PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 88(102) (2010), 123–127 DOI: 10.2298/PIM1002123J

EXTENSION DES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES A TRAVERS DE “PETITS" SOUS-ENSEMBLES

Abidi Jamel

Communicated by Miroljib Jevtić

Abstract. We extend, in many variables, results established by Cegrell [2] on the continuation of the plurisubharmonic functions defined outside closed subsets, of open sets of $\mathbb{C}^n$, having zero Ronkin [8] gamma capacity. This will be achieved by the continuation of some plurisubharmonic functions, having on “a priori" growth, through some thin (meaning to be precised) closed subsets of $\mathbb{C}^n$ $(n \geqslant 1)$.

1. Introduction

Dans cet article on propose un élargissement des résultats établis par Cegrell, dans [2], concernant le prolongement des fonctions plurisousharmoniques. Les nouveaux obstacles seront mesurés au moyen de différentes précapacités introduites respectivement par Ronkin [8], Cegrell [3], Hyvönen et Rühentaus [4].

2. Notations et préliminaires

Dans toute la suite, G désigne un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (avec $n \geqslant 1$) et E un sous-ensemble fermé de G. H^α est la mesure α-dimensionnelle de Hausdorff associée à la distance euclidienne. $\mathrm{h}(G), \mathrm{sh}(G), \mathrm{psh}(G)$ et $\mathrm{prh}(G)$ désignent respectivement l'ensemble des fonctions harmoniques, sousharmoniques, plurisousharmoniques et pluriharmoniques dans G (Cf. [5], [6], [7], [8], [9] et [10]). $C(G)$ est l'ensemble des fonctions continues dans G.

Si $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0)$ on écrira $z^0 = (z_j^0, Z_j^0)$ où $z_j^0 \in \mathbb{C}$ et $Z_j^0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, $Z_j^0 = (z_1^0, \dots, z_{j-1}^0, z_{j+1}^0, \dots, z_n^0)$. Si $r > 0$ et $r' > 0$, on note $\triangle(z_j^0, r) \times \triangle^{(n-1)}(Z_j^0, r') = \{(z_j, Z_j) = z \in \mathbb{C}^n \mid z_j \in \triangle(z_j^0, r) \text{ et } Z_j \in \triangle^{(n-1)}(Z_j^0, r')\}$. Ici m_{2n} est la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$. Dans [8] Ronkin à introduit la précapacité Γ_n sur $\mathbb{C}^n$ associée à la précapacité g_n, définie par récurrence sur $\mathbb{C}^n$; si $F \subset \mathbb{C}$, $g_1(F) = \mathrm{Cap}^*(F)$ et pour $F \subset \mathbb{C}^n$ (avec $n \geqslant 2$), $g_n(F) =$

2010 *Mathematics Subject Classification*: 32D20, 32U05.

$\mathrm{MaxCap}^*(\{z_j \in \mathbb{C} \mid g_{n-1}(\{Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \mid (z_j, Z_j) \in F\}) > 0;\ j = 1, 2, \ldots, n\})$. Cap^* étant la capacité logarithmique extérieure sur $\mathbb{C}$ [8]; $\Gamma_n(F) = \mathrm{Sup}\{g_n(\alpha(F)), \alpha \in U\}$, U étant le groupe des transformations unitaires complexes sur $\mathbb{C}^n$. De la même façon on définit $\overline{\Gamma_n}(F) = \mathrm{Sup}\{C^n(\alpha(F)), \alpha \in U\}$, où C^n est la précapacité dans $\mathbb{C}^n$ introduite par Hyvönen et Rühentaus [4]. Si $F \subset \mathbb{C}$, $C^1(F) = \mathrm{Cap}^*(F)$ et si $F \subset \mathbb{C}^n$ (avec $n \geqslant 2$), $C^n(F) = \mathrm{MaxCap}^*(\{z_j \in \mathbb{C} \mid C^{n-1}(\{Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \mid (z_j, Z_j) \in F\}) > 0; j = 1, 2, \ldots, n\})$. Soit P un sous-ensemble borélien dans $\mathbb{C}^n$. P est dit déterminant dans $\mathbb{C}^n$, si pour toute fonction $u \in \mathrm{psh}(\mathbb{C}^n)$, tout $z \in \mathbb{C}^n$, $u(z) = \limsup_{\{\xi \to z, \xi \in P\}} u(\xi)$. De manière similaire, on définit la notion d'ensemble déterminant dans G. Soit maintenant P un fermé dans $\mathbb{C}^n$. Cegrell [2], montre que si le sous-ensemble $\tilde{P} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mid \mathrm{Cap}^*(\{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda\xi + \eta) \in P\}) > 0\}$ est de complémentaire $\mathbb{C}^{2n} \setminus \tilde{P}$ déterminant dans $\mathbb{C}^{2n}$, alors toute $u \in \mathrm{psh}(\mathbb{C}^n \setminus P)$, localement majorée le long de P, a une unique extension $u^* \in \mathrm{psh}(\mathbb{C}^n)$.

Lemme 2.1. *Soit P un sous-ensemble de type F_σ dans $\mathbb{C}^n$. Alors $\tilde{P}$ est déterminant dans $\mathbb{C}^{2n}$ si $\overline{\Gamma}_n(P) = 0$.*

Demonstration. Claire d'après les définitions de $\tilde{P}$ et $\overline{\Gamma_n}(P)$. □

On construira un ouvert G de $\mathbb{C}^n$ et un sous-ensemble E fermé de G tel que, sans que E soit fermé dans $\mathbb{C}^n$ et (pour $F \subset \mathbb{C}^n$, $\overline{F}$ est l'adhérence de F dans $\mathbb{C}^n$) vérifie aussi $\tilde{\overline{E}}$ n'est pas déterminant dans $\mathbb{C}^{2n}$ (on s'intéresse essentiellement au cas $n \geqslant 2$). L'obstacle $\overline{E}$ ne s'intègre pas dans l'énoncé précédent de Cegrell. Mais E sera un ensemble singulier impropre dans G grâce au théorème qui suivra.

Soit $G = D(0,1) \times \mathbb{C}$ où $D(0,1)$ est le disque unité de $\mathbb{C}$. Soit $A = \{\frac{\xi_l}{1+1/l} \mid l \in \mathbb{N}^*\}$ où $\{\xi_l \mid l \in \mathbb{N}^*\} = \partial D(0,1) \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. $\partial D(0,1) \subset \overline{A}$ car si $z \in \partial D(0,1) \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, il existe une sous suite $(\zeta_j)_{j\geqslant 1} \subset \partial D(0,1) \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ avec $\lim_{j\to+\infty} \zeta_j = z$. $\zeta_j = \xi_{k(j)}$ où $(k(j))_{j\geqslant 1} \subset \mathbb{N}^*$ est non majorée, car $(k(j))_{j\geqslant 1}$ majorée par $m_0 \in \mathbb{N}^*$ implique $(\zeta_j)_{j\geqslant 1} \subset \{\xi_1, \ldots, \xi_{m_0}\}$, donc $z \in \partial D(0,1) \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ainsi, il existe une sous suite $(\xi_{l(j)})_{j\geqslant 1} \subset (\xi_l)_{l\geqslant 1}$ telle que $z = \lim_{j\to+\infty} \xi_l(j) = \lim_{j\to+\infty} \frac{\xi_{l(j)}}{1+1/l(j)}$.

Lemme 2.2. *A est fermé dans $D(0,1)$.*

Demonstration. Soit $(z_j)_{j\geqslant 1}$ telle que $\lim_{j\to+\infty} z_j = z \in D(0,1)$. Si $(z_j)_{j\geqslant 1}$ était stationnaire, z serait dans A. Le résultat est alors trivial. Supposons $(z_j)_{j\geqslant 1}$ non stationnaire; alors $z_j = \frac{\xi_{s(j)}}{1+1/s(j)}$ où $(s(j))_{j\geqslant 1}$ est une suite d'entiers naturels non nuls. On notera que $(s(j))_{j\geqslant 1}$ n'est pas majorée (considérez $|z_j|$) et on supposera $(s(j))_{j\geqslant 1}$ strictement croissante vers $+\infty$. On aura $(1+\frac{1}{s(j)})z_j = \xi_{s(j)}$ et il résultera que $\lim_{j\to+\infty} \xi_{s(j)} = z$. Donc $z \in D(0,1)$. Ce qui est impossible. □

Soit B, D des fermés de $\mathbb{C}$ (B compact dans $D(0,1)$) vérifiant $H^2(B) = H^2(D) = 0$, $H^{\frac{5}{3}}(B) > 0$ et $H^{\frac{5}{3}}(D) > 0$. Considérons $E = A \times \mathbb{C} \cup B \times D$. E n'est pas polaire dans $\mathbb{C}^2$ (Considérez $H^3(E)$). E est fermé dans $D(0,1) \times \mathbb{C}$ (se rappeler que A est dénombrable), $\overline{E} \supset \partial D(0,1) \times \mathbb{C} \cup B \times D$. Mais $\mathbb{C}^4 \setminus \tilde{\overline{E}} = C\tilde{\overline{E}}$ n'est pas déterminant dans $\mathbb{C}^4$. En fait, en notant l'existence d'une fonction $u_1 \in \mathrm{h}(\mathbb{C} \setminus \partial D(0,1)) \cap C(\mathbb{C})$ telle que $u_1 \notin \mathrm{h}(\mathbb{C})$ et en considérant $u(z_1, z_2) = u_1(z_1)$ pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, il est clair que $u \in \mathrm{prh}(\mathbb{C}^2 \setminus \partial D(0,1) \times \mathbb{C}) \cap C(\mathbb{C}^2)$ mais $u \notin \mathrm{prh}(\mathbb{C}^2)$. D'après Cegrell [2], ceci implique bien que $C(\tilde{\tilde{E}})$ n'est pas déterminant dans $\mathbb{C}^4$.

3. Résultat principal

THÉORÈME 3.1. *Soit $u \in \mathrm{psh}(G \setminus E)$ avec $\overline{\Gamma_n}(E) = 0$. Supposons que u soit localement majorée le long de E. Alors u a une unique extension $u^* \in \mathrm{psh}(G)$.*

Ce théorème établit l'intérêt des obstacles E, non nécessairement fermés dans $\mathbb{C}^n$, mais qui sont des obstacles impropres par rapport à un ouvert G de $\mathbb{C}^n$ pour les fonctions plurisousharmoniques localement majorées le long de E (c'est à dire toute $u \in \mathrm{psh}(G \setminus E)$ localement majorée le long de E a une unique extension $u^* \in \mathrm{psh}(G)$) telle que: (i) $E \subset G$ (ii) E fermé dans G (iii) $\overline{\Gamma_n}(E) = 0$.

DEMONSTRATION. Le cas $n = 1$ est couvert par le résultat de Brelot [1]. Soit $n \geqslant 2$.

LEMME 3.1. *Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{C}^n$ de type F_σ. Alors $C^n(F) = 0$ si et seulement si*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} H^{2n-2}(\{Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \mathrm{Cap}^*(F(Z_j)) > 0\}) = 0,$$

où $F(Z_j) = \{z_j \in \mathbb{C} \mid (z_j, Z_j) \in F\}$.

DEMONSTRATION. Voir Hyvönen et Rühentaus [4]. □

LEMME 3.2. *Soit F un sous-ensemble borélien dans $\mathbb{C}^n$ avec $C^n(F) = 0$. Alors pour tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, $C^n(T^{-1}(F)) = 0$ si: $T(z_1, \dots, z_n) = (\alpha_1 z_1, \dots, \alpha_n z_n)$, $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.*

DEMONSTRATION. Par récurrence sur n. On note $A = T^{-1}(F)$ pour simplifier et si $z_j \in \mathbb{C}$ (resp. $Z_j \in \mathbb{C}^{n-1}$), $F(z_j) = \{Z_j' \in \mathbb{C}^{n-1} \mid (z_j, Z_j') \in F\}$ (resp. $F(Z_j) = \{z_j' \in \mathbb{C} \mid (z_j', Z_j) \in F\}$). Si $n = 2$, on a

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant 2} H^2(\{z_j \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Cap}^*(F(z_j)) > 0\}) = 0.$$

On déduit que pour chaque $j = 1, 2$ il existe $B_j \subset \mathbb{C}$, $H^2(B_j) = 0$ et $\forall z_j \in \mathbb{C} \setminus B_j$, $F(z_j)$ est polaire dans $\mathbb{C}$. Fixons $j = 1$. On veut construire $B_1' \subset \mathbb{C}$ vérifiant $H^2(B_1') = 0$ et pour tout $z_1 \in \mathbb{C} \setminus B_1'$, $H^2(A(z_1)) = 0$ avec

$$\begin{aligned} A(z_1) = \{z_2 \in \mathbb{C} \mid (z_1, z_2) \in A\} &= \{z_2 \in \mathbb{C} \mid (\alpha_1 z_1, \alpha_2 z_2) \in F\} \\ &= \Big\{z_2 \in \mathbb{C} \mid z_2 \in \frac{1}{\alpha_2} F(\alpha_1 z_1)\Big\}. \end{aligned}$$

Notons que $\forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus B_1$, $F(z_1)$ est polaire dans $\mathbb{C}$. Donc si $\alpha_1 z_1 \in \mathbb{C} \setminus B_1$, $F(\alpha_1 z_1)$ est polaire (et il résultera que $\frac{1}{\alpha_2} F(\alpha_1 z_1)$ est polaire). Mais $\alpha_1 z_1 \in \mathbb{C} \setminus B_1$ équivaut à $z_1 \in \mathbb{C} \setminus (\frac{1}{\alpha_1} B_1)$ avec $H^2(\frac{1}{\alpha_1} B_1) = 0$. D'où, $\forall z_1 \in \mathbb{C} \setminus (\frac{1}{\alpha_1} B_1)$, $A(z_1)$ est polaire dans $\mathbb{C}$. On prendra $B_1' = \frac{1}{\alpha_1} B_1$. Le reste de la preuve découle du cas $n = 2$. □

Le lemme suivant est dû à Lelong [7].

Lemme 3.3. *Soit $u : G \to [-\infty, +\infty[$ une fonction. u est plurisousharmonique dans G si et seulement si $u \circ T$ est sousharmonique dans $T^{-1}(G)$, pour toute T transformation $\mathbb{C}$-linéaire et inversible sur $\mathbb{C}^n$.*

Maintenant la démonstration du théorème est possible. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. Comme

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} H^{2n-2}(\{Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \mathrm{Cap}^*(E(Z_j)) > 0\}) = 0,$$

soit donc $B_j \subset \mathbb{C}^{n-1} / H^{2n-2}(B_j) = 0$ et $\forall Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus B_j$, $E(Z_j)$ est fermé polaire dans l'ouvert $G(Z_j) = \{z_j \in \mathbb{C} \mid (z_j, Z_j) \in G\}$. Fixons $Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus B_j$ avec $G(Z_j) \neq \emptyset$. $u_{Z_j} = u(., Z_j)$ est localement majorée le long de $E(Z_j)$. Comme $E(Z_j)$ est polaire, alors u_{Z_j} a une unique extension dans $\mathrm{sh}(G(Z_j))$ (notée encore u_{Z_j}).

Soit $u_k = \max(u, -k)$ pour $k \geqslant 1$. On a $u_k \in \mathrm{psh}(G \setminus E) \cap L^\infty_{\mathrm{loc}}(G)$, $u_k \geqslant -k$, de plus $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \forall Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus B_j$ (avec $G(Z_j) \neq \emptyset$), $u_k(., Z_j) \in \mathrm{sh}(G(Z_j))$. Montrons que la distribution $\Delta(u_k)$ est positive pour chaque $k \geqslant 1$.

Soit φ une forme C^∞, à support compact dans G, du type $\Phi_0 \frac{\beta^n}{n!}$ où

$$\beta = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j \quad \text{et} \quad \Phi_0 \in C_c^\infty(G),\ \Phi_0 \geqslant 0 \quad \Big(\frac{\beta^n}{n!} = dm_{2n}\Big).$$

$$\Big\langle \Delta u_k, \Phi_0 \frac{\beta^n}{n!} \Big\rangle = \int_G u_k \Delta(\Phi_0) dm_{2n}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{Z_j \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus B_j} \Big(\int_{z_j \in G(Z_j)} u_k(z_j, Z_j) \Delta_j(\Phi_0)(z_j, Z_j)\, dm_2(z_j) \Big) dm_{2n-2}(Z_j) \geqslant 0$$

($\Delta_j(\Phi_0)$ étant le laplacien de Φ_0 par rapport à la même variable complexe). Ceci implique que u_k possède un prolongement sousharmonique dans $G, \forall k \geqslant 1$. On déduit facilement un prolongement de u noté u^* sousharmonique dans G. Un argument développé à partir du Lemme 3.3 de Lelong impliquera $u^* \in \mathrm{psh}(G)$: On prouvera que pour toute transformation $T_\varepsilon : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, de la forme

$$T_\varepsilon(z_1, z_2, \dots, z_n) = z_1 b + \varepsilon \sum_{j=2}^{n} z_j v_j$$

avec $\varepsilon > 0$, $(b, v_2, \dots, v_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$ ($T_\varepsilon = \alpha \circ T$ où α est unitaire sur $\mathbb{C}^n$ et $T(z_1, z_2, \dots, z_n) = (z_1, \varepsilon z_2, \dots, \varepsilon z_n)$), (cf. [10, p. 61]). Ce qui termine la démonstration. □

Remarques 1. (a) Soit $G = D \times \mathbb{C}$; $D = D(0, 1)$. $E = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \geqslant 1\} \times \partial D$. E est fermé pluripolaire (non pluripolaire complet) dans $D \times \mathbb{C}$. C'est clair que E n'est pas compact dans $D \times \mathbb{C}$. Toute fonction $u \in \mathrm{psh}(G \setminus E)$ se prolonge de façon unique dans $\mathrm{psh}(G)$. En effet, $u \in \mathrm{psh}(D(0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{C} \setminus \{0\} \times \partial D)$. $D(0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{C}$ est pseudo-convexe, $\{0\} \times \partial D$ étant compact pluripolaire. D'après Cegrell [2], u se prolonge de façon unique dans $\mathrm{psh}(D(0, \frac{1}{2}) \times \mathbb{C})$ et ainsi de suite.

(b) Soit $D = D(0, 1)$. $G = D \times \mathbb{C} \setminus \{0\}$. G n'est pas pseudo-convexe dans $\mathbb{C}^2$. Soit $F = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \geqslant 2\} \times \overline{D}(0, 1)$. F est fermé pluripolaire dans G, F n'est pas compact. Toute fonction $u \in \mathrm{psh}(G \smallsetminus F)$ se prolonge de manière unique dans $\mathrm{psh}(G)$.

Les remarques (a) et (b) montrent que dans [2, Theorem 6.5] les conditions l'ouvert est pseudo-convexe et l'obstacle est compact pluripolaire parfois ne sont pas nécessaires.

References

1. M. Brelot, *Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point*, Actual. Sci. Industr. **139** (1934), 5–55.
2. U. Cegrell, *Removable singularities for plurisubharmonic functions and related problems*, Proc. Lond. Math. Soc. **36** (1978), 310–336.
3. U. Cegrell, *Removable singularity sets for analytic functions having modulus with bounded Laplace mass*, Proc. Am. Math. Soc. **88** (1983), 283–286.
4. J. Hyvönen and J. Rühentaus, *On the extension in the Hardy classes and in the Nevanlinna class*, Bull. Soc. Math. France **112** (1984), 469–480.
5. M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
6. S. G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Wiley, New York, 1982.
7. P. Lelong, *Plurisubharmonic Functions and Positive Differentiel Forms*, Gordon and Breach, New York, 1969.
8. L. I. Ronkin, *Introduction to the Theory of Entire Functions of Several Variables*, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1974.
9. W. Rudin, *Function Theory in the Unit Ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.
10. V. S. Vladimirov, *Les fonctions de plusieurs variables complexes* (*et leur application à la théorie quantique des champs*), Dunod, Paris, 1967.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
2092 Tunis
Tunisia
abidijamel1@yahoo.fr

(Received 29 06 2009)