PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 98(112) (2015), 287–293 DOI: 10.2298/PIM141101010B

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FONCTIONS HOLOMORPHES DES FONCTIONS D'UNE CLASSE DE GEVREY SUR L'INTERVALLE $[-1,1]$

Elmostafa Bendib and Hicham Zoubeir

ABSTRACT. We characterize Gevrey functions on the unit interval $[-1,1]$ as sums of holomorphic functions in specific neighborhoods of $[-1,1]$. As an application of our main theorem, we perform a simple proof for Dyn'kin's theorem of pseudoanalytic extension for Gevrey classes on $[-1,1]$.

1. Introduction

En 1926, Carleman a posé le problème de la représentation d'une fonction d'une classe quasi-analytique [**4**]. Il avait remarqué que ce problème ne pouvait pas être résolu au moyen des méthodes classiques de la théorie des fonctions quasi-analytiques, mais que la solution de ce problème nécessitait une méthode de décomposition.

En 1936, San Juan a présenté au congrés d'Oslo une méthode explicite de décomposition qui permet de résoudre ce problème [**9**].

En 1962, Badalyan [**1**] a proposé un procédé algorithmique qui permet de développer une fonction d'une classe quasi-analytique en une série de quasi-puissances. En 1970 [**2**], il a généralisé ce procédé à certaines classes non quasi-analytiques, mais ce procédé reste local.

Plus récemment, Belghiti [**3**] a obtenu pour les fonctions de certaines classes de Carleman sur un domaine convexe borné du plan complexe une représentation en série de fonctions holomorphes. Cependant la méthode utilisée, qui s'appuie sur le théorème de Dyn'kin [**6**], n'est pas explicite.

Dans ce travail, nous proposons une méthode explicite de représentation d'une fonction d'une classe de Gevrey sur $[-1,1]$. Cette méthode consiste à réaliser les fonctions de la classe comme étant des sommes de séries de fonctions holomorphes sur des voisinages appropriés de $[-1,1]$ dépendant de la classe, et uniformément contrôlées sur ces voisinages par les termes d'une série géométrique convergente. On dispose ainsi d'une caractérisation à la fois géométrique et analytique de la classe de Gevrey.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 30D60.
Key words and phrases: Gevrey classes.
Communicated by Luigi Rodino.

Un avantage de notre étude est de retrouver de manière explicite et simplifiée le théorème de Dyn'kin du prolongement pseudo-analytique pour les classes de Gevrey sur $[-1,1]$.

2. Notations et résultat principal

Soit I un intervalle compact de la droite réelle et k un réel strictement positif. La classe de Gevrey d'ordre k sur l'intervalle I notée $G_k(I)$ [**8**] est l'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables f sur I satisfaisant les conditions

$$\|f^{(n)}\|_{\infty,I} := \sup_{x\in I}|f^{(n)}(x)| \leqslant \alpha\beta^n n^{n(1+1/k)}, \quad n=0,1,2,\ldots$$

avec la convention $0^0=1$, les constantes α et β ne dépendant que de f.

On note $G_k(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle compact I de $\mathbb{R}$ appartient à $G_k(I)$.

Pour tout $A>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on note $D_{k,A,n} := [-1,1]+B(0,An^{-\frac{1}{k}})$ et $D_A := [-1,1]+B(0,A)$ où $B(0,r)$ désigne la boule euclidienne ouverte de centre 0 et de rayon $r>0$.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 2.1. (1) *Soit $f\in G_k([-1,1])$, alors il existe des constantes $C,A>0$, $0<\rho<1$ et une suite $(P_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions rationnelles de pôles éventuels i ou $-i$ telles que*

(a) $(\forall x\in[-1,1])\; f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_n(x)$,
(b) $\|P_n\|_{\infty,D_{k,A,n}} \leqslant C\rho^n$ *pour n assez grand.*

(2) *Réciproquement, supposons qu'il existe des constantes $C,A>0$, $0<\rho<1$ et une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions holomorphes dans $D_{k,A,n}$ telles que $\|f_n\|_{\infty,D_{k,A,n}} \leqslant C\rho^n$, $n=1,2,\ldots$. Alors, la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}f_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$ vers une fonction f appartenant à la classe $G_k([-1,1])$.*

3. Preuve du théorème principal

La preuve de la partie directe de ce théorème repose sur les résultats suivants.

Proposition 3.1. *Soit $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ la restriction d'une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Supposons que $g\in G_k([-\pi,\pi])$, alors il existe des constantes $A,C>0$, $0<\rho<1$ et une suite $(g_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions rationnelles de pôle éventuel 0 telles que*

(1) $\|g_n\|_{\infty,\mathcal{K}_n} \leqslant C\rho^n$ *pour $n=1,2,\ldots,$*
où $\mathcal{K}_n := \{z\in\mathbb{C},\; 1-An^{-1/k}<|z|<1+An^{-1/k}\}$,
(2) $(\forall\theta\in[-\pi,\pi])\; g(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(e^{i\theta})$.

Preuve. Le développement en série de de Fourier de g s'écrit pour tout $\theta\in[-\pi,\pi]$

$$g(\theta)=\sum_{p\in\mathbb{Z}}a_p e^{ip\theta} \quad \text{avec} \quad a_p=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta)e^{-ip\theta}d\theta, \quad p\in\mathbb{Z}.$$

D'après [**8**] on a les estimations

$$(\forall p \in \mathbb{Z})\, |a_p| \leqslant C_0 e^{-C_1|p|^{k/(k+1)}}$$

où les constantes C_0 et C_1 ne dépendent que de g.

Considérons maintenant la suite $(N_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels strictement positifs définie par

$$N_n := \Big(\frac{C_1 k}{2A(k+1)}\Big)^{k+1} 2^{-(k+1)/k} n^{(k+1)/k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$A > 0$, est une constante qu'on choisira plus tard.

Posons pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$g_0(z) := \sum_{|p|<N_1} a_p z^p, \qquad g_n(z) := \sum_{N_n \leqslant |p| < N_{n+1}} a_p z^p$$

On a donc

$$|g_n(z)| \leqslant C_0 \sum_{N_n \leqslant p < N_{n+1}} e^{-C_1|p|^{k/(k+1)}} (|z|^p + |z|^{-p}). \tag{3.1}$$

Si z appartient à $\mathcal{K}_n$, alors les estimations (3.1) deviennent

$$|g_n(z)| \leqslant C_0 \sum_{N_n \leqslant p < N_{n+1}} e^{-C_1|p|^{k/(k+1)}} ((1 + An^{-1/k})^p + (1 - An^{-1/k})^{-p}).$$

Mais pour n assez grand, on a $(1 - An^{-1/k})^{-1} \leqslant 1 + 2An^{-1/k}$. Dans ce cas on obtient

$$\|g_n\|_{\infty,\mathcal{K}_n} \leqslant C_0(1 + N_{n+1} - N_n) \max_{N_n \leqslant p < N_{n+1}} 2e^{-C_1 p^{k/(k+1)} + 2pAn^{-1/k}}$$

Il résulte de l'étude des fonctions

$$]0, +\infty[\, \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -C_1 x^{k/(k+1)} + 2xAn^{-1/k},$$

sur l'intervalle $[N_n, N_{n+1}]$ que pour n assez grand, on a

$$\begin{aligned}\|g_n\|_{\infty,\mathcal{K}_n} &\leqslant C_0(1 + N_{n+1} - N_n)\\ &\qquad \times \exp\Big(- C_1 2^{-1}\Big(\frac{C_1 k}{2A(k+1)}\Big)^k n + 2^{-1/k}\Big(\frac{C_1 k}{2A(k+1)}\Big)^{k+1} An\Big)\end{aligned}$$

Si on choisit $A = C_1 3^{-1} 2^{1/k}$, on obtient pour n assez grand

$$\|g_n\|_{\infty,\mathcal{K}_n} \leqslant C_0(1 + N_{n+1} - N_n) \exp\Big(- C_1 3^{-1}\Big(\frac{3k}{2^{1/k}(k+1)}\Big)^{k+1} n\Big).$$

Mais dans ce cas,

$$(1 + N_{n+1} - N_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{k+1}{k}\left(\frac{3k}{2^{1/k}(k+1)}\right)^{k+1} n^{1/k}$$

Il s'ensuit qu'il existe deux constantes $C_2, C_3 > 0$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}\, \|g_n\|_{\infty,\mathcal{K}_n} \leqslant C_2 e^{-C_3 n}$. Ceci achève la preuve de la proposition 3.1. □

Proposition 3.2. *Soit* $f \in G_k([-1,1])$, *alors il existe une fonction* $F \in G_k(\mathbb{R})$ *telle que* (1) F *est à support compact contenu dans* $[-2,2]$, (2) $F_{|_{[-1,1]}} = f$.

Preuve. D'après [**7**], il existe $F_1, F_2 \in G_k(\mathbb{R})$ telles que

$$F_1^{(n)}(-1) = f^{(n)}(-1), \quad F_2^{(n)}(1) = f^{(n)}(1), \quad n \in \mathbb{N}$$

D'autre part, d'après [**11**] il existe $\Phi \in G_k(\mathbb{R})$ à support contenu dans $[-2,2]$ avec $\Phi(x) = 1$ pour tout $x \in [-1,1]$. La fonction F définie par

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [-1,1], \\ F_1(x)\Phi(x) & \text{si } x \in \left]-\infty,-1\right[, \\ F_2(x)\Phi(x) & \text{si } x \in \left]1,+\infty\right[\end{cases}$$

satisfait les conditions voulues. □

Preuve de la partie directe du théorème principal. Soit f une fonction appartenant à la classe $G_k([-1,1])$, il existe une fonction F dans la classe $G_k(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans l'intervalle $[-2,2]$ et qui coïncide avec f sur l'intervalle $[-1,1]$.

Considérons la fonction g définie sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ par

$$g(\theta) = \begin{cases} F(\tan\frac{\theta}{2}) & \text{si } \theta \in \left]-2\arctan(2), 2\arctan(2)\right[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après un théorème de Cartan [**5**, théorème III, pp. 24–27], la restriction de g à l'intervalle $J := [-2\arctan(2), 2\arctan(2)]$ appartient à la classe $G_k(J)$. Or, g est la restriction à $[-\pi,\pi]$ d'une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qui s'annule sur $[-\pi,\pi] \setminus J$; donc $g \in G_k([-\pi,\pi])$.

Par application de la proposition 3.1, il existe des constantes $0 < A, \rho < 1$, $C > 0$ et une suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions rationnelles de pôle éventuel 0 telles que

(1) $\|g_n\|_{\infty,\mathcal{K}_n} \leqslant C\rho^n$ pour $n = 1, 2, \dots$,
(2) $(\forall\theta \in [-\pi,\pi])\, g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(e^{i\theta})$.

Soit $x \in [-2,2]$. Il existe un unique $\theta \in [-2\arctan(2), 2\arctan(2)]$ tel que $x = \tan(\frac{\theta}{2})$ de sorte que $F(x) = g(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n\big(\frac{i-x}{i+x}\big)$. Soit d'autre part $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\operatorname{Im}(z)| < 1$ (donc $z \neq i$ et $z \neq -i$); posons $\zeta = \frac{i-z}{i+z}$, on a $|\operatorname{Im}(z)| \geqslant \frac{|1-|\zeta||}{1+|\zeta|}$. Donc

$$(\forall A' \in \left]0,1\right[)(\forall n \geqslant 1)\, |\operatorname{Im}(z)| \leqslant A'n^{-1/k} \Rightarrow \frac{1 - A'n^{-1/k}}{1 + A'n^{-1/k}} \leqslant |\zeta| \leqslant \frac{1 + A'n^{-1/k}}{1 - A'n^{-1/k}}$$

En choisissant $A' \in \left]0,1\right[$ suffisamment petit, on obtient

$$(\forall n \geqslant 1)\, 1 - An^{-1/k} < \frac{1 - A'n^{-1/k}}{1 + A'n^{-1/k}} \quad \text{et} \quad \frac{1 + A'n^{-1/k}}{1 - A'n^{-1/k}} < 1 + An^{-1/k}.$$

Posons $\mathcal{B}_n := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < A'n^{-1/k}\}$. Les points i et $-i$ sont en dehors de $\mathcal{B}_n$. De plus $\frac{i-z}{i+z} \in \mathcal{K}_n$ pour tout $z \in \mathcal{B}_n$. La fonction P_n définie par $P_n(z) = g_n\big(\frac{i-z}{i+z}\big)$ est une fonction rationnelle de pôles éventuels i ou $-i$ et satisfait $\|P_n\|_{\infty,\mathcal{B}_n} \leqslant C\rho^n$ et on a pour tout $x \in [-2,2]$, $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)$. Or, $D_{k,A' n} \subset \mathcal{B}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il en résulte que

(1) $(\forall x \in [-1,1])\, f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$,

(2) $\|P_n\|_{\infty,D_{k,A',n}} \leqslant C\rho^n$ pour n assez grand. □

Preuve de la partie réciproque du théorème principal. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions holomorphes au voisinage de $[-1,1]$ telle qu'il existe des constantes $A, C > 0$, $0 < \rho < 1$ telles que $f_n \in \mathcal{O}(D_{k,A,n})$ et $\|f_n\|_{\infty,D_{n,A,k}} \leqslant C\rho^n$, $n = 1, 2, \dots$ La série $\sum f_{n|[-1,1]}$ converge donc uniformément vers une fonction continue f sur $[-1,1]$. On a $[-1,1] \subset \overline{D}_{k,A,2,n} \subset D_{k,A,n}$. Par les inégalités de Cauchy, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\|f_n^{(p)}\|_{\infty,[-1,1]} \leqslant p!(2/A)^{p+1} C n^{(p+1)/k} \rho^n. \tag{3.2}$$

Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(p)}$ est normalement convergente sur $[-1,1]$, il s'ensuit que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$. Nous allons montrer qu'en fait $f \in G_k([-1,1])$.

En effet en vertu de (3.2) on peut écrire pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$

$$|f^{(p)}(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2C}{A}\Big(\frac{2}{A}\Big)^p p!\, n^{(p+1)/k}\rho^n \leqslant \frac{2C}{A}\Big(\frac{2}{A}\Big)^p p! \frac{1}{1-\rho} \sup_{n\geqslant 1} n^{(p+1)/k}\rho^{n/2}.$$

L'étude de la fonction $t \mapsto t^{(p+1)/k}\rho^{t/2}$ sur $]0,+\infty[$ montre que

$$\sup_{n\geqslant 1} n^{(p+1)/k}\rho^{n/2} \leqslant Qe^{1/k}\big(Qe^{1/k}\big)^p p^{p/k} \text{ où } Q := \frac{2e^{-1}}{-k\ln\rho}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\|f^{(p)}\|_{\infty,[-1,1]} &\leqslant \frac{2C}{A(1-\sqrt{\rho})}\Big(\frac{2}{A}\Big)^p p!\, Qe^{1/k}\big(Qe^{1/k}\big)^p p^{\frac{p}{k}} \\ &\leqslant \frac{2CQe^{1/k}}{A(1-\sqrt{\rho})}\Big(\frac{2Qe^{1/k}}{A}\Big)^p p^{p(1+1/k)}.\end{aligned}$$

Donc $f \in G_k([-1,1])$. □

4. Application: théorème de Dyn'kin pour la classe $G_k([-1,1])$

Corollaire 4.1 (E. M. Dyn'kin). *Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{C}$. Supposons que $f \in G_k([-1,1])$, alors il existe une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ et à support compact telle que (1) $F_{|[-1,1]} = f$, (2) $|\frac{\partial F}{\partial \bar z}(z)| \leqslant C_1 e^{-C_2(d(z,[-1,1]))^{-k}}$, $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ où C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives.*

Preuve. Par le théorème 2.1 si $f \in G_k([-1,1])$ alors il existe des constantes $A \in]0,1[$, $C > 0$, $\rho \in]0,1[$ et une suite de fonctions rationnelles $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies toutes dans la bande $\mathcal{B} := \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| \leqslant A\}$ telles que

$$(1)\ \ \|f_n\|_{D_{k,A,n}} \leqslant C\rho^n, \quad (2)\ \ \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n|[-1,1]} = f.$$

Par ailleurs il existe une suite de constantes positives (L_α) [**10**] ne dépendant que du double indice $\alpha \in \mathbb{N}^2$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction $h_n : \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$h_n(z) = 1 \text{ si } z \in D_{k,A/8,n}, \quad h_n(z) = 0 \text{ si } z \notin D_{k,A/2,n},$$

$$0 \leqslant h_n \leqslant 1, \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}^2)(\forall z \in \mathbb{C})\, |D^\alpha h_n(z)| \leqslant L_\alpha n^{|\alpha|/k}.$$

où $|\alpha| = p + q$ et $D^\alpha := \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q}$, pour $\alpha = (p, q)$.

En prolongeant par 0 la fonction $h_n f_n$ sur $\mathbb{C} \setminus D_{k,A,n}$, on obtient une fonction F_n de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ telle que $F_{n|D_{k,A/8,n}} = f_{n|D_{k,A/8,n}}$. On a $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{C}} \leqslant C\rho^n$, $n = 1, 2, \dots$. La série de fonctions $\sum f_n$ est donc uniformément convergente sur $\mathbb{C}$ et y définit une fonction continue F à support compact contenu dans D_A; de plus $(\forall x \in [-1,1])\, F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f(x)$. Ainsi F est un prolongement à $\mathbb{C}$ de f.

Soient $\alpha \in \mathbb{N}^2$ et $z \in \mathbb{C}$. Si $z \notin D_{k,A/2,n}$, par (3.2), on obtient $D^\alpha F_n(z) = 0$; si $z \in D_{k,A/2,n}$, alors

$$\begin{aligned}
|D^\alpha F_n(z)| &\leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |D^\beta h_n(z)||D^{\alpha-\beta} f_n(z)| \\
&\leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} L_\beta n^{|\beta|/k} |D^{\alpha-\beta} f_n(z)| \leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} L_\beta n^{|\beta|/k} |f_n^{(|\alpha|-|\beta|)}(z)| \\
&\leqslant \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} L_\beta n^{|\beta|/k} C(|\alpha| - |\beta|)! \Big(\frac{4}{A}\Big)^{|\alpha|+1} \Big(\frac{A}{4}\Big)^{|\beta|} \rho^n n^{(|\alpha|-|\beta|+1)/k} \\
&\leqslant \Big\{ \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} L_\beta C(|\alpha| - |\beta|)! \Big(\frac{4}{A}\Big)^{|\alpha|+1} \Big(\frac{A}{4}\Big)^{|\beta|} \Big\} n^{(|\alpha|+1)/k} \rho^n.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$.

Estimons $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ on a $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}}(z)$. Or $\frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}}(z) = 0$ si $d(z, [-1,1]) \geqslant A n^{-1/k}$ ou $d(z, [-1,1]) < \frac{A}{8} n^{-1/k}$.

Si $d(z, [-1,1]) \in \big[\frac{A}{8} n^{-1/k}, A n^{-1/k}\big[$ alors

$$\frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}}(z) = h_n(z) \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}}(z) + f_n(z) \frac{\partial h_n}{\partial \bar{z}}(z) = f_n(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} h_n(z),$$

donc

$$\Big|\frac{\partial F_n}{\partial \bar{z}}(z)\Big| \leqslant |f_n(z)| \Big|\frac{\partial h_n}{\partial \bar{z}}(z)\Big| \leqslant \frac{C}{2} \rho^n \Big(\Big|\frac{\partial h_n}{\partial x}(z)\Big| + \Big|\frac{\partial h_n}{\partial y}(z)\Big| \Big) \leqslant \frac{C}{2} (L_{(1,0)} + L_{(0,1)}) n^{1/k} \rho^n.$$

En posant $C_0 := \frac{1}{2} C(L_{(1,0)} + L_{(0,1)})$ et $\lambda = -\ln \rho > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z)\Big| &\leqslant \sum_{\frac{A}{8} n^{-1/k} \leqslant d(z,[-1,1]) \leqslant A n^{-1/k}} C_0 n^{1/k} e^{n \ln \rho} \\
&\leqslant C_0 \sum_{(\frac{A}{8 d(z,[-1,1])})^k \leqslant n} n^{1/k} e^{-\lambda n} \leqslant C_0 \sup_{t>0} \{t^{1/k} e^{-\lambda t/2}\} \sum_{(\frac{A}{4 d(z,[-1,1])})^k \leqslant n} e^{-\lambda n/2} \\
&\leqslant \frac{C_0 \sup_{t>0} \{t^{1/k} e^{-\lambda t/2}\}}{1 - e^{-\lambda/2}} e^{-\frac{\lambda}{2} (\frac{A}{8 d(z,[-1,1])})^k} \leqslant C_1 e^{-C_2 (d(z,[-1,1]))^{-k}}
\end{aligned}$$

où $C_1 = \frac{1}{1 - e^{-\lambda/2}} C_0 \sup_{t>0} \{t^{1/k} e^{-\lambda t/2}\} > 0$ et $C_2 = \frac{\lambda}{2} (\frac{A}{8})^k > 0$.

Ceci achève la preuve du corollaire. $\square$

Remerciements. Nous tenons à remercier les professeurs Jean Pierre Demailly et Konstantin Mikhailovich Dyakonov pour leur aide précieuse. Nous exprimons également notre profonde gratitude au référé pour l'interet qu'il a accordé à notre travail.

References

1. G. V. Badalyan, *Criteria for expanding functions into quasi-power series and quasi-analytic classes of functions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **26** (1962), 839–864.
2. ______, *On classification and representation of infinitely differentiable functions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **34** (1970), 584–620.
3. T. Belghiti, *Holomorphic series expansion of function of Carleman type*, Ann. Pol. Math. **84**(3) (2004), 219–224.
4. T. Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
5. H. Cartan, *Sur les classes de fonctions définies par des inégalités sur leurs dérivées successives*, Hermann, Paris, 1940. Actualités Scientifiques et Industrielles **867**.
6. E. M. Dyn'kin, *Pseudo-analytic extension, uniform scale*, Amer. Mat. Soc. Trans. **115** (1980), 33–48.
7. G. A. Dzanasija, *Carleman's problem for the class of Gevrey functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **145** (1962), 259–262.
8. S. Mandelbrojt, *Infinitely differentiable functions*, the Rice Institute Pamphlet, Vol XXIX, 1942, Selecta, Gauthier-Villars, 1981.
9. R. San Juan, *Sur le problème de Watson dans la théorie des séries asymptotiques et solution d'un problème de Carleman de la théorie des fonctions quasianalytiques*, Acta Math. **75** (1943), 247–254.
10. J. C. Tougeron, *Idéaux de fonctions differentiables*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
11. W. Rudin, *Functional Anlysis*, Second edition, New York, 1991.

Département de Mathématiques
Université Ibn Tofail
Faculté des sciences, B.P:133
Kénitra
Maroc
bmelmostafa@Hotmail.com
hichamzoubeir@live.fr

(Received 30 04 2014)