 0} R'_m Y^m \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = \gamma S^{\gamma - 1} \sum\limits_{m \geq 1} m Q_m Y^{m-1} = \sum\limits_{m \geq 1} m R_m Y^{m-1} \end{cases}. \tag{6}$$

On en déduit, en calculant $aY \frac{\partial F}{\partial X} + bY^2 \frac{\partial F}{\partial Y}$, que

$$\gamma S^{\gamma - 1} \left(\sum_{m \geq 0} \left(aQ'_m + b_m Q_m \right) Y^{m+1} \right) = \sum_{m \geq 0} \left(aR'_m + bmR_m \right) Y^{m+1}. \tag{7}$$

Mais, d'après les relations de récurrence vérifiées par la famille de polynômes $(Q_m)_{m \geq 0}$, on a

$$aQ'_m + bmQ_m = Q'_{m+1} - b\mu Q_m.$$

En injectant cette relation dans le premier membre de (7), on obtient, compte tenu que $Q_0' = R_0' = 0$ et des relations (6)

$$\sum_{m\geq 0} \left(R_{m+1}' - b\mu\gamma R_m\right) Y^{m+1} = \sum_{m\geq 0} \left(aR_m' + bmR_m\right) Y^{m+1}.$$

On en déduit immédiatement la relation $R_{m+1}' = aR_m' + b(m+\mu\gamma)R_m$ pour $m \geq 0$. Remarquons que degré $(R_m) \leq m$, pour $m \geq 1$, et que

$$R_m = \sum_{p=1}^{m} \frac{\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-p+1)}{p!} \sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_p=m \\ \text{avec } i_k \geq 1 \text{ pour } 1\leq k\leq p}} Q_{i_1} Q_{i_2} \ldots Q_{i_p}.$$

Il en résulte que si $Q_m \in \mathbf{Q}[X]$ pour $m \geq 0$ et si $\gamma \in \mathbf{Q}$, alors $R_m \in \mathbf{Q}[X]$.

Corollaire. *Soit $(Q_m)_{0\leq m\leq q}$ une famille de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $Q_0 = 1$ et $Q_{m+1}' = aQ_m' + b(m+\mu)Q_m$ pour $m \geq 0$ et $(a,b,\mu) \in \mathbf{R}^3$. Alors pour $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbf{R}^3$, $\gamma \neq 0$, on a*

$$\left(\sum_{m=0}^{q} n^{-m} Q_m(\alpha \log n + \beta)\right)^{\gamma} = \sum_{m=0}^{q} n^{-m} R_m(\alpha \log n + \beta) + O\left((\log n/n)^{q+1}\right),$$

$(R_m)_{0\leq m\leq q}$ étant une famille de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant $R_0 = 1$, $R_1 = \gamma Q_1$ et $R_{m+1}' = aR_m' + b(m+\mu\gamma)R_m$ pour $0 \leq m \leq q-1$. De plus si $Q_m \in \mathbf{Q}[X]$ pour $0 \leq m \leq q$ et si $\gamma \in \mathbf{Q}$, alors $R_m \in \mathbf{Q}[X]$ pour $0 \leq m \leq q$.

Preuve du théorème 2. En exploitant les propositions 2 et 3, on a

$$\begin{aligned} u_n = \lambda^{1/t} v_n^{-1/t} &= (\lambda/n)^{1/t} \left(\sum_{m=0}^{k} n^{-m} T_m\left(b_1 \log n + C\right) + O\left(n^{-k}\right)\right)^{-1/t} \\ &= (\lambda/n)^{1/t} \left(\sum_{m=0}^{k} n^{-m} R_m\left(b_1 \log n + C\right) + O\left(n^{-k}\right)\right), \end{aligned}$$

$(R_m)_{0\leq m\leq k}$ étant une famille de polynômes de $\mathbf{R}[X]$ vérifiant

$$R_0 = 1, \ R_1 = -X/t \ \text{ et } \ R_{m+1}' = b_1 R_m' - (m+1/t)R_m.$$

Pour $0 \leq m \leq k$, posons $P_m(X) = R_m(-tX)$. On a alors $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_{m+1}' = b_1\ P_m' + (mt+1)P_m$ pour $0 \leq m \leq k-1$ et

$$u_n = (\lambda/n)^{1/t} \left(1 + \sum_{m=1}^{k} P_m n^{-m}\left(-t^{-1}\left(b_1 \log n - C\right)\right) + O\left(n^{-k}\right)\right).$$

V. Itération d'une fonction

Soit f une fonction numérique continue dans un voisinage à droite de zéro et admettant un développement asymptotique s'écrivant pour $k \geq 2$ et $x \to 0$,

$$f(x) = x + \sum_{m=1}^{k} a_m x^{mt+1} + O\left(x^{(k+1)t+1}\right) \text{ avec } a_1 < 0 \text{ et } t > 0.$$

En choisissant x assez petit, $x \in]0, \delta]$, la suite définie par $u_0 = x$ et

$$u_n = f\left(u_{n-1}\right) = f_n(x) \text{ pour } n \geq 1,$$

est strictement décroissante et vérifie les hypothèses du théorème 1. La constante C du théorème 1 est $C = \lim_{n\to\infty}\left(\lambda f_n(x)^{-t} - n - b_1 \log n\right)$. Elle dépend de f et de x, nous la noterons simplement $C(x)$. D'après l'expression de C précédente on a

$$C(f(x)) - C(x) = 1 \text{ pour tout } x \in]0, \delta].$$

Expression de $C(x)$ comme somme d'une série. Soit $x \in]0, \delta[$, on a, d'après le théorème 1, pour $n \to \infty$,

$$f_n(x) = (\lambda/n)^{1/t}(1 + O(\log n/n)). \tag{8}$$

On en déduit que $\log\left(\lambda/f_n(x)^t\right) = \log n + O(\log n/n)$ et, qu'ainsi, en posant pour $m \geq 0$, $S_m(x) = \lambda/f_m(x)^t - b_1 \log\left(\lambda/f_m(x)^t\right) - m$, il vient, $C(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = S_m(x) + \sum_{n\geq m}\left(S_{n+1}(x) - S_n(x)\right) = S_m(x) + \sum_{n\geq m} p\left(f_n(x)\right)$ avec

$$p(x) = \lambda/f(x)^t - \lambda/x^t + b_1 t \log(f(x)/x) - 1.$$

En particulier, pour $m = 0$, on obtient:

$$C(x) = \lambda/x^t - b_1 \log\left(\lambda/x^t\right) + \sum_{n\geq 0} p\left(f_n(x)\right).$$

Développement asymptotique de $C(x)$. Proposition 4. *Si f est croissante sur $]0, \delta]$, alors $C(x)$ est continue sur $]0, \delta]$ et on a pour $x \to 0$: $C(x) = (\lambda/x^t) - b_1 \log \lambda/x^t + d_1 x^t + \ldots + d_{k-2} x^{(k-2)t} + O\left(x^{(k-1)t}\right)$, les d_i étant réels, pour $i = 1, \ldots, k-2$.*

Preuve. (i) Continuité de $C(x)$ sur $]0, \delta]$: on constate aisément que $p(x) = O\left(x^{2t}\right)$, pour $x \to 0$. Il existe donc des constantes C_1 et C_2 telles que pour tout $x \in]0, \delta]$, on ait $\mid p(x) \mid \leq C_1 x^{2t}$ et d'après (8), $f_n(x) \leq f_n(\delta) \leq C_2(1/n))^{1/t}$, pour tout $n \geq 1$. On a, par suite, $\mid p\left(f_n(x)\right) \mid \leq C_3/n^2$ pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in]0, \delta]$ où $C_3 = C_1\left(C_2\right)^{2t}$ est une constante indépendante de x. On peut alors écrire

$$\mid C(x) - S_m(x) \mid \leq \sum_{n\geq m} \mid p\left(f_n(x)\right) \mid \leq 2C_3/m.$$

$C(x)$ est par suite continue sur $]0, \delta]$ comme limite uniforme de la suite de fonctions continues $(S_m(x))$.

(ii) Développement asymptotique de $C(x)$: Ψ^* étant définie à la fin du paragraphe 2, désignons par φ^* la function $x \to \varphi^*(x) = \Psi^*(\lambda/x^t)$. On a:

$$\varphi^*(x) = \lambda/x^t - b_1 \log \lambda/x^t + d_1 x^t + \ldots + d_{k-2} x^{(k-2)t}$$

avec $d_m = c_m/\lambda^m$ pour $m = 1, \ldots, k-2$. Soit g la fonction définie par $x \to \lambda\left(f\left((\lambda/x)^{1/t}\right)\right)^{-t}$. Comme $\varphi^*(f(x)) = \Psi^*(g(\lambda/x^t))$, il vient d'après la remarque du paragraphe 2, pour $x \to 0$,

$$\varphi^*(f(x)) - \varphi^*(x) = 1 + O\left(x^{kt}\right).$$

Comme $C(x)$ vérifie la relation $C(f(x)) - C(x) = 1$ pour $x \in]0, \delta]$, on a, en posant $\chi(x) = C(x) - \varphi^*(x)$, $\chi(f(x)) - \chi(x) = O\left(x^{kt}\right)$, pour $x \to 0$. Il existe donc une constante C_4 telle que

$$| \chi(f(x)) - \chi(x) | \leq C_4 x^{kt} \ \text{ pour } \ 0 < x \leq \delta.$$

On constate, d'autre part, que $\chi\left(f_n(x)\right)$ tend vers 0 avec $1/n$, on a en effet:

$$\begin{aligned} \chi\left(f_n(x)\right) &= \sum_{m \geq n} p\left(f_m(x)\right) - \sum_{m=1}^{k-2} d_m \left(f_n(x)\right)^{mt} \\ &= C(x) - S_n(x) - \sum_{m=1}^{k-2} d_m \left(f_n(x)\right)^{mt}. \end{aligned}$$

Comme $C(x) - S_n(x)$ et $f_n(x)$ tendent vers 0 avec $1/n$, il en est de même de $\chi\left(f_n(x)\right)$. Il en résulte que pour $0 < x \leq \delta$, on a:

$$\chi(x) = \sum_{n \geq 0} \left(\chi\left(f_n(x)\right) - \chi\left(f_{n+1}(x)\right)\right).$$

On a alors $| \chi\left(f_{n+1}(x)\right) - \chi\left(f_n(x)\right) | \leq C_4 \left(f_4(x)\right)^{kt}$. Les relations $f_n(x) \leq x$ et $f_n(x) \leq C_2 (1/n)^{1/t}$ conduisent alors aux majorations $| \chi\left(f_{n+1}(x)\right) - \chi\left(f_n(x)\right) | \leq C_4 x^{kt}$ et $| \chi\left(f_{n+1}(x)\right) - \chi\left(f_n(x)\right) | \leq C_5/n^k$ avec $C_5 = C_4 \left(C_2\right)^{kt}$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} | \chi(x) | &\leq \sum_{0 \leq m \leq n} \left|\chi\left(f_{m+1}(x)\right) - \chi\left(f_m(x)\right)\right| + \sum_{m > n} \left|\chi\left(f_m(x)\right) - \chi\left(f_{m+1}(x)\right)\right| \\ &\leq C_4 (n+1) x^{kt} + C_5/n^{k-1} \leq 2C_4 n x^{kt} + C_5/n^{k-1}. \end{aligned}$$

On choisit δ pour que $\delta^t < 1$ et n tel que $1/x^t < n < 2/x^t$, et l'on obtient $| \chi(x) | < \left(4C_4 + C_5\right) x^{(k-1)t}$ soit $\chi(x) = O\left(x^{(k-1)t}\right)$.

VI. Etude de la fonction $C(x)$ associée à la fonction sinus

Pour $x \in]0, \pi[$, on a d'après le paragraphe précédent

$$\lambda = 3, \;\; b_1 = 3/5,$$

$$C(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{(\sin_n x)^2} - n - \frac{3}{5} \log n \right),$$

$$C(\sin x) - C(x) = 1,$$

$$p(x) = \frac{3}{\sin^2 x} - \frac{3}{x^2} - 1 + \frac{6}{5} \log \frac{\sin x}{x}.$$

Nous allons prouver que la fonction $C(x)$ est dérivable; pour cela montrons d'abord une majoration uniforme de $\sin_n x$.

Proposition 5. *Pour toul réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sin_n x < \sqrt{3/n}$.*

Commençons par un lemme.

Lemme 2. *Pour tout réel $x > 0$, on a $\sin^2 x < x^2 / \left(1 + x^2/3\right)$.*

Preuve. Pour $0 < x \leq 3\sqrt{2}/2$, on a

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} < 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{2}{45} x^4 \leq 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{9 + 3x^2} = 1 / \left(1 + \frac{x^2}{3} \right)$$

et pour $x \geq 3\sqrt{2}/2$

$$\frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}} \geq \frac{1}{\frac{2}{9} + \frac{1}{3}} > 1 > \sin^2 x.$$

Preuve de la proposition 5. La fonction $h: x \to x / \sqrt{1 + x^2/3}$ est croissante; on a donc $\sin x < h(x) < x$, pour $x > 0$. Par suite

$$\sin_n x < h\left(\sin_{n-1}(x)\right) < h_2\left(\sin_{n-2}(x)\right) < \ldots < h_n(x).$$

Or $h_n(x) = x / \sqrt{1 + nx^2/3}$, donc

$$\sin_n x < 1 / \sqrt{1/x^2 + n/3} < \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Théorème 3. *La fonction $C(x)$ est dérivable sur $]0, \pi[$ et vérifie $C(x) = C(\pi - x)$ et $C'(\pi/2) = 0$. Elle est décroissante sur $]0, \pi/2[$ et admet, lorsque $x \to 0$, un développement asymptotique vérifiant, pour tout k entier ≥ 2,*

$$C(x) = \left(3/x^2\right) - \frac{3}{5} \log\left(3/x^2\right) + d_1 x^2 + d_2 x^4 + \ldots + d_{k-2} x^{2(k-2)} + O\left(x^{2(k-1)}\right).$$

$(d_1 = 79/1050, \;\; d_2 = 29/2625, \ldots)$.

Preuve. D'après la proposition précédente, il existe des constantes K_1 et K_2 telles que

$$\mid p\,(\sin_n x)\mid < K_1/n^2 \ \text{ et } \ \mid p'\,(\sin_n x)\mid < K_2/n^{3/2}.$$

Comme

$$(p\,(\sin_n x))' = p'\,(\sin_n x)\cos(\sin_{n-1}x)\ldots\ldots\cos(\sin x)\cos x,$$

on a aussi $\mid (p\,(\sin_n x))' \mid < K_2/n^{3/2}$. Les suites

$$S_m(x) = \frac{3}{5}\log\frac{(\sin_m x)^2}{3} + \frac{3}{(\sin_m x)^2} - m$$

et

$$S'_m(x) = \left(\frac{6}{5\sin_m x} - \frac{6}{(\sin_m x)^3}\right)\cos(\sin_{m-1}x)\ldots\cos(\sin x)\cos x$$

convergent uniformément pour $x \in]0,\pi[$, ce qui prouve que $C(x)$ est dérivable sur $]0,\pi[$.

REFERENCES

[1] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.

[2] N.G. De Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, North Holland, Amsterdam, 1961.

[3] G. Robin, *Permanence de relations de récurrence dans certains développements asymptotiques*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **43** (**57**) (1988), 17–25.

[4] G. Robin, *Développement asymptotique du n-ième itéré d'une fonction*, CALSYF, (1984), 83–86.

[5] B. Salvy, *Fast computation of some asymptotic functional inverses*, J. Symbolic Computation **17** (1994), 227–236.

Département d'algèbre
U.S.T.H.B.,
Alger, Algérie.

(Reçu le 26 08 1994)

LACO, Laboratoire d'arithmétique, de calcul formel & d'optimisation,
URA 1586, Faculté des Sciences,
123, avenue Albert Thomas,
87060, Limoges, France