PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 83(97) (2008), 87–97 DOI : 10.2298/PIM0897087K

SUR LES CONSÉQUENCES D'UN THÉORÈME DE J. LIOUVILLE EN MATIÈRE DE POSSIBILITÉ ET DE L'IMPOSSIBILITÉ DE TROUVER EFFECTIVEMENT DES SOLUTIONS PARTICULIÈRES D'ÉQUATIONS DE RICCATI ET LINÉAIRE DU SECOND ORDRE

Andrzej Kapcia

Consacré à la mémoire honorée de Professeur D. S. Mitrinović

RÉSUMÉ. Dans les travaux consacrés à "la méthode de l'intégrale particulière", on introduit les solutions particulières dépendant respectivement : de coefficients de l'équation de Riccati (1.1), de coefficients de l'équation linéaire et homogène du second ordre (1.2), et de certaines fonctions arbitraires μ_k ($k = 1, \dots, 6$). Cette Note est consacrée aux théorèmes qui disent, qu'il existe "continuum" de coefficients a, b, c de l'équation (1.1), et respectivement il existe "continuum" de coefficients f, g, h de l'équation (1.2), pour lesquels on ne peut pas trouver effectivement les fonctions μ_k, et par le même, on ne peut pas construire effectivement les solutions particulières des équations considérées. Dans les démonstrations des théorèmes cités, on profit de l'équivalence des critères de l'intégrabilité effective d'équtions (1.1) et (1.2) – plus tôt démontrée – et du résultat de J. Liouville consacré à l'impossibilité d'obtenir effectivement la solution générale de l'équation spéciale de Riccati à l'aide de fonctions élémentaires. On donne aussi les classes d'équations (1.1) et (1.2) desquelles chacune comprend deux sous-classes séparables – l'une toujours effectivement intégrable et la deuxième pour laquelle ceci est impossible.

0. Introduction

Dans les travaux [**5**] et [**8**], on formule une certaine méthode de trouver des solutions particulières de l'équation de Riccati

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \qquad a, b, c \in C_X, \quad a \neq 0; \tag{0.1}$$

et de l'équation linéaire et homogène du second ordre

$$f(x)u'' + g(x)u' + h(x)u = 0, \qquad f, g, h \in C_X, \quad f \neq 0. \tag{0.2}$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 34A05; Secondary 34A30, 34A34.
Communicated by Stevan Pilipović.

Nous l'appelons "méthode de l'intégrale particulière". Elle permet de construire les critères et les solutions particulières des équations (0.1) et (0.2) qui dépendent des coefficients $a,\ b,\ c$ de l'équation (0.1) et certaines fonctions arbitraires μ_k $(k = 1, \dots, 6)$, et respectivement de $f,\ g,\ h$ pour l'équation (0.2) et les mêmes fonctions μ_k. La méthode de l'intégrale particulière permet d'obtenir toutes les équations (0.1) et (0.2) pour lesquelles au moins une solution particulière est connue, aussi leurs généralisations et dans quelques-uns cas les nouvelles équations (0.1) et (0.2) effectivement intégrables. L'application de cette méthode aux équations linéaires d'ordre supérieur, analogiquement comme ses conséquences positives pour l'équation du troisième ordre étaient annoncées dans la note [**9**]. Nous remarquons qu'existent d'autres travaux dans lesquels on construit les solutions particulières d'équations (0.1) et (0.2) dépendant des fonctions arbitraires (cf. [**1**]–[**3**] et [**12**]). Cependant à cause de la généralité de "méthode de l'intégrale particulière" et d'après la possibilité d'application des résultats pour l'équation (0.1) obtenus avant, nous ferons passer les considérations ultérieures en se fondant sur les travaux [**5**]–[**7**]. Nous remarquons que les résultats présentés dans le travail [**6, 7**] étaient obtenus par la traduction des résultats présentés dans [**5**] pour l'équation de Riccati sur l'équation linéaire du second ordre (0.2).

Remarquons encore que dans [**5**] les fonctions μ ne sont pas numérotées. Nous les traiterons aussi comme possédant les indices de 1 à 6 successivement dans les paragraphes II–VII de [**5**], car ceci est possible (parmi les paragraphes II–VII de [**5**] et II–VII de [**6, 7**] il y a l'une correspondance).

Dans cette note-ci, nous voulons trancher le problème : est ce-qu'on peut obtenir les solutions particulières des équations (0.1) et (0.2) exprimées seulement par les coefficients $a,\ b,\ c$ ou respectivement $f,\ g,\ h$ sur la route effective – c'est-à-dire à l'aide de quantité finie d'opérations arithmétiques, d'intégrations et de différentiations sur les coefficients de l'équation considérée et les fonctions élémentaires (cf. p. ex. [**4**, p. 32]). Dans ce cas, on dit sur le processus des quadratures. Évidemment la connaissance d'une solution particulière y_0 de l'équation (0.1) et respectivement d'une solution particulière u_0 de l'équation (0.2) assure la résolution à ces équations par des quadratures, mais le problème de trouver ces solutions particulières effectivement est ouvert.

En répondant sur la question : est ce – qu'on peut chaque fois trouver effectivement la solution particulière de l'équation (0.1) ou (0.2) – nous profitons du th. de J. Liouville sur l'impossibilité de l'obtenir la solution de l'équation spéciale de Riccati à l'aide de quantité finie d'opérations arithmétiques, d'intégrations et de différentations sur les fonctions élémentaires (cf. [**11**] et p. ex. [**4**, p. 38–39]).

J'exprime mes sincères remerciments au Monsieur Konrad Kapcia, l'étudiant de IV année à UAM, qui a bien voulu transcrire ce travail dans le système LaTeX.

1. Les conexions entre les critères d'intégrabilité effective obtenus dans les travaux [5] et [6, 7]

Nous remarquons que dans [**5**], on donne 12 critères de l'intégrabilité effective de l'équation (0.1) et dans [**6, 7**] – 20 critères concernant la construction effective des solutions particulières de l'équation (0.2). Huit d'eux concernent des solutions complexes, et 12 d'entre eux correspondent aux 12 critères donnés en le travail [**5**]. Dans chacun de ces cas, 6 critères – ce sont les critères intégraux, et 6 restants - ce les critères différentiels. Des critères intégraux de travaux [**5**]–[**7**], on peut obtenir chaque fois les critères différentiels présentés dans les mêmes travaux.

Dans la note [**10**], on cite deux théorèmes 3.1 et 3.2 qui disent que les critères defférentiels des travaux [**5**] et [**6, 7**] sont équivalents. Dans là, on donne les plans de démonstrations de l'équivalence des critéres differentiels des travaux [**5**] et [**6, 7**] séparément, si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$a \in C_X^2,\ b, c \in C_X^1,\ \mu_k \in C_X^1\ (k = 1, \dots, 6),\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c - \mu_1 \neq 0 \tag{1.1}$$

et les hypothèses naturelles

$$\begin{array}{lll} (\mu_2 - c)/a > 0, & -b \mp \sqrt{\Delta_1} \neq 0, & \text{et} \quad \Delta_1 = b^2 + 4a\mu_3 \geqslant 0, \\ \mu_4 \neq 0, \quad \mu_5/a > 0, & -b \mp \sqrt{\Delta_2} \neq 0, & \text{et} \quad \Delta_2 = b^2 + 4a(\mu_6 - c) \geqslant 0, \end{array} \tag{1.1*}$$

qui assurent l'existence des solutions particulières en formes (2.1), (3.3), (4.3), (5.1), (6.3) et (7.3) pour l'équation (0.1) – v. [**5**], c.-à-d. les solutions en formes :

$$\begin{aligned} y_0 &= (\mu_1 - c)/b, \\ y_0 &= \mp\sqrt{(\mu_2 - c)/a}, \\ y_0 &= \left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3}\right)/2a, \\ y_0 &= \mu_4/b, \\ y_0 &= \mp\sqrt{\mu_5/a}, \\ y_0 &= \left(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)}\right)/2a; \end{aligned}$$

et aussi les hypothèses :

$$f \in C_X^2,\ g, h \in C_X^1,\ \mu_k \in C_X^1\ (k = 1, \dots, 6),\ f \neq 0,\ f' - g \neq 0,\ h - \mu_1 \neq 0 \tag{1.2}$$

et les hypothèses naturelles

$$\begin{array}{lll} (\mu_2 - h)/f > 0, & f' - g \mp \sqrt{\Delta_1^*} \neq 0, & \text{où } \Delta_1^* = (f' - g)^2 + 4f\mu_3 \geqslant 0, \\ \mu_4 \neq 0,\ f\mu_5 > 0, & f' - g \mp \sqrt{\Delta_2^*} \neq 0, & \text{où } \Delta_2^* = (f' - g)^2 + 4f(\mu_6 - h) \geqslant 0 \end{array} \tag{1.2*}$$

qui garantissent l'existence des solutions particulières en formes : (2.3), (3.3), (4.3), (5.3), (6.3) et (7.3) pour l'équation (0.2) – v. [**6, 7**], c.-à-d. les solutions en formes :

$$\begin{aligned} u_0 &= \exp\left[-\int ((\mu_1 - h)/(f' - g))\, dx\right], \\ u_0 &= \exp\left[\mp\int \sqrt{(\mu_2 - h)/f} dx\right], \\ u_0 &= \exp\left[\int \left((f' - g \mp \sqrt{(f' - g)^2 + 4f\mu_3})/2f\right) dx\right], \\ u_0 &= \exp\left[-\int (\mu_4/(f' - q))\, dx\right], \end{aligned}$$

$$u_0 = \exp\left[\mp\int(\sqrt{f\mu_5}/f)dx\right],$$
$$u_0 = \exp\left[\int\Big((f'-g\mp\sqrt{(f'-g)^2+4f(\mu_6-h)})/2f\Big)\,dx\right].$$

Les cas, si $b\equiv 0$ ou $f'\equiv g$ sont exclus à cause des hypothèses admises. Les hypothèses citées ci-dessus excluent aussi les solutions particulières en forme de constantes.

Remarquons encore, que dans les solutions particulières présentées dans les travaux [**5**]–[**7**], analogiquement comme dans les critères figurent les fonctions arbitraires μ_k $(k=1,\dots,6)$. On peut les exprimer toutes convenablement par les coefficients $a,\ b,\ c$ ou $f,\ g,\ h$ des équations (0.1) et (0.2), et par l'une fonction arbitraire – p. ex. μ_1. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned}&\mu_2 = av^2+c, \quad \mu_3 = av^2+\mu_1-c, \quad \mu_4=\mu_1-c,\\ &\mu_5 = av^2, \qquad \mu_6 = av^2+\mu_1, \quad \text{où } \ v\equiv(\mu_1-c)/b;\end{aligned}\tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}&\mu_2 = fz^2+h, \quad \mu_3 = fz^2+\mu_1-h, \quad \mu_4=\mu_1-h,\\ &\mu_5 = fz^2, \qquad \mu_6 = fz^2+\mu_1, \quad \text{où } \ z\equiv(\mu_1-h)/(f'-g).\end{aligned}\tag{1.4}$$

De ces relations on peut déterminer aussi μ_i en fonctions μ_k où $i\neq k$ $(i=1,\dots,6\,;$ $k=1,\dots,6)$ et $a,\ b,\ c$ ou $f,\ g,\ h$ respectivement. On profit les relations (1.3) et (1.4) dans les démonstrations de l'équivalence des critères différentiels des tarvaux [**5**] et [**6, 7**] – cf. schèmes de démonstrations en [**10**, p. 325–326]. Les plus courtes démonstrations de Th. 3.1 et Th. 3.2 se fondent sur l'application des règles : (2.2) $\Rightarrow$ (3.4) $\Rightarrow$ (4.4) $\Rightarrow$ (5.2) $\Rightarrow$ (6.4) $\Rightarrow$ (7.4) $\Rightarrow$ (2.2) pour Th. 3.1 ; et (2.4) $\Rightarrow$ (3.4) $\Rightarrow$ (4.4) $\Rightarrow$ (5.4) $\Rightarrow$ (6.4) $\Rightarrow$ (7.4) $\Rightarrow$ (2.4) pour Th. 3.2. Ici nous ne donnons pas les démonstrations précises des théorèmes cités ci-dessus parce qu'elles sont trop longues et ne forment pas le but principal de ce travail.

En connexion avec les faits cités ci-dessus, il suffit considérer deux critères – l'un de [**5**] et l'un de [**6, 7**] – p. ex. les tels dans lesquels figure la fonction μ_1. Dans [**5**, p. 116] nous avons le théorème :

THÉORÈME 1.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$y_0 = (\mu_1-c)/b \tag{1.5}$$

soit une solution particulière de l'équation (0.1)*, est que les fonctions* $a,\ b,\ c$ *et* μ_1 *satisfassent à la condition*

$$((\mu_1-c)/b)'_x - a((\mu_1-c)/b)^2-\mu_1 = 0 \tag{1.6}$$

pour tous $x\in X$.

Analogiquement dans le travail [**6, 7**, p. 137], on donne le théorème :

THÉORÈME 1.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$u_0 = \exp\left[-\int(\mu_1-h)/(f'-g)dx\right] \tag{1.7}$$

soit la solution particulière de l'équation (0.2), *est que les fonctions* f, g, h *et* μ_1 *satisfassent à la condition*

$$(f((\mu_1 - h)/(f' - g)))'_x - f((\mu_1 - h)/(f' - g))^2 - \mu_1 = 0 \tag{1.8}$$

pour tous $x \in X$.

Ces deux théorèmes nous admettons avec les hypothèses (1.1), (1.1*) et (1.2), (1.2*) respectivement, qui sont nécessaires pour démontrer leur équivalence avec les autres critères de [**5**] et de [**6, 7**] respectivement. Elles sont plus fortes des hypothèses des théorèmes cités dans [**5**], [**6, 7**] et [**10**].

Nous remarquons, que si la fonction μ_1 est donnée, alors les coefficients a, b, c et f, g, h satisfont aux conditions (1.6) et (1.8) ; si cependant la fonction μ_1 est inconnue, alors les conditions (1.6) et (1.8) avec les coefficients donnés a, b, c de (0.1) et f, g, h de (0.2) déterminent respectivement les équations différentielles avec la fonction μ_1 inconnue. Nous considérons donc la possibilité de l'obtenir la fonction μ_1 effectivement en fonctions a, b, c et f, g, h respectivement et en fonctions élémentaires. Il est facile de voir que les critères (1.6) et (1.8) traités comme les équations defférentielles avec la fonction inconnue μ_1 ce sont les équations de Riccati. De plus, tous les critères différentiels de [**5**] et [**6, 7**] traités comme les équations defférentielles avec l'inconnue μ_k $(k = 1, \ldots, 6)$ ont la même propriété.

2. Le cas de l'équation differntielle de Riccatii

Considérons d'abord le cas de l'équation (0.1). Nous avons :

Théorème 2.1. *Si les coefficients de l'équation* (0.1) *satisfont aux hypothèses* (1.1) *et* (1.1*), *il existe alors, au moins un système de fonctions* a, b, c *pour lequel on ne peut pas trouver effectivement la solution particulière* y_0 *de l'équation de Riccati* (0.1) *laquelle serait exprimée exclusivement en fonctions* a, b, c *et en fonctions élémentaires.*

Démonstration. Pour démontrer ce théorème, il suffit considérer le cas si $b \neq 0$ sur X. En vertu du th. 3.1 du travail [**10**], nous avons que les critères : (2.2), (3.4), (4.4), (5.2), (6.4) et (7.4) du travail [**5**] – c.-à-d. les critères suivants :

$$\begin{aligned}
[(\mu_1 - c)/b]'_x - a\,[(\mu_1 - c)/b]^2 - \mu_1 &= 0,\\
\mp\left[\sqrt{(\mu_2 - c)/a}\right]'_x \pm b\sqrt{(\mu_2 - c)/a} - \mu_2 &= 0,\\
\left\{(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a\mu_3})/2a\right\}'_x - c - \mu_3 &= 0,\\
(\mu_4/b)'_x - a(\mu_4/b)^2 - c - \mu_4 &= 0,\\
\mp[\sqrt{\mu_5/a}]'_x \pm b\sqrt{\mu_5/a} - c - \mu_5 &= 0,\\
\left\{(-b \mp \sqrt{b^2 + 4a(\mu_6 - c)})/2a\right\}'_x - \mu_6 &= 0
\end{aligned}$$

sont équivalents. En connexion avec cela considérons la condition (1.6) en la traitant comme l'équation différentielle par rapport à la fonction μ_1. Comme on le sait, elle assure l'existance de solution particulière de l'équation (0.1) différente de zéro (cf. (1.5) et les hypothèses (1.1) du th. 2.1). En substituant $v = (\mu_1 - c)/b$ et $z = av$, nous transformons l'équation (1.6) en l'équation

$$z' = z^2 + (b + a'/a)z + ac, \tag{2.1}$$

et remarquons, que la fonction μ_1 est maintenant définie par la formule

$$\mu_1 = (b/a)z + c, \tag{2.2}$$

où z est la solution générale de l'équation (2.1). Prenons le système de coefficients

$$a \neq 0, \quad a' \neq 0, \quad b \equiv -a'/a, \quad c \equiv x^r/a, \tag{2.3}$$

où $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -2$, $r \neq 4k/(1-2k)$, si k - le nombre entier. L'équation (2.1) d'après (2.3) prend alors la forme de l'équation spéciale de Riccati

$$z' = z^2 + x^r, \tag{2.4}$$

qu'on ne peut pas intégrer effectivement dans ces cas – comme cela avait démontré J. Liouville – en fonctions élémentaires (cf. [**11**] ou [**4**, p. 38–39]). Par conséquent, on ne peut pas obtenir la fonction z, et par le même la fonction μ_1 à l'aide des fonctions élémentaires et les coefficients a, b, c. □

Corollaire 2.1. *Il existe "continuum" des systèmes de fonctions a, b, c pour lesquels, on ne peut pas obtenir par des quadratures la solution particulière en forme* (1.5) *exprimée exclusivement par les fonctions a, b, c de l'équation* (0.1) *et les fonctions élémentaires.*

En conséquence des relations (1.3), et de l'équivalence des critères différentiels du travail [**5**], nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 2.2. *Il existe "continuum" des sytèmes de fonctions a, b, c pour lesquels, on ne peut pas obtenir les solutions particulières en formes :* (2.1), (3.3), (4.3), (5.1), (6.3) *et* (7.3) *du travail* [**5**] *(cf. aussi ici p. 89), exprimées seulement en fonctions a, b, c de l'équation* (0.1) *et en fonctions élémentaires à l'aide des quadratures.*

Du théorème de J. Liouville résulte que l'équation (2.4) est effectivement intégrable seulement dans les cas qui sont exclus dans la démonstration du th. 2.1 de l'ensemble $\mathbb{R}$ – c'est-à-dire pour les valeurs : $r = 4k/(1-2k)$ si k – le nombre entier et $r = -2$. Nous signifions ce dernier ensemble par I. Pour chacune valeuer de I, on peut obtenir effectivement la fonction μ_1 et par le même la solution particulière (1.5) effectivement ainsi que les autres formes de solutions particulières citées dans le coroll. 2.2. L'exemple de telle équation constitue la classe d'équations

$$y' = a(x)y^2 - (a'(x)/a(x))y + x^r/a(x),$$

où $a \neq 0$, $a \in C^1_X$ et $r \in I$. Sa solution particulière a la forme $y_0 = z/a$ où z la solution quelconque de l'équation (2.4) pour chaque r fixé et appartenant à I.

Dans le cas général nous avons l'équations (2.1). En appliquant la substitution $z = Y - (1/2)u$ dans (2.1), nous obtenons l'équation

$$Y' = Y^2 - (1/4)u^2 + (1/2)u' + ac, \tag{2.5}$$

où $u \equiv b + a'/a$. Si le coefficient $c(x)$ de l'équation (0.1) a la forme

$$c(x) \equiv (1/a(x))(qx^r + (1/4)u^2 - (1/2)u'), \tag{2.6}$$

l'équation (2.5) prend la forme de l'équation spéciale de Riccati

$$Y' = Y^2 + qx^r, \qquad q \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

qu'on peut intégrer effectivement á cause du théorème de J. Liouville pour chacune de valuers $r \in I$. Si Y_0 est la solution particulière de l'équation (2.7) pour r fixé et appartenant à I, alors la fonction μ_1 est effectivement déterminable et a la forme

$$\mu_1 = (b/a)(Y_0 - (1/2)u) + c, \tag{2.8}$$

où c en forme (2.6) avec le même r fixé. D'après les substitutions admises la solution particulière (1.5) de l'équation (0.1) avec le coefficient c en forme (2.6) et le même r fixé, prend la forme

$$y_0 = (1/a)(Y_0 - (1/2)(b + (a'/a))). \tag{2.9}$$

L'équation (0.1) est donc dans tous tels cas effectivement intégrable.

Corollaire 2.3. *L'équation différentielle de Riccati en forme :*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + (1/a(x))(qx^r + (1/4)u^2 - (1/2)u'), \tag{0.1*}$$

oú $a \neq 0$, $a \in C^2_X$, $b \in C^1_X$, $r, q \in \mathbb{R}$, $u \equiv b + a'/a$ *et* $x > 0$, *présente deux classes séparables. L'une qui est toujours effectivement intégrable si :* $q = 0$; $q \neq 0$ *et* $r = -2$, $r = 4k/(1-2k)$ *si* k *– le nombre entier et l'autre qu'on ne peut pas effectivement résoudre pour* $q \neq 0$ *et* $r \in \mathbb{R}$, *et* $r \neq -2$, $r \neq 4k/(1-2k)$ *si* k *– le nombre entier.*

La deuxième classe analogique constitue l'équation

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + (1/a(x))(-qx^r + (1/4)u^2 - (1/2)u'), \tag{0.1**}$$

où a, b, r, q, u et x-comme ci-dessus. Sa solution particulière a la forme

$$y_0 = -(1/a)(Y_0 + (1/2)(b + (a'/a))), \tag{2.10}$$

où Y_0 est la solution particulière de l'équation $Y' = -Y^2 + qx^r$ si $r \in I$.

Remarquons encore que la relation (2.6), on peut traiter comme l'un de critères de l'intégrabilité effective de l'équation de Riccati (0.1).

3. Le cas de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre

Considérons maintenant le cas de l'équation (0.2). Nous avons :

Théorème 3.1. *Si les coefficients de l'équation* (0.2) *satisfont aux hypothèses* (1.2) *et* (1.2*), *alors il existe au moins un système de fonctions* f, g, h *pour lequel on ne peut pas obtenir effectivement la solution particulière* u_0 *de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre* (0.2), *laquelle serait exprimée exclusivement en fonctions* f, g, h *et en fonctions élémentares.*

Démonstration. Pour démontrer ce théorème il suffit considérer le cas : $g \neq f'$. À l'aide du th. 3.2 du travail [**10**], nous avons que les conditions : (2.4), (3.4), (4.4), (5.4), (6.4) et (7.4) du travail [**6, 7**], c.-à-d. les critères suivants :

$$\begin{aligned}
[f(\mu_1-h)/(f'-g)]'_x - f\left[(\mu_1-h)/(f'-g)\right]^2 - \mu_1 &= 0,\\
\mp\left\{f\left[\sqrt{(\mu_2-h)/f}\right]'_x + g\sqrt{(\mu_2-h)/f}\right\} + \mu_2 &= 0,\\
\left[f'-g\mp\sqrt{(f'-g)^2+4f\mu_3}\right]'_x + 2(h+\mu_3) &= 0,\\
[f\mu_4/(f'-g)]'_x - \left[f\mu_4/(f'-g)\right]^2 f^{-1} - h - \mu_4 &= 0,\\
\mp\left[\sqrt{f\mu_5}\right]'_x \pm [(f'-g)/f]\sqrt{f\mu_5} + h + \mu_5 &= 0,\\
\left[f'-g\mp\sqrt{(f'-g)^2+4f(\mu_6-h)}\right]'_x + 2\mu_6 &= 0
\end{aligned}$$

sont équivalentes. Considérons donc la condition (1.8) – identique avec la condition (2.4) de [**6**] en la traitant comme l'équation defférentielle avec la fonction inconnue μ_1. D'après les hypothèses admises elle garantit l'existence de solution particulière différente de constante. À l'aide de substitution : $v = (\mu_1 - h)/(f' - g)$, nous transformons l'équation (1.8) en l'équation

$$v' = v^2 - (g/f)v + (h/f), \tag{3.1}$$

et remarquons que la fonction μ_1 est actuelement déterminée par la formule

$$\mu_1 = (f' - g)v + h, \tag{3.2}$$

où v est la solution générale de l'équation (3.1). Considérons le système de fonctions

$$f \neq 0,\ f' \neq 0,\ g \equiv 0,\ h \equiv fx^r, \tag{3.3}$$

où $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -2$, $r \neq 4k/(1-2k)$ si k – le nombre entier. En substituant les fonctions (3.3) dans l'équation (3.1), nous obtenons l'équation spéciale de Riccati en forme

$$v' = v^2 + x^r, \tag{3.4}$$

qui pour le r admissible n'est pas intégrable en fonctions élémentaries (v. [**11**] ou [**4**, p. 38–39]). D'après cela, on ne peut pas obtenir la fonction v effectivement, et en conséquence la fonction μ_1 à l'aide des fonctions élémentaires et des coefficients $f,\ g,\ h$. □

Corollaire 3.1. *Il existe "continuum" des systèmes de fonctions $f,\ g,\ h$ pour lesquels, on ne peut pas obtenir par des quadratures la solution particulière u_0 en forme* (1.7) *de l'équation* (0.2) *exprimée exclusivement par les fonctions $f,\ g,\ h$ de cette équation et par les fonctions élémentaires.*

En vertu des relation (1.4) et d'après l'équivalence des critères différentiels du travail [**6, 7**], nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2. *Il existe "continuum" des systèmes de fonctions f, g, h pour lesquels, on ne peut pas obtenir à l'aide des quadratures les solutions particulières en formes :* (2.3)*,* (3.3)*,* (4.3)*,* (5.3)*,* (6.3) *et* (7.3) *du tarvail* [**6, 7**] *(cf. aussi ici p.* 89 *et* 90*), exprimées seulement en fonctions f, g, h de l'équation* (0.2) *et en fonctions élémentaires.*

Retournons à l'équation (3.1). C'est une équation de Riccati. Alors les conséquences de ce fait doivent être analogiques que dans le passage précédent. En effet, si l'on applique la substitution : $v = Y + g/2f$, alors de l'équation (3.1) on obtient l'équation

$$Y' = Y^2 - (1/4)z^2 - (1/2)z' + h/f, \tag{3.5}$$

où $z \equiv g/f$. Si le coefficient $h(x)$ de l'équation (0.2) a la forme

$$h(x) \equiv f(x)(qx^r + (1/4)z^2 + (1/2)z'), \tag{3.6}$$

où $q \in \mathbb{R}$, $z \equiv g/f$ et $x > 0$, alors l'équation (3.5) prend la forme de l'équation spéciale de Riccati (2.7), qu'on peut intégrer effectivement pour chaque $r \in I$ (cela d'après le th. de J. Liouville v. p. ex. [**4**, p. 38–39]). On peut donc dans ces cas constuire effectivement la fonction μ_1 en forme

$$\mu_1 = (f' - g)(Y_0 + (1/2)z) + h, \tag{3.7}$$

où Y_0 la solution particulière de l'équation (2.7) pour r fixé de I, $z \equiv g/f$ et h en forme (3.6) avec le même r fixé. D'après la forme de solution particulière (1.7) et la formule (3.7), nous obtenons la solution particulière u_0 de l'équation (0.2) avec h déterminé par la formule (3.6) en forme

$$u_0 = \exp\left[-\int (Y_0 + g/(2f))dx\right] \tag{3.8}$$

pour le même r. Parce que le nombre r était choisi arbitrairement de l'ensemble énumérable I, alors la formule (3.8) est vraie pour chaque $r \in I$.

Corollaire 3.3. *L'équation différentielle linéaire du second ordre en forme*

$$f(x)u'' + g(x)u' + f(x)(qx^r + (1/4)z^2 + (1/2)z')u = 0, \tag{0.2*}$$

où $f \neq 0$, $f \in C^2_X$, $g \in C^1_X$, $q, r \in \mathbb{R}, z \equiv g/f$ et $x > 0$, présente deux classes séparables. L'une qui est toujours effectivement intégrables si : $q = 0$; $q \neq 0$ et $r = -2$, $r = 4k/(1-2k)$ si k – le nombre entier, et la seconde qu'on ne puet pas résoudre effectivement pour $q \neq 0$, $r \in \mathbb{R}$ et $r \neq -2$, $r \neq 4k/(1-2k)$ si k – le nombre entier.

La deuxiéme classe ayant les propriétes analogiques constitue l'équation

$$f(x)u'' + g(x)u' + f(x)(-qx^r + (1/4)z^2 + (1/2)z')u = 0, \tag{0.2**}$$

où f, g, q, r, z et x – comme ci-dessus. Sa solution particulière a la forme

$$u_0 = \exp\left[\int (Y_0 - g/(2f))dx\right], \tag{3.9}$$

oú Y_0 est la solution particulière de l'équation $Y' = -Y^2 + qx^r$, si $r \in I$; si $q \neq 0$ et $r \in \mathbb{R} \setminus I$ elle n'est pas effectivement intǵrable.

Analogiquement que dans le passage précédent la formule (2.6), ici - nous pouvons traiter la formule (3.6) comme l'un de critères de l'intégrabilité effective de l'équation linéaire et homogène (0.2).

Les théorèmes et corollaires analogues, on peut formuler pour les solutions particulières données dans le travail [**8**] pour l'équation (0.2) identique (1.2) de ce travail.

4. Remarques finales

Les critères cités ci-dessus (cf. p. ex. (2.6) et (3.6)) pour les équations (0.1) et (0.2) ne sont pas uniques pour l'intégrabilité effective de ces équations. De la méthode de l'intégrale particulière présentée dans [**5**] et [**8**], et des résultats obtenus dans [**6, 7**] résulte qu'on peut construire "continuum" de tels critères.

Grâce à la méthode de l'intégrale particulière appliquée à l'équation (0.1) dans le travail [**5**], et aussi grâce à la traduction de ces résultats sur l'équation linéaire (0.2) présentés en [**6, 7**], nous avons pu d'utiliser l'équation spéciale de Riccati (cf. (2.4) et (3.4)) dans les démonstrations des théorèmes 2.1 et 3.1 sur l'impossibilité d'obtenir effectivement des solutions particulières pour l'équation (0.1) et (0.2) dans les cas généraux, ainsi que nous avons consruit les sous-classes d'équations (0.1) et (0.2) lesquelles dans quelques cas sont effectivement intégrables et dans les autres cas ne sont pas possibles pour intégrer effectivement.

D'autre part nous remarquons que les solutions particulières des classes d'équations (0.1*), (0.1**), (0.2*) et (0.2**) sont déterminées respectivement par les formules : (2.9), (2.10), (3.8) et (3.9) (si $r \in I$), lesquelles on obtient des solutions particulières dont dépendent d'une fonction arbitraire μ_1 (cf. p. ex (1.5), (2.2), (2.8) et respectivement (1.7), (3.2), (3.7). En même temps nous soulignons que tous les autres résultats pour les équations (0.1) et (0.2) du domaine de leur intégrabilité effective, dans lesquels figurent les fonctions arbitraires p. ex. : de travaux [**1**]–[**3**] et [**12**], on peut obtenir à l'aide de méthode de l'intégrale particulère.

L'obtention de sous-classes d'équations de Riccati (0.1) et linéaire (0.2), qui comprennent les sous-classes qui sont effectivement intégrables et les telles qui ne sont pas effectivement intégrables constitue la résolution partielle d'un problème de Professeur A. Pliś de IM PAN de Cracovie – moi proposé pour résoudre en 1988. On peut de voir que la méthode de l'intégrale particulière est universelle.

Références

[1] L. M. Berkovič, N. Ch. Rozov, A. M. Èjšinskij, *O samosoprjažennych i privodimych linnejnych diffrencialnych uravnenijach vysšich porjadkov i o nekotorych uravnenijach vtorogo porjadka, integriruemych v konečnom vide*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. **230–241** (1968), 61–87.

[2] I. A. Dobodejč, *Ob integrirovanii uravnenija Rikkati i otyskanii častnogo rešenija nekotorych uravnenij*, Diff. Urav. XIII (1977) **8**, 1516–1520.

[3] A. M. Èjšinskij, J. D. Kečkić, *Some additions to Kamke's treatise*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. **330–337** (1970), 39–43.

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen I. Gewönliche Differentialgleichungen*, Leipzig 1962.

[5] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, V. Quelques classes de l'équation de Riccati effectivement intégrables avec deux coefficients arbitraires et le troisième dépendant de ces deux et d'une fonction arbitraire*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS) **26(40)** (1979), 113–129.

[6] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, VI. Sur certaine méthode de construction des critères et des classes de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre effectivement intégrables.* I partie, Mat. Vesnik **35**(2) (1983), 129–144.

[7] A. Kapcia, II partie du travail [**6**], ibid **35**(3) (1983), 257–272.

[8] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, VII. Une méthode de l'obtention des classes de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre effectivement intégrables*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS) **35 (49)** (1984), 68–74.

[9] A. Kapcia, *Sur les conséquences de méthode de l'intégrale particulière pour les équations linéaires et l'équation de Riccati*, Differential Equations and Applications II. Proc. Third Conf. 1985, Rousse 1987, pp. 743–746.

[10] A. Kapcia, *On the problem of effective integrability of Riccati differential equation and of a linear diffrrential equation of second order with the aid of particular integral*, Differential Equations and Applications I, Proc. Second Conf. 1981, Rousse 1982, pp. 324–328.

[11] J. Liouville, *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati*, J. Math. Pures Appl. **6** (1841), 1–13.

[12] R. R. Mkrtumjan, *Ob odnom slučae intergriruemosti linejnogo uravnenija vtorogo porjadka*, Differ. Uravn. **15**(3) (1979), 555–559.

Institut Mathématique et Informatique
L'Ecole Polytechnique
42-201 Czestochowa
Pologne

(Received 31 03 2006)