PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 73(87) (2003), 121–128

# ОБ ОЦЕНКАХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ РЯДОМ ФУРЬЕ

**Сергей Ю. Тихонов**

*Communicated by Miroljub Jevtić*

Резюме. В работе рассматриваются функции из пространства $L_p$, такие что их преобразованные ряды Фурье (в частности, дробные производные в смысле Вейля) принадлежат $L_p$. Получены оценки модуля гладкости дробного порядка преобразованного ряда Фурье через модули гладкости самой функции. Приведены утверждения, показывающие точность этих оценок на некоторых классах функций.

## 1. Введение

Пусть $L_p$ $(1 < p < \infty)$ — пространство всех $2\pi$-периодических измеримых функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$. Определим модуль гладкости функции $f(x)$ порядка $\beta$ $(\beta \in \mathbf{R}_+)$ следующим образом:

$$\omega_\beta(f,t)_p = \sup_{|h|\leqslant t} \left\| \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\nu+1)}{\nu!} f(x+(\beta-\nu)h) \right\|_p .$$

Будем записывать ряд Фурье функции $f(x)$ в форме

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x).$$

Тогда $\sigma(f,\lambda)$ – преобразованный с помощью последовательности $\{\lambda_n\}$ ряд Фурье функции $f(x)$, т.е. $\sigma(f,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n A_n(x)$. Через $f^{(r)}(x)$, $r > 0$, обозначим $r$-ую производную Вейля функции $f(x)$. Если $f^{(r)}(x) \in L_p$, $1 < p < \infty$, то можно считать, что ее ряд Фурье есть $\sigma(f,\lambda)$, где $\lambda_n = n^r$.

Запись $I_1(f,\delta) \ll I_2(f,\delta)$, означает, что существует константа $C > 0$, не зависящая от $f$ и от $\delta$, но, быть может, зависящая от других параметров,

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 42A16; Secondary 41A25.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 03-01-00080 и 03-01-06155) и программы "Ведущие научные школы" (проект НШ–1657.2003.1).

и такая, что $I_1(f,\delta) \leqslant C\, I_2(f,\delta)$. Если одновременно $I_1(f,\delta) \ll I_2(f,\delta)$ и $I_1(f,\delta) \ll I_2(f,\delta)$, то пишут $I_1(f,\delta) \asymp I_2(f,\delta)$.

Определение. Функция $\varphi(t)$ называется почти возрастающей (соответственно, почти убывающей) на $(a,b)$, если она положительна, измерима на $(a,b)$ и для любых $a < t_1 \leqslant t_2 < b$ существует не зависящая от них положительная константа $C$, такая что выполняется неравенство $\varphi(t_1) \leqslant C\varphi(t_2)$ (соответственно, $\varphi(t_1) \geqslant C\varphi(t_2)$).

В работе [1] приводятся оценки $\omega_\beta(f^{(r)},t)_p$ через $\omega_{k+\beta}(f,t)_p$ при фиксированных $k$ и $\beta$ для случаев: $(a)$ $r=k$, $(b)$ $r=k-\varepsilon$ $(0<\varepsilon<k)$, $(c)$ $r=k+\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\beta)$.

В работе [2] вместо последовательности $\lambda_n = n^{k-\varepsilon}$ (что соответствует случаю $(b)$) рассмотрено ее обобщение: $\lambda_n=\varphi(1/n)$, где функция $\varphi(t)$ обладает некоторыми свойствами и доказаны следующие теоремы:

Теорема A1. *Пусть* $1<p<\infty$, $0<\theta\leqslant\min(2,p)$ *и пусть* $k_1,\beta>0$, *а монотонная функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет следующим условиям:*
(1) $\exists\varepsilon_1>0$, *такое что* $\varphi(t)t^{\varepsilon_1}$ *почти убывает на* $(0,1)$,
(2) $\exists\varepsilon_2>0$, *такое что* $\varphi(t)t^{k_1-\varepsilon_2}$ *почти возрастает на* $(0,1)$.
*Если для* $f\in L_p$ *выполнено условие*

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega^\theta_{k_1+\beta}(f,t)_p dt < \infty,$$

*то существует функция* $\psi\in L_p$, *имеющая ряд Фурье* $\sigma(f,\lambda)$, *где* $\lambda_n=\varphi(1/n)$, *и для любого* $\delta\in(0,1/2]$ *справедливо неравенство*

$$\omega_\beta(\psi,\delta)_p \ll \left\{\delta^{\beta\theta}\int\limits_\delta^1 \frac{\varphi^\theta(t)}{t}t^{-\beta\theta}\omega^\theta_{k_1+\beta}(f,t)_p dt + \int\limits_0^\delta \frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega^\theta_{k_1+\beta}(f,t)_p dt\right\}^{1/\theta}.$$

Теорема A2. *Пусть* $1<p<\infty$, $\max(2,p)\leqslant\tau<\infty$, *пусть* $k_1,\beta>0$, *а монотонная функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условиям* (1) *и* (2) *теоремы* A1. *Если для* $f\in L_p$ *ряд* $\sigma(f,\lambda)$, *где* $\lambda_n=\varphi(1/n)$, *есть ряд Фурье некоторой функции* $\psi\in L_p$, *то для любого* $\delta\in(0,1/2]$ *справедливо неравенство*

$$\omega_\beta(\psi,\delta)_p \gg \left\{\delta^{\beta\tau}\int\limits_\delta^1 \frac{\varphi^\tau(t)}{t}t^{-\beta\tau}\omega^\tau_{k_1+\beta}(f,t)_p dt + \int\limits_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t}\omega^\tau_{k_1+\beta}(f,t)_p dt\right\}^{1/\tau}.$$

В данной работе получены обобщения оценок модуля гладкости для случая $(c)$.

Теорема Б1. *Пусть* $1<p<\infty$, $0<\theta\leqslant\min(2,p)$, $\max(2,p)\leqslant\tau<\infty$, *пусть* $k_2,\beta>0$, *а монотонная функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет следующим условиям:*
(1) $\exists\varepsilon_1>0$, *такое что* $\varphi(t)t^{k_2+\varepsilon_1}$ *почти убывает на* $(0,1)$,
(2) $\exists\varepsilon_2>0$, *такое что* $\varphi(t)t^{k_2+\beta-\varepsilon_2}$ *почти возрастает на* $(0,1)$.

*Если $f \in L_p$, и выполнено условие*

$$\int\limits_0^1 \frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega_{k_2+\beta}^\theta(f,t)_p dt < \infty,$$

*то существует функция $\psi \in L_p$, имеющая ряд Фурье $\sigma(f,\lambda)$, где $\lambda_n = \varphi(1/n)$, и для любого $\delta \in (0,1/2]$ справедливо неравенство*

(1)
$$\left\{\delta^{(k_2+\beta)\tau}\varphi^\tau(\delta)\int\limits_\delta^1 \frac{t^{-(k_2+\beta)\tau-1}}{\varphi^\tau(t)}\omega_\beta^\tau(\psi,t)_p dt\right\}^{1/\tau} \ll \left\{\int\limits_0^\delta \frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega_{k_2+\beta}^\theta(f,t)_p dt\right\}^{1/\theta}.$$

Теорема Б2. *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \theta \leqslant \min(2,p)$, $\max(2,p) \leqslant \tau < \infty$, пусть $k_2, \beta > 0$, а монотонная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1), (2) теоремы Б1. Если для $f \in L_p$ ряд $\sigma(f,\lambda)$, где $\lambda_n = \varphi(1/n)$, есть ряд Фурье некоторой функции $\psi \in L_p$, то для любого $\delta \in (0,1/2]$ справедливо неравенство*

(2)
$$\left\{\delta^{(k_2+\beta)\theta}\varphi^\theta(\delta)\int\limits_\delta^1 \frac{t^{-(k_2+\beta)\theta-1}}{\varphi^\theta(t)}\omega_\beta^\theta(\psi,t)_p dt\right\}^{1/\theta} \gg \left\{\int\limits_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t}\omega_{k_2+\beta}^\tau(f,t)_p dt\right\}^{1/\tau}.$$

Замечание 1. В частном случае, когда фунция $\varphi(t) = t^{-r}$, $r > 0$, и, соответственно, $\lambda_n = n^r$, утверждения, соответствующие Теоремам А1 и А2 (для случая $r < k$) и Теоремам Б1 и Б2 (для случая $k < r < k+\beta$), содержатся в работе [1].

Замечание 2. Выражения, которые стоят в левых частях неравенств (1) и (2), нельзя одновременно заменить на $\omega_\beta(\psi,\delta)_p$.

О точности Теорем Б1 и Б2 говорят следующие утверждения:

Утверждение 1. *Если функция $f(x) \in L_p$, $(1 < p < \infty)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx$ с квазимонотонными коффициентами, т.е. $\exists\gamma \geqslant 0$, такое что $a_n n^{-\gamma} \downarrow 0$, то утверждения Теорем* Б1 *и* Б2 *справедливы при замене условий $0 < \theta \leqslant \min(2,p)$, $\max(2,p) \leqslant \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leqslant p$, $p \leqslant \tau < \infty$.*

Утверждение 2. *Если функция $f(x) \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^\infty a_n \cos 2^n x$, $a_n \geqslant 0$, то утверждения Теорем* Б1 *и* Б2 *справедливы при замене условий $0 < \theta \leqslant \min(2,p)$, $\max(2,p) \leqslant \tau < \infty$ на условия $0 < \theta \leqslant 2$, $2 \leqslant \tau < \infty$.*

## 2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. [**3**] *Пусть $a_n \geqslant 0$, $\lambda_n > 0$. Тогда для любого $p \geqslant 1$:*

$$a.\quad \sum_{n=1}^\infty \lambda_n\left(\sum_{\nu=1}^n a_\nu\right)^p \ll \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{1-p}a_n^p\left(\sum_{\nu=n}^\infty \lambda_\nu\right)^p,$$

$$b.\quad \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\biggl(\sum_{\nu=n}^{\infty}a_\nu\biggr)^p \ll \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{1-p}a_n^p\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\lambda_\nu\biggr)^p.$$

Лемма 2. [**4**] *Если функция $f\in L_p$ $(1<p<\infty)$ и числа $\beta,r>0$, $\tau=\max(2,p)$, $\theta=\min(2,p)$, то при всех $\delta\in(0,1/2]$ справедливо неравенство:*

$$\biggl(\delta^{\beta\tau}\int\limits_{\delta}^{1}t^{-\beta\tau-1}\omega_{\beta+r}^{\tau}(f,t)_p dt\biggr)^{1/\tau} \ll \omega_\beta(f,\delta)_p \ll \biggl(\delta^{\beta\theta}\int\limits_{\delta}^{1}t^{-\beta\theta-1}\omega_{\beta+r}^{\theta}(f,t)_p dt\biggr)^{1/\theta}.$$

Лемма 3. [**2**] *Если функция $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ с квазимонотонными коффициентами, т.е. $\exists\gamma\geqslant 0$, такое что $a_n n^{-\gamma}\downarrow 0$, то*

($a$) *Утверждение Теоремы* A1 *справедливо при замене условия $0<\theta\leqslant\min(2,p)$ на условие $0<\theta\leqslant p$,*

($b$) *Утверждение Теоремы* A2 *справедливо при замене условия $\max(2,p)\leqslant\tau<\infty$ на условие $p\leqslant\tau<\infty$.*

Лемма 4. [**2**] *Если функция $f(x)\in L_p$ $(1<p<\infty)$ имеет ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2^n x$, $a_n\geqslant 0$, то*

($a$) *Утверждение Теоремы* A1 *справедливо при замене условия $0<\theta\leqslant\min(2,p)$ на условие $0<\theta\leqslant 2$,*

($b$) *Утверждение Теоремы* A2 *справедливо при замене условия $\max(2,p)\leqslant\tau<\infty$ на условие $2\leqslant\tau<\infty$.*

## 3. Доказательство Теоремы Б1

Прежде всего заметим, что, так как функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы Б1, то она удовлетворяет условиям (1) и (2) теоремы $A1$ с параметром $k_1=k_2+\beta$. Также, используя условия (1) и (2), можно показать, что для любого $s>0$ выполнены соотношения:

$$(3)\qquad n^{-k_1 s}\int\limits_{1/n}^{1}\frac{t^{-k_1 s}}{\varphi^s(t)}\frac{dt}{t}\asymp n^{-k_2 s}\int\limits_{0}^{1/n}\frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)}\frac{dt}{t}\asymp\int\limits_{1/2n}^{1/n}\frac{1}{\varphi^s(t)}\frac{dt}{t}\asymp\frac{1}{\varphi^s(1/n)}.$$

Действительно, например, докажем, что

$$n^{-k_2 s}\int\limits_{0}^{1/n}\frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)}\frac{dt}{t}\asymp\frac{1}{\varphi^s(1/n)}.$$

Из условий (1) и (2) следует, что $0<\varepsilon_1$ и $0<\varepsilon_2<\beta$. Тогда справедливы неравенства

$$\int\limits_{0}^{1/n}\frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)}\frac{dt}{t}\ll\frac{n^{(k_2+\varepsilon_1)s}}{\varphi^s(1/n)}\int\limits_{0}^{1/n}t^{\varepsilon_1 s}\frac{dt}{t}\ll\frac{n^{k_2 s}}{\varphi^s(1/n)};$$

$$\int\limits_{0}^{1/n}\frac{t^{-k_2 s}}{\varphi^s(t)}\frac{dt}{t}\gg\frac{n^{(k_2+\beta-\varepsilon_2)s}}{\varphi^s(1/n)}\int\limits_{0}^{1/n}t^{(\beta-\varepsilon_2)s}\frac{dt}{t}\gg\frac{n^{k_2 s}}{\varphi^s(1/n)}.$$

Таким образом, можно применить теорему $A1$, которая утверждает существование принадлежащей $L_p$ функции $\psi$ с рядом Фурье $\sigma(f,\lambda)$, где $\lambda_n=\varphi(1/n)$, и выполнение следующего неравенства ($\forall\nu\in\mathbf{N}$):

$$
\begin{aligned}
&\omega_\beta^\tau(\psi,1/2^\nu)_p\\
&\ll\Bigg\{2^{-\nu\beta\theta}\int\limits_{1/2^\nu}^{1}\frac{\varphi^\theta(t)}{t}t^{-\beta\theta}\omega_{k_1+\beta}^\theta(f,t)_p dt+\int\limits_0^{1/2^\nu}\frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega_{k_1+\beta}^\theta(f,t)_p dt\Bigg\}^{\tau/\theta}\\
&\ll\Bigg\{\int\limits_0^{1/2^n}\frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega_{k_1+\beta}^\theta(f,t)_p dt\Bigg\}^{\tau/\theta}+\Bigg\{\sum_{\xi=\nu}^{n-1}\varphi^\theta\Big(\frac{1}{2^\xi}\Big)\omega_{k_1+\beta}^\theta\Big(f,\frac{1}{2^\xi}\Big)_p\Bigg\}^{\tau/\theta}\\
&\quad+\Bigg\{2^{-\nu\beta\theta}\sum_{\xi=1}^{\nu}2^{\xi\beta\theta}\varphi^\theta\Big(\frac{1}{2^\xi}\Big)\omega_{k_1+\beta}^\theta\Big(f,\frac{1}{2^\xi}\Big)_p\Bigg\}^{\tau/\theta}=:I_{11}+I_{12}+I_{13}.
\end{aligned}\tag{4}
$$

Выберем натуральное $n$, такое что $2^{-n}\leqslant\delta<2^{-n+1}$. Тогда

$$
\begin{aligned}
I:&=\Bigg\{\delta^{(k_2+\beta)\tau}\varphi^\tau(\delta)\int\limits_\delta^1\frac{t^{-(k_2+\beta)\tau-1}}{\varphi^\tau(t)}\omega_\beta^\tau(\psi,t)_p dt\Bigg\}^{1/\tau}\\
&\asymp\frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}}\Bigg\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2^{\nu\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)}\omega_\beta^\tau\Big(\psi,\frac{1}{2^\nu}\Big)_p\Bigg\}^{1/\tau}.
\end{aligned}
$$

Оценим $I$ сверху с учетом неравенства (4).

$$
I\ll\sum_{j=1}^{3}\frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}}\Bigg\{\sum_{\nu=0}^{n}\frac{2^{\nu\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)}I_{1j}\Bigg\}^{1/\tau}=:I_{21}+I_{22}+I_{23}.
$$

Используя условие (3) и свойство модуля гладкости, получим

$$
I_{21}\ll I_{11}^\tau\ll\Bigg\{\int\limits_0^\delta\frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega_{k_1+\beta}^\theta(f,t)_p dt\Bigg\}^{1/\theta}\ll\Bigg\{\int\limits_0^\delta\frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega_{k_2+\beta}^\theta(f,t)_p dt\Bigg\}^{1/\theta}.
$$

Далее последовательно применяя лемму $1(b)$, условие (3) и лемму 2, оценим $I_{22}$.

$$
\begin{aligned}
&I_{22}\ll\\
&\ll\frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}}\Bigg\{\sum_{\nu=0}^{n}\omega_{k_1+\beta}^\tau\Big(f,\frac{1}{2^\nu}\Big)_p\varphi^\tau\Big(\frac{1}{2^\nu}\Big)\Big(\frac{2^{\nu\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)}\Big)^{1-\tau/\theta}\Big(\sum_{\xi=0}^{\nu}\frac{2^{\xi\tau(k_2+\beta)}}{\varphi^\tau(1/2^\xi)}\Big)^{\tau/\theta}\Bigg\}^{1/\tau}\\
&\ll\frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}}\Bigg\{\sum_{\nu=0}^{n}\omega_{k_1+\beta}^\tau\Big(f,\frac{1}{2^\nu}\Big)_p 2^{\nu\tau(k_2+\beta)}\Bigg\}^{1/\tau}\ll\varphi\Big(\frac{1}{2^n}\Big)\omega_{k_2+\beta}\Big(f,\frac{1}{2^n}\Big)_p\\
&\ll\Bigg\{\int\limits_0^\delta\frac{\varphi^\theta(t)}{t}\omega_{k_2+\beta}^\theta(f,t)_p dt\Bigg\}^{1/\theta}.
\end{aligned}
$$

Теперь оценим $I_{23}$, используя лемму $1(a)$ и условие (3).

$$I_{23} \ll \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \times \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \omega^{\tau}_{k_1+\beta}\Big(f, \frac{1}{2^\nu}\Big)_p \varphi^{\tau}\Big(\frac{1}{2^\nu}\Big) 2^{\nu\beta\tau} \Big(\frac{2^{\nu\tau k_2}}{\varphi^{\tau}(1/2^\nu)}\Big)^{1-\frac{\tau}{\theta}} \Big(\sum_{\xi=\nu}^{n} \frac{2^{\xi\tau k_2}}{\varphi^{\tau}(1/2^\xi)}\Big)^{\tau/\theta} \right\}^{1/\tau}$$
$$\ll \frac{\varphi(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)}} \left\{ \sum_{\nu=0}^{n} \omega^{\tau}_{k_1+\beta}\Big(f, \frac{1}{2^\nu}\Big)_p 2^{\nu\tau(k_2+\beta)} \right\}^{1/\tau}.$$

Последнее выражение мы уже оценивали выше.

Итак,

$$I \ll \left\{ \int_0^\delta \frac{\psi^\theta(t)}{t} \omega^{\theta}_{k_2+\beta}(f,t)_p dt \right\}^{1/\theta}.$$

Теорема доказана.

## 4. Доказательство Теоремы Б2

Так как функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то можно показать, что для любого $s > 0$ выполнены соотношения ($k_1 = k_2 + \beta$):

$$n^{k_1 s} \int_0^{1/n} \frac{\varphi^s(t)}{t} t^{k_1 s} dt \asymp \int_{1/2n}^{1/n} \frac{\varphi^s(t)}{t} dt \asymp \varphi^s(1/n). \tag{5}$$

Аналогично доказательству Теоремы Б1, используя Теорему А2 с $\lambda_n = \varphi(1/n)$ и $k_1 = k_2 + \beta$, получим справедливость следующего неравенства:

$$\omega_\beta(\psi,\delta)_p \gg \left\{ \delta^{\beta\tau} \int_\delta^1 \frac{\varphi^\tau(t)}{t} t^{-\beta\tau} \omega^{\tau}_{k_1+\beta}(f,t)_p dt + \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega^{\tau}_{k_1+\beta}(f,t)_p dt \right\}^{1/\tau}$$
$$\gg \left\{ \int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t} \omega^{\tau}_{k_1+\beta}(f,t)_p dt \right\}^{1/\tau}. \tag{6}$$

Наряду с неравенством (6), нам понадобится неравенство

$$\omega_{k_1+\beta}(f,\delta) \ll \frac{1}{\varphi(\delta)} \omega_\beta(\psi,\delta)_p \quad \text{для} \quad \delta \in (0, 1/2] \tag{7}$$

Докажем (7), пользуясь неравенством (6), свойствами модуля гладкости и условием (1) на функцию $\varphi(t)$.

$$\begin{aligned}\omega_\beta(\psi,\delta)_p &\gg \left\{\int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)t^{(k_1+\beta)\tau}}{t}\frac{\omega^\tau_{k_1+\beta}(f,t)_p}{t^{(k_1+\beta)\tau}}dt\right\}^{1/\tau}\\ &\gg \frac{\omega_{k_1+\beta}(f,\delta)_p}{\delta^{k_1+\beta}}\left\{\int_0^\delta \varphi^\tau(t)t^{(k_1+\beta)\tau-1}dt\right\}^{1/\tau}\\ &\gg \frac{\omega_{k_1+\beta}(f,\delta)_p}{\delta^{k_1+\beta}}\left\{\varphi^\tau(\delta)\delta^{(k_2+\varepsilon_1)\tau}\int_0^\delta t^{(k_1+\beta-k_2-\varepsilon_1)\tau-1}\,dt\right\}^{1/\tau}\\ &\gg \omega_{k_1+\beta}(f,\delta)\varphi(\delta).\end{aligned}$$

Выберем натуральное $n$, такое что $2^{-n}\leqslant\delta<2^{-n+1}$. Тогда, применяя неравенство (5) и лемму 2, получим

$$\begin{aligned}\int_0^\delta \frac{\varphi^\tau(t)}{t}\omega^\tau_{k_2+\beta}(f,t)_pdt &\asymp \sum_{\nu=n}^\infty \varphi^\tau\Big(\frac{1}{2^\nu}\Big)\omega^\tau_{k_2+\beta}\Big(f,\frac{1}{2^\nu}\Big)_p\\ &\ll \sum_{\nu=n}^\infty \frac{\varphi^\tau(1/2^\nu)}{2^{\nu(k_2+\beta)\tau}}\left(\sum_{\xi=1}^\nu 2^{\xi(k_2+\beta)\theta}\omega^\theta_{k_1+\beta}\Big(f,\frac{1}{2^\xi}\Big)_p\right)^{\tau/\theta}\\ &\ll \sum_{\nu=n}^\infty \frac{\varphi^\tau(1/2^\nu)}{2^{\nu(k_2+\beta)\tau}}\left(\sum_{\xi=1}^n 2^{\xi(k_2+\beta)\theta}\omega^\theta_{k_1+\beta}\Big(f,\frac{1}{2^\xi}\Big)_p\right)^{\tau/\theta}\\ &\quad+\sum_{\nu=n}^\infty \frac{\varphi^\tau(1/2^\nu)}{2^{\nu(k_2+\beta)\tau}}\left(\sum_{\xi=n+1}^\nu 2^{\xi(k_2+\beta)\theta}\omega^\theta_{k_1+\beta}\Big(f,\frac{1}{2^\xi}\Big)_p\right)^{\tau/\theta}=J_1+J_2.\end{aligned}$$

Оценка $J_1$ производится с помощью неравенств (5) и (7):

$$J_1\ll\frac{\varphi^\tau(1/2^n)}{2^{n(k_2+\beta)\tau}}\left(\sum_{\nu=1}^n \frac{2^{\nu(k_2+\beta)\theta}}{\varphi^\tau(1/2^\nu)}\omega^\theta_\beta\Big(\psi,\frac{1}{2^\nu}\Big)_p\right)^{\tau/\theta}.$$

Для того, чтобы оценить $J_2$, воспользуемся леммой 1 и неравенством (6).

$$J_2\ll\sum_{\nu=n}^\infty\varphi^\tau\Big(\frac{1}{2^\nu}\Big)\omega^\tau_{k_1+\beta}\Big(f,\frac{1}{2^\nu}\Big)_p\ll\omega^\tau_\beta\Big(\psi,\frac{1}{2^n}\Big)_p.$$

Таким образом, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}\left\{\int_0^\delta\frac{\varphi^\tau(t)}{t}\omega^\tau_{k_2+\beta}(f,t)_pdt\right\}^{1/\tau} &\ll (J_1+J_2)^{1/\tau}\\ &\ll\left\{\delta^{(k_2+\beta)\theta}\varphi^\theta(\delta)\int_\delta^1\frac{t^{-(k_2+\beta)\theta-1}}{\varphi^\theta(t)}\omega^\theta_\beta(\psi,t)_pdt\right\}^{1/\theta}.\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Утверждения 1 и 2 доказываются теже методами, что и теоремы Б1 и Б2, только вместо теорем А1 и А2 надо использовать лемму 3 (для доказательства Утверждения 1) и лемму 4 (для доказательства Утверждения 2).

Автор выражает благодарность профессору М. К. Потапову за внимание к работе.

**Список литературы**

[1] М. К. Потапов, Б. Лакович, Б. В. Симонов, *Об оценках модулей гладкости функций, имеющих дробную производную,* Math. Montisnigri 7 (1996), 41–52.

[2] М. К. Потапов, Б. В. Симонов, *Об оценках модулей гладкости функций с преобразованным рядом Фурье*, Фундаментальная и прикладная математика 1:2 (1995), 455–469

[3] М. К. Потапов, М. Бериша, *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного*, Publ. Inst. Math., Nouv. Ser. 26(40) (1979), 215–228

[4] М. Ф. Тиман, *Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах $L_p$*, В сб. “Исследования по основным теоремам конструктивной теории функций”, Баку, 1965.

Механико-математический факултет
МГУ, Москва
Россия

ser_tikhonov@mail.ru

(Поступила 16 04 2002)